# Fundamentos de Señales y Sistemas

## Usando la Web y MATLAB®

Tercera edición

PEARSON
Prentice Hall

Edward W. Kamen
Bonnie S. Heck

# Fundamentos de señales y sistemas usando la Web y MATLAB®

## Tercera edición

**Edward W. Kamen**
**Bonnie S. Heck**
*School of Electrical and Computer Engineering*
*Georgia Institute of Technology*

TRADUCCIÓN
**Laura Fernández Enríquez**
*Universidad Autónoma Metropolitana*
*Campus Iztapalapa*

REVISIÓN TÉCNICA
**Jesús Enrique Chong Quero**
*Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey*
*Campus Estado de México*

**Rubén Alejos Palomares**
*Computación, Electrónica y Mecatrónica*
*Universidad de las Américas, Puebla*

PEARSON Educación®

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

**KAMEN, EDWARD W., y BONNIE S. HECK**

**Fundamentos de señales y sistemas usando la Web y MATLAB®**

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2008

ISBN: 978-970-26-1187-5
Área: Ingeniería

Formato: 18.5 × 23.5 cm Páginas: 672

Authorized translation from the English language edition, entitled *Fundamentals of Signals and Systems, using the Web and MATLAB®*, 3rd edition by *Edward W. Kamen* and *Bonnie S. Heck*, published by Pearson Education, Inc., publishing as Prentice Hall, Copyright © 2007. All rights reserved.
ISBN 0131687379

Traducción autorizada de la edición en idioma inglés *Fundamentals of Signals and Systems, using the Web and MATLAB®*, 3ª edición por *Edward W. Kamen* y *Bonnie S. Heck*, publicada por Pearson Education, Inc., publicada como Prentice Hall, Copyright © 2007. Todos los derechos reservados.

Esta edición en español es la única autorizada.

**Edición en español**
Editor: Luis Miguel Cruz Castillo
e-mail: luis.cruz@pearsoned.com
Editor de desarrollo: Bernardino Gutiérrez Hernández
Supervisor de producción: Juan José García Guzmán

**Edición en inglés**
Vice President and Editorial Director, ECS: *Marcia J. Horton*
Acquisitions Editor: *Michael McDonald*
Associate Editor: *Alice Dworkin*
Executive Managing Editor: *Vince O'Brien*
Managing Editor: *David A. George*
Production Editor: *Scott Disanno*
Director of Creative Services: *Paul Belfanti*
Art Director: *Jayne Conte*
Cover Design: *Bruce Kenselaar*
Art Editor: *Greg Dulles*
Manufacturing Manager: *Alexis Heydt-Long*
Manufacturing Buyer: *Lisa McDowell*
Marketing Manager: *Tim Galligan*

TERCERA EDICIÓN, 2008

D.R. © 2008 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
Atlacomulco 500-5o. piso
Col. Industrial Atoto
53519, Naucalpan de Juárez, Estado de México

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031.

Prentice Hall es una marca registrada de Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

El préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso de este ejemplar requerirá también la autorización del editor o de sus representantes.

ISBN: 978-970-26-1187-5

Impreso en México. *Printed in Mexico.*
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 11 10 09 08

# Contenido

**Prefacio** **ix**

**CAPÍTULO 1** Conceptos básicos 1

1.1 Señales de tiempo continuo 1
1.2 Señales de tiempo discreto 11
1.3 Sistemas 21
1.4 Ejemplos de sistemas 24
1.5 Propiedades básicas de un sistema 31
1.6 Resumen del capítulo 37
Problemas 37

**CAPÍTULO 2** Modelos en el dominio de tiempo de sistemas 44

2.1 Representación de entrada/salida de los sistemas de tiempo discreto 44
2.2 Convolución de señales de tiempo discreto 49
2.3 Modelos de ecuaciones de diferencias 55
2.4 Modelos de ecuaciones diferenciales 64
2.5 Solución a ecuaciones diferenciales 69
2.6 Representación de la convolución de sistemas de tiempo continuo 75
2.7 Resumen del capítulo 84
Problemas 85

**CAPÍTULO 3** Series y transformada de Fourier 96

3.1 Representación de señales en términos de sus componentes de frecuencia 96
3.2 Serie trigonométrica de Fourier 101
3.3 Serie exponencial compleja 108
3.4 Transformada de Fourier 114

3.5 Contenido espectral de señales comunes 122
3.6 Propiedades de la transformada de Fourier 126
3.7 Transformada generalizada de Fourier 141
3.8 Aplicación a modulación y demodulación de señales 144
3.9 Resumen del capítulo 152
Problemas 154

**CAPÍTULO 4** Análisis de Fourier de las señales de tiempo discreto 166

4.1 Transformada de Fourier de tiempo discreto 166
4.2 Transformada discreta de Fourier 179
4.3 DFT de señales truncadas 188
4.4 Algoritmo FFT 195
4.5 Aplicación al análisis de datos 206
4.6 Resumen del capítulo 216
Problemas 217

**CAPÍTULO 5** Análisis de Fourier aplicado a sistemas 222

5.1 Análisis de Fourier de los sistemas de tiempo continuo 222
5.2 Respuesta a entradas periódicas y no periódicas 228
5.3 Análisis de filtros ideales 237
5.4 Muestreo 242
5.5 Análisis de Fourier de sistemas de tiempo discreto 249
5.6 Aplicación al filtrado digital pasa baja 254
5.7 Resumen del capítulo 262
Problemas 263

**CAPÍTULO 6** La transformada de Laplace y la representación de la función de transferencia 279

6.1 Transformada de Laplace de una señal 279
6.2 Propiedades de la transformada de Laplace 285
6.3 Cálculo de la transformada inversa de Laplace 296
6.4 Transformada de la ecuación diferencial de entrada y salida 316
6.5 Transformada de la integral de convolución de entrada y salida 323
6.6 Construcción directa de la función de transferencia 330
6.7 Resumen del capítulo 341
Problemas 342

**CAPÍTULO 7** La transformada *z* y los sistemas de tiempo discreto 352

7.1 Transformada *z* de una señal de tiempo discreto 352
7.2 Propiedades de la transformada *z* 357
7.3 Cálculo de la transformada *z* inversa 367

7.4 Representación de la función de transferencia 377
7.5 Análisis de sistemas mediante la representación de la función de transferencia 388
7.6 Resumen del capítulo 400
Problemas 401

**CAPÍTULO 8** Análisis de los sistemas de tiempo continuo mediante la representación de la función de transferencia 411

8.1 Estabilidad y la respuesta al impulso 411
8.2 Prueba de estabilidad de Routh-Hurwitz 414
8.3 Análisis de la respuesta al escalón 419
8.4 Respuesta a sinusoides y a otras entradas 437
8.5 Función de respuesta en frecuencia 443
8.6 Filtros causales 463
8.7 Resumen del capítulo 478
Problemas 479

**CAPÍTULO 9** Aplicación al control 489

9.1 Introducción al control 489
9.2 Control de seguimiento 497
9.3 Lugar geométrico de las raíces 508
9.4 Aplicación al diseño de sistemas de control 516
9.5 Resumen del capítulo 525
Problemas 526

**CAPÍTULO 10** Diseño de filtros y controladores digitales 536

10.1 Discretización 536
10.2 Diseño de filtros IIR 543
10.3 Diseño de filtros IIR mediante MATLAB 549
10.4 Diseño de filtros FIR 556
10.5 Diseño de controladores digitales 568
10.6 Resumen del capítulo 577
Problemas 578

**CAPÍTULO 11** Representación de estado 584

11.1 Modelo de estado 584
11.2 Construcción de modelos de estado 587
11.3 Solución de ecuaciones de estado 595
11.4 Sistemas de tiempo discreto 604

11.5 Representaciones de estado equivalentes 612
11.6 Discretización de un modelo de estado 618
11.7 Resumen del capítulo 622
Problemas 623

**Apéndice A** *Repaso breve de la variable compleja* 633

**Apéndice B** *Repaso breve de matrices* 638

**Bibliografía** 644

**Índice** 645

# Prefacio

Con una presentación sencilla, este libro muestra un amplio contenido sobre señales y sistemas de tiempo continuo y discreto con ejemplos que se encuentran en el sitio Web de este libro, datos descargados de Internet e ilustraciones de diversos comandos de MATLAB® para solucionar una amplia variedad de problemas que surgen de la ingeniería y de otros campos, tales como el análisis de información financiera. La tercera edición es una mejora importante a la edición anterior, ya que se redujo el grado de complejidad matemática, se añadieron aplicaciones prácticas que implican la descarga de información, así como la adición de otras ilustraciones; asimismo, se reorganizó el material de tal manera que la flexibilidad para utilizar el libro durante un curso de tres o de seis meses se vio muy favorecida. Los puntos importantes que surgen de la revisión de la tercera edición son:

1. La presentación se simplificó. Se eliminaron o rescribieron varias partes matemáticas de la edición anterior, y se incluyeron nuevas ilustraciones para dar una idea adicional del significado y la importancia de las formulaciones matemáticas que abarca el libro. También se agregaron resúmenes al final de cada capítulo para destacar el material cubierto en ellos.
2. La parte central de esta nueva edición se ubica en los capítulos 1 a 7, los cuales, en promedio, debe poder abarcar cualquier profesor en un curso de tres meses. En un semestre, además de cubrir el material de los capítulos 1 a 7, el profesor debe poder seleccionar material sobre filtrado, controles, y/o la representación de estado, el cual se encuentra en los capítulos 8 a 11.
3. Esta nueva edición contiene aplicaciones prácticas que utilizan información actual descargada de la Web. Las técnicas descritas en el libro muestran cómo se descarga dicha información y luego cómo llevarla a MATLAB para su análisis. La atención se centra en el problema del análisis de información en presencia de ruido, que con frecuencia se presenta en ingeniería, negocios, finanzas y otros campos. Se proporcionan detalles del análisis de información sobre los precios de inventarios, con el objetivo de determinar si la tendencia de precios va a la alza o a la baja.
4. La nueva edición contiene una mejora importante en el componente de MATLAB; en particular, Symbolic Math Toolbox, la cual está disponible en la versión del estudiante (7.0.1) de MATLAB, y que se utiliza a lo largo del libro para complementar y simplificar diversos aspectos computacionales de la teoría y ejemplos presentados a lo

largo de los capítulos. Se presentan muchos ejemplos que ilustran cómo puede utilizarse esta herramienta para resolver ecuaciones diferenciales y para evaluar integrales mediante respuestas de sistemas de cómputo y transformadas y antitransformadas (o transformada inversa) de Fourier y de Laplace, incluyendo las antitransformadas $z$. También se utiliza Simulink para elaborar modelos de sistemas y para simular el comportamiento de sistemas.

5. El sitio Web del libro (www.pearsoneducacion.net/kamen o bien en http://users.ece.gatech.edu/~bonnie/book3), que desarrolló Bonnie Heck, se actualizó con la introducción de problemas adicionales trabajados, todos los archivos de datos y archivos M para la tercera edición, así como materiales nuevos. En el sitio Web, totalmente en inglés, también se encuentran los demo anteriormente mencionados y un tutorial de MATLAB.
6. El material sobre sistemas de control se mejoró e incluye la descripción de un proyecto de laboratorio de control digital que se basa en el kit LEGO® MINDSTORMS®. El proyecto del laboratorio proporciona al estudiante una experiencia "práctica" sobre el diseño y la implementación de los controladores digitales para un motor de cd (corriente directa).

Los conocimientos previos necesarios para leer el libro son los cursos normales sobre cálculo y ecuaciones diferenciales básicas; también resulta útil, aunque no indispensable, haber tomado algunos cursos sobre física. El libro también se pensó para los autodidactas. Ambos autores han enseñado por muchos años el material de este libro a ingenieros eléctricos principiantes; asimismo, Bonnie Heck ha estado involucrada de manera activa en el uso de la Web para mejorar la educación en los campos de señales, sistemas y controles.

Como vimos, algunas de las características clave del texto incluyen el uso en línea de demos que se encuentran en el sitio Web del libro, así como la descarga de información de Internet para realizar el análisis de datos. En muchos de los demos, los estudiantes pueden cambiar diversos valores para ver los resultados. Por ejemplo, las frecuencias que conforman una señal pueden cambiarse, y el efecto resultante se aprecia en la señal desplegada, y los parámetros de una función de respuesta de frecuencia (o función de transferencia) de un sistema pueden cambiarse, y el efecto resultante se aprecia en el rendimiento del sistema que se despliega. En otros de los demos, los estudiantes pueden escuchar los sonidos que corresponden a las señales consideradas. También hay uno sobre un sistema masa-resorte-amortiguador que proporciona una animación de la respuesta de salida que resulta al aplicar diversas entradas. A través de este demo, se pueden realmente ver las características de una respuesta a una entrada de tipo impulso, una entrada escalón, y a una entrada sinusoidal. Las referencias a un demo se denotan con un icono en el margen izquierdo, como se muestra al margen en este punto.

Sistema masa-resorte-amortiguador

Otra característica clave del libro es el uso de MATLAB (versión 7.0) para generar implementaciones por computadora de las técnicas para el diseño y análisis de señales y sistemas que se ven a lo largo de los capítulos. Junto con los demos en línea, las implementaciones de MATLAB proporcionan la oportunidad de verificar que la teoría funciona, y también permiten experimentar con la aplicación de las técnicas estudiadas. En diversos ejemplos se ilustra el uso de varios comandos de MATLAB. El capítulo 1 incluye una explicación sobre el uso de MATLAB para diseñar señales y cómo descargar datos de la Web y llevarlos hacia MATLAB. Además, muchos problemas para resolver en casa requieren de MATLAB. Todos los programas de MATLAB, así como los archivos M que se utilizan en los ejemplos se encuentran disponibles en el sitio Web del libro. Los archivos M de los capí-

tulos 1 a 9 requieren la versión 7.0, ya sea del estudiante o bien la versión completa, junto con la versión 6.1 de Control System Toolbox, la versión 6.2 de Signal Processing Toolbox, y la versión 6.1 de Simulink. El capítulo 10 requiere Signal Processing Toolbox para el diseño de filtros digitales.

El libro incluye diversos ejemplos y problemas sobre las diferentes áreas de ingeniería, entre ellos circuitos eléctricos, sistemas mecánicos, y dispositivos electromecánicos (como motores de cd). También presenta ejemplos sobre el análisis de datos, con cierto énfasis en el filtrado o suavizado de datos (como los datos sobre precios de inventarios), con el objetivo de mostrar la tendencia de los datos. Además, muestra cómo determinar y extraer los componentes cíclicos dominantes a partir de series de tiempo, utilizando la transformada de tiempo discreto de Fourier (DFT). Otras características del libro son el tratamiento paralelo que da a las señales y sistemas de tiempo continuo y discreto, y tres capítulos sobre el control de retroalimentación, filtrado digital, y la representación de estado, la cual prepara a los estudiantes para tomar decisiones avanzadas respecto a estos temas.

En los capítulos 1 y 2, el libro comienza con aspectos de dominio de tiempo de señales y sistemas; esto incluye las propiedades básicas de señales y sistemas, el modelo de convolución de tiempo discreto, el modelo de ecuación en diferencias de entrada-salida, el modelo de ecuación diferencial de entrada-salida, y el modelo de convolución de tiempo continuo. El capítulo 3 inicia con el estudio de señales y sistemas desde un punto de vista de dominio de frecuencias. Al comenzar con las señales que resultan de la suma de sinusoides, esto deriva en la representación de las series de Fourier de señales periódicas, y en la transformada de Fourier de señales no periódicas; en el capítulo 3 también consideramos el uso de la transformada de Fourier para estudiar la modulación de señales. El capítulo 4 considera el análisis de Fourier para señales de tiempo discreto, enfocándose en la transformada de Fourier de tiempo discreto (DTFT), y en la transformada discreta de Fourier (DFT). Esta última transformada se utiliza para determinar los componentes sinusoidales dominantes de una señal de tiempo discreto en la presencia de ruido, con aplicaciones dadas en términos de información descargada de la Web. Después, en el capítulo 5 aplicamos la teoría de Fourier al estudio tanto de sistemas de tiempo continuo y discreto; en este mismo capítulo pretendemos lograr aplicaciones al filtrado análogo ideal, el muestreo, la reconstrucción de señales y el filtrado digital.

Después de la teoría de Fourier, el capítulo 6 comienza con el estudio de la transformada de Laplace, esto es, con su definición, propiedades y la representación de la función de transferencia de sistemas lineales de tiempo continuo, invariantes en el tiempo. El capítulo 7 presenta la transformada $z$ y la representación de la función de transferencia de sistemas lineales de tiempo discreto invariantes en el tiempo; esto nos lleva a las nociones de la función de respuesta de frecuencia, la cual consideramos primero en el capítulo 5. En el capítulo 8, desarrollamos el análisis de sistemas lineales de tiempo continuo, invariantes en el tiempo, utilizando la representación de la función de transferencia. Después, en el capítulo 9 aplicamos el framework de la función de transferencia al problema de control, y en el capítulo 10 aplicamos los frameworks de la transformada $z$ y la de Laplace al diseño de filtros digitales y controladores. En el capítulo 11 presentamos los fundamentos de la descripción de estado de los sistemas lineales de tiempo continuo y discreto, invariantes en el tiempo.

Como es de notar, el libro puede utilizarse en un curso de señales y sistemas de tres o seis meses, en el que los capítulos 1 a 7 (o partes de éstos) se cubren en un curso de tres meses, y los capítulos 1 a 11 (o partes de éstos) pueden cubrirse en un curso de 6 meses. Si selecciona las partes y capítulos adecuados, puede cubrir el caso de tiempo continuo en un curso y el caso de tiempo discreto en otro.

Deseamos agradecer a los profesores y estudiantes que han utilizado ediciones anteriores de este libro como texto en sus cursos por sus diversos y útiles comentarios. De igual manera agradecemos los comentarios escritos que nos hicieron los siguientes revisores: Profesor Charles W. Brice, South Carolina University; Profesor Ravi Warrier, Kettering University; Profesor Jeffrey G. Andrews, University of Texas at Austin; Profesor Stanley Lawrence Marple, Jr., Oregon State University; y al Profesor Uvais Qidwai, de la Tulane University.

También agradecemos a Tom Robbins (anterior editor de Prentice Hall) por sus comentarios a las ediciones previas de este libro; al editor de Prentice Hall, Michael McDonald, por sus sugerencias para la presente edición; y a Alice Dworkin y Scott Disanno, también de Prentice Hall, por sus esfuerzos en los aspectos editoriales y de producción de esta tercera edición. Asimismo enviamos un agradecimiento hacia The Mathworks para Courtney Esposito, por proporcionarnos la información sobre las versiones más recientes de MATLAB y los programas de software de Simulink. Bonnie Heck agradece a sus ex alumnos John Finney y James Moan, quienes escribieron las versiones preliminares del tutorial de MATLAB que está disponible en el sitio Web; y a Darren Garner, James Ho, Jason Meeks, Johnny Wang, y Brian Wilson, por su esfuerzo al generar los demos también disponibles en el sitio Web.

EDWARD W. KAMEN
BONNIE S. HECK

CAPÍTULO

1

# Conceptos básicos

Los conceptos de señales y sistemas surgen casi en cualquier área de la tecnología, incluyendo los circuitos eléctricos, dispositivos para comunicaciones, dispositivos para el procesamiento de señales, robótica y automatización, automóviles, aviones, naves espaciales, dispositivos biomédicos, procesos químicos, y dispositivos de calentamiento y enfriamiento. Los conceptos de señales y sistemas también son muy importantes en otras áreas del desarrollo humano, como en ciencias y economía. En este capítulo consideramos diversos aspectos básicos de señales y sistemas. En las secciones 1.1 y 1.2, el capítulo comienza con una breve introducción a las señales de tiempo continuo y tiempo discreto. La sección 1.2 muestra cómo obtener datos de tiempo discreto de la Web, para su análisis. Después, la sección 1.3 presenta el concepto de un sistema, y la sección 1.4 muestra tres ejemplos específicos de un sistema. La sección 1.5 del capítulo define las propiedades básicas de un sistema, como causalidad, linealidad y la invariancia en el tiempo. La sección 1.6 presenta un resumen del capítulo.

## 1.1 SEÑALES DE TIEMPO CONTINUO

Una señal $x(t)$ es una *función con valor real* o *escalar* de la variable de tiempo $t$. El término *con valor real* significa que para cualquier valor fijo de la variable de tiempo $t$, el valor de la señal en el tiempo $t$ es un número real. Cuando esta variable toma sus valores del conjunto de los números reales, se dice que $t$ es una *variable de tiempo continuo*, y que la señal $x(t)$ es una *señal de tiempo continuo* o una *señal analógica*. Ejemplos comunes de señales de tiempo continuo son el voltaje u ondas de corriente de un circuito eléctrico, las señales de audio como voz u ondas musicales, las posiciones o velocidades de objetos en movimiento, las fuerzas o torcas en un sistema mecánico, las señales bioeléctricas como electrocardiogramas (ECG) o electroencefalogramas (EEG), las velocidades de flujo de líquidos o gases en un proceso químico, etcétera.

Dada una señal $x(t)$ muy complicada, no siempre es posible determinar una función matemática que sea exactamente igual a $x(t)$. Un ejemplo es una señal de voz, como el segmento de diálogo de 50 milisegundos (ms) que aparece en la figura 1.1; este segmento es la transición de la "sh" a "u" de la elocución de la palabra inglesa *should*. Debido a su complejidad, las señales como las ondas de voz por lo general no se especifican en forma matemática. En su lugar, pueden establecerse como un conjunto de muestras. Por ejemplo, si $x(t)$ denota la señal de voz de la figura 1.1, esta señal puede representarse mediante el conjunto de muestras

$$\{x(t_0), x(t_1), x(t_2), x(t_3), \ldots, x(t_N)\}$$

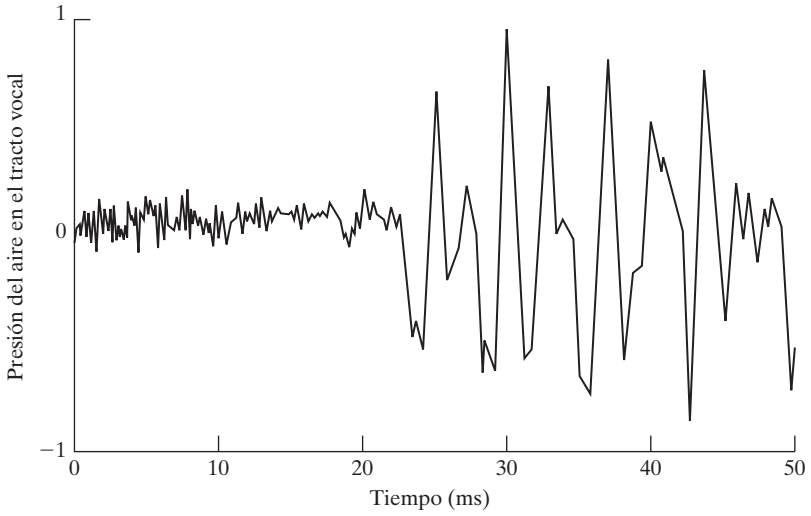



**FIGURA 1.1**
Segmento de diálogo.

donde $x(t_i)$ es el valor de la señal en el tiempo $t_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$, y $N + 1$ es el número de puntos muestreados. Este tipo de representación de señales puede generarse muestreando la señal de voz. La sección 1.2 explica brevemente el muestreo, y después lo analizamos más a fondo en capítulos posteriores.

Además de la representación matemática de una señal, o mediante un conjunto de muestras, las señales también pueden caracterizarse en términos de su "contenido de frecuencias" o "espectro en frecuencia". La representación de señales en términos del espectro en frecuencia se logra utilizando la transformada de Fourier, la cual estudiaremos en los capítulos 3 a 5.

A continuación presentaremos algunos ejemplos sencillos de señales de tiempo continuo, que pueden expresarse en forma matemática.

### 1.1.1 Funciones escalón y rampa

Dos ejemplos sencillos de señales de tiempo continuo son la función escalón unitario $u(t)$ y la función rampa unitaria $r(t)$. Estas funciones se muestran en la figura 1.2.

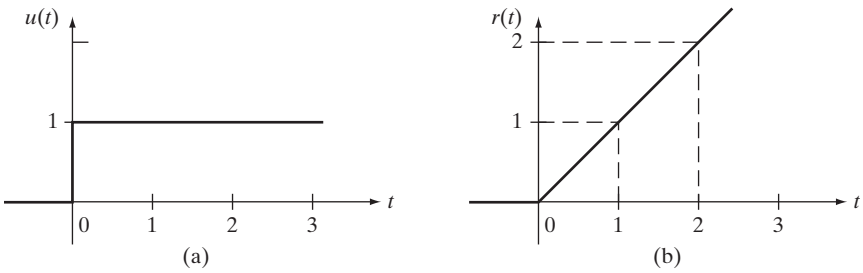



**FIGURA 1.2**
Funciones (a) escalón unitario y (b) rampa unitaria.

La *función escalón unitario u(t)* se define matemáticamente como:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Aquí, *escalón unitario* significa que la amplitud de $u(t)$ es igual a 1 para toda $t \geq 0$. [Observe que $u(0) = 1$; mientras que en algunos libros de texto $u(0)$ se define como cero]. Si $K$ es un número real diferente de cero, $Ku(t)$ es la función escalón, con amplitud $K$ para $t \geq 0$.

Para cualquier señal de tiempo continuo $x(t)$, el producto $x(t)u(t)$ es igual a $x(t)$ para $t \geq 0$, y es igual a cero para $t < 0$. Por lo tanto, multiplicar una señal $x(t)$ por $u(t)$, elimina cualquier valor diferente de cero de $x(t)$ para $t < 0$.

La *función rampa unitaria r(t)* se define matemáticamente como:

$$r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Observe que para $t \geq 0$, la pendiente de $r(t)$ es 1. Por lo tanto $r(t)$ tiene "pendiente unitaria", lo cual es la razón por la que $r(t)$ se conoce como la función rampa unitaria. Si $K$ es un escalar (número real) cualquiera diferente de cero, la función rampa $Kr(t)$, tiene pendiente $K$ para $t \geq 0$.

La función rampa unitaria $r(t)$ es igual a la integral de la función escalón unitario $u(t)$; es decir,

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\lambda)\, d\lambda$$

De manera inversa, la primera derivada de $r(t)$ respecto a $t$ es igual a $u(t)$, con excepción de $t = 0$, donde la derivada de $r(t)$ no está definida.

### 1.1.2 El impulso

El *impulso unitario δ(t)*, también conocido como *función delta* o *distribución de Dirac*, se define como

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(\lambda)\, d\lambda = 1, \quad \text{para cualquier número real } \varepsilon > 0$$

La primera condición establece que $\delta(t)$ es cero para todos los valores de $t$ diferentes de cero, mientras que la segunda condición establece que el área bajo el impulso es 1, por lo que $\delta(t)$ tiene área unitaria.

Es importante señalar que el valor $\delta(0)$ de $\delta(t)$ en $t = 0$ no está definido; en particular, $\delta(0)$ no es igual a infinito. El impulso $\delta(t)$ puede aproximarse mediante un pulso centrado en el origen, con una amplitud $A$ y una duración de $1/A$, donde $A$ es un número positivo muy grande. La interpretación de pulso para $\delta(t)$ aparece en la figura 1.3.

Para cualquier número real positivo $K$, $K\delta(t)$ es el impulso con área $K$, y se define como

$$K\delta(t) = 0, \quad t \neq 0$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} K\delta(\lambda)\, d\lambda = K, \quad \text{para cualquier número real } \varepsilon > 0$$

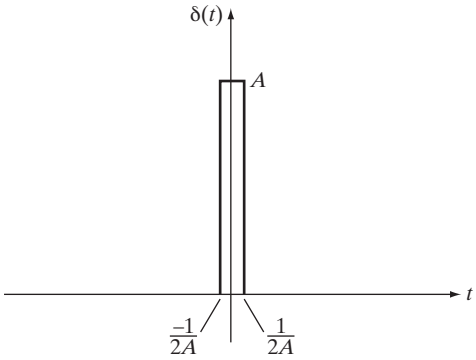



**FIGURA 1.3**
Interpretación de pulso para $\delta(t)$.

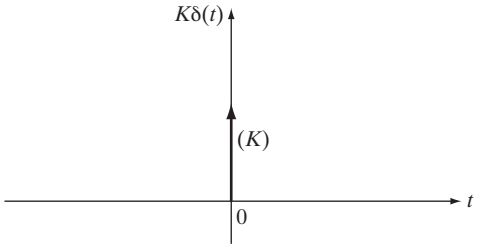



**FIGURA 1.4**
Representación gráfica del impulso $K\delta(t)$.

La figura 1.4 muestra la representación gráfica de $K\delta(t)$. La notación "$(K)$" de la figura, se refiere al área del impulso $K\delta(t)$.

La función escalón unitario $u(t)$ es igual a la integral del impulso unitario $\delta(t)$; de manera más precisa,

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\lambda)\, d\lambda, \text{ para toda } t, \text{ excepto } t = 0$$

Para comprobar esta relación, primero observe que para $t < 0$,

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\lambda)\, d\lambda = 0, \text{ debido a que } \delta(t) = 0 \text{ para toda } t < 0$$

Para $t > 0$,

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\lambda)\, d\lambda = \int_{-t}^{t} \delta(\lambda)\, d\lambda = 1, \text{ ya que } \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(\lambda)\, d\lambda = 1 \text{ para cualquier } \varepsilon > 0$$

### 1.1.3 Señales periódicas

Sea $T$ un número real positivo fijo. Se dice que una señal continua $x(t)$ es periódica con periodo $T$ si

$$x(t + T) = x(t) \text{ para toda } t, -\infty < t < \infty \tag{1.1}$$

Observe que si $x(t)$ es periódica con periodo $T$, también es periódica con periodo $qT$, donde $q$ es cualquier entero positivo. El *periodo fundamental* es el número positivo más pequeño $T$, para el cual la ecuación (1.1) se cumple.

Señales y sonidos

Un ejemplo de una señal periódica es la sinusoide

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta), -\infty < t < \infty \tag{1.2}$$

Aquí $A$ es la amplitud, $\omega$ es la frecuencia en radianes por segundo (rad/s), y $\theta$ es la fase en radianes. La frecuencia $f$ en hertz (Hz) (o ciclos por segundo) es $f = \omega/2\pi$.

Para ver que la sinusoide dada por la ecuación (1.2) es periódica, observe que para cualquier valor de la variable de tiempo $t$,

$$A\cos\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \theta\right] = A\cos(\omega t + 2\pi + \theta) = A\cos(\omega t + \theta)$$

Así, la sinusoide es periódica con periodo $T = 2\pi/\omega$ y, de hecho, $2\pi/\omega$ es el periodo fundamental. La sinusoide $x(t) = A\cos(\omega t + \theta)$ aparece en la figura 1.5, para el caso en que $-\pi/2 < \theta < 0$. Observe que si $\theta = -\pi/2$, entonces

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta) = A \operatorname{sen} \omega t$$

Una pregunta importante en el análisis de señales es si la suma de dos señales periódicas resulta periódica. Suponga que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son señales periódicas, con periodos fun-

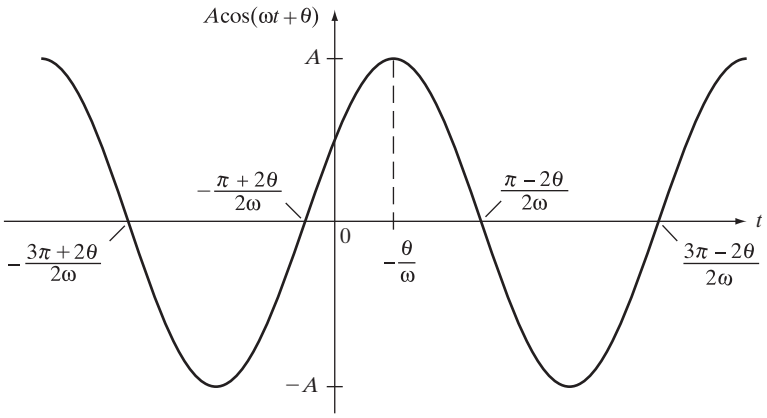



**FIGURA 1.5**
Sinusoide $x(t) = A\cos(\omega t + \theta)$ con $-\pi/2 < \theta < 0$.

damentales $T_1$ y $T_2$, respectivamente. Entonces, ¿es periódica la suma $x_1(t) + x_2(t)$?; es decir, ¿existe un número positivo $T$, tal que

$$x_1(t + T) + x_2(t + T) = x_1(t) + x_2(t) \quad \text{para toda } t? \tag{1.3}$$

Resulta que la ecuación (1.3) se satisface si y sólo si la relación $T_1/T_2$ puede escribirse como la relación de dos enteros, $q$ y $r$, $q/r$. Esto puede mostrarse si observamos que si $T_1/T_2 = q/r$, entonces $rT_1 = qT_2$, y debido a que $r$ y $q$ son enteros, $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son periódicas con periodo $rT_1$. Así, la expresión 1.3 se sigue cumpliendo con $T = rT_1$. Además, si $r$ y $q$ son coprimos (es decir, $r$ y $q$ no tienen factores enteros comunes diferentes de 1), entonces $T = rT_1$ es el periodo fundamental de la suma $x_1(t) + x_2(t)$.

Periodicidad de las sumas de sinusoides

**Ejemplo 1.1 Suma de señales periódicas**

Sea $x_1(t) = \cos(\pi t/2)$ y $x_2(t) = \cos(\pi t/3)$. Entonces $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son periódicas con periodos fundamentales $T_1 = 4$ y $T_2 = 6$, respectivamente. Ahora,

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Entonces, con $q = 2$ y $r = 3$, se desprende que la suma $x_1(t) + x_2(t)$ es periódica, con un periodo fundamental $rT_1 = (3)(4) = 12$ segundos.

### 1.1.4 Señales desplazadas en el tiempo

Dada una señal de tiempo continuo $x(t)$, con frecuencia es necesario considerar una versión de $x(t)$ *desplazada en el tiempo*: si $t_1$ es un número real positivo, la señal $x(t - t_1)$ es $x(t)$ desplazada hacia la derecha por $t_1$ segundos, y $x(t + t_1)$ es $x(t)$ desplazada hacia la izquierda por $t_1$ segundos. Por ejemplo, si $x(t)$ es la función escalón unitario $u(t)$ y $t_1 = 2$, entonces $u(t - t_1)$ representa un desplazamiento de 2 segundos hacia la derecha de $u(t)$, y $u(t + t_1)$ representa el desplazamiento de 2 segundos hacia la izquierda de $u(t)$. Estas señales desplazadas aparecen en la figura 1.6. Para verificar que $u(t - 2)$ está representada por la gráfica de la figura 1.6a, evalúe $u(t - 2)$ para diversos valores de $t$. Por ejemplo, $u(t - 2) = u(-2) = 0$, cuando $t = 0$; $u(t - 2) = u(-1) = 0$, cuando $t = 1$; $u(t - 2) = u(0) = 1$, cuando $t = 2$, etcétera.

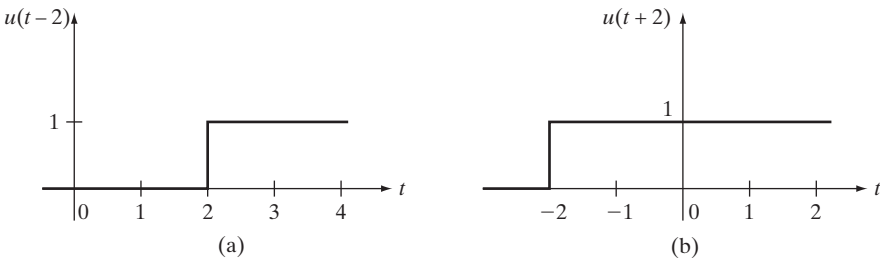



**FIGURA 1.6**
Desplazamientos de dos segundos para $u(t)$: (a) hacia la derecha; (b) hacia la izquierda.

Para cualquier número real positivo o negativo fijo $t_1$, el desplazamiento en el tiempo $K\delta(t - t_1)$ del impulso $K\delta(t)$ es igual al impulso con área $K$, ubicada en el punto $t = t_1$; en otras palabras,

$$K\delta(t - t_1) = 0, \quad t \neq t_1$$
$$\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1+\varepsilon} K\delta(\lambda - t_1)\, d\lambda = K, \quad \text{para cualquier } \varepsilon > 0$$

El impulso unitario desplazado en el tiempo $\delta(t - t_1)$ resulta útil para definir la *propiedad de desplazamiento* del impulso dado por

$$\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1+\varepsilon} f(\lambda)\delta(\lambda - t_1)\, d\lambda = f(t_1), \quad \text{para cualquier } \varepsilon > 0$$

donde $f(t)$ es cualquier función real, que sea continua en $t = t_1$ (enseguida definiremos la continuidad de una función). Para demostrar la propiedad de desplazamiento, primero observe que debido a que $\delta(\lambda - t_1) = 0$, para toda $\lambda \neq t_1$, se desprende que

$$f(\lambda)\delta(\lambda - t_1) = f(t_1)\delta(\lambda - t_1)$$

Así,

$$\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1+\varepsilon} f(\lambda)\delta(\lambda - t_1)\, d\lambda = f(t_1)\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1+\varepsilon} \delta(\lambda - t_1)\, d\lambda$$
$$= f(t_1)$$

lo que demuestra la propiedad de desplazamiento.

### 1.1.5 Señales continuas y parcialmente continuas en el tiempo

Se dice que una señal de tiempo continuo, $x(t)$, es *discontinua* en un punto fijo $t_1$ si $x(t_1^-) \neq x(t_1^+)$, donde $t_1 - t_1^-$ y $t_1^+ - t_1$ son números infinitesimales positivos. En términos generales, una señal $x(t)$ es discontinua en un punto $t_1$, si el valor de $x(t)$ "salta" mientras $t$ va hacia el punto $t_1$.

Una señal $x(t)$ es *continua* en el punto $t_1$ si $x(t_1^-) = x(t_1) = x(t_1^+)$. Si una señal $x(t)$ es continua en todos los puntos $t$, se dice que $x(t)$ es una *señal continua*. El lector debe observar que el término *continuo* se utiliza de dos maneras diferentes; es decir, existe la idea de una señal de tiempo continuo, y existe la idea de una señal de tiempo continuo que es continua (como una función de $t$). Este uso dual de *continuo*, debe ser claro según el contexto.

Muchas señales de tiempo continuo que son de interés en ingeniería son continuas; ejemplo de ello son las funciones rampa $Kr(t)$ y la sinusoide $x(t) = A\cos(\omega t + \theta)$. Otro ejemplo de una señal continua es la función pulso triangular que aparece en la figura 1.7. Como se indica en la figura, el pulso triangular es igual a $(2t/\tau) + 1$ para $-\tau/2 \leq t \leq 0$, y es igual a $(-2t/\tau) + 1$ para $0 \leq t \leq \tau/2$.

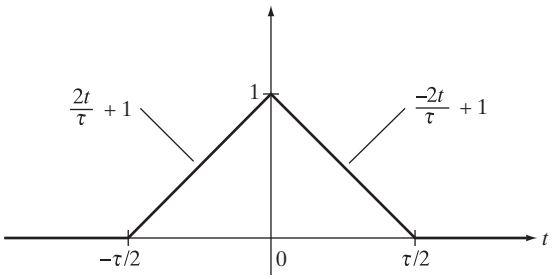



**FIGURA 1.7**
Función pulso triangular.

También hay muchas otras señales de tiempo continuo que son de interés en ingeniería, que no son continuas en todos los puntos $t$. Un ejemplo es la función escalón $Ku(t)$, la cual es discontinua en el punto $t = 0$ (suponiendo que $K \neq 0$). Otro ejemplo de señal que no es continua en cualquier parte, es la función pulso rectangular $p_\tau(t)$, definida como

$$p_\tau(t) = \begin{cases} 1, & \dfrac{-\tau}{2} \leq t < \dfrac{\tau}{2} \\ 0, & t < \dfrac{-\tau}{2}, t \geq \dfrac{\tau}{2} \end{cases}$$

Aquí, $\tau$ es un número positivo fijo igual a la duración del pulso. La función pulso rectangular $p_\tau(t)$, aparece en la figura 1.8. A partir de esta figura es obvio que $p_\tau(t)$ es continuo en todo $t$, excepto en $t = -\tau/2$ y en $t = \tau/2$.

Observe que $p_\tau(t)$ puede expresarse de la forma

$$p_\tau(t) = u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

También observe que la función pulso triangular que aparece en la figura 1.7, es igual a $(1 - 2|t|/\tau) \times p_\tau(t)$, donde $|t|$ es el valor absoluto de $t$, definido por $|t| = t$ cuando $t > 0$, $|t| = -t$ cuando $t < 0$.

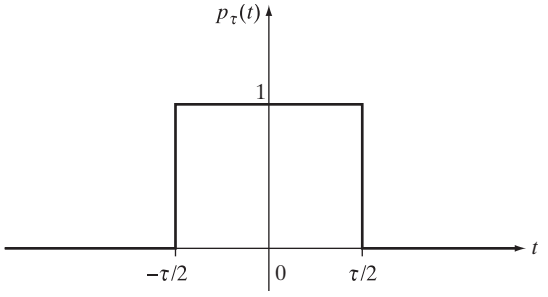



**FIGURA 1.8**
Función pulso rectangular.

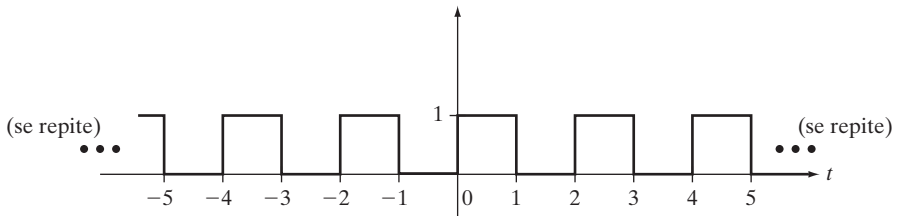



**FIGURA 1.9**
Señal que es discontinua en $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Se dice que una señal de tiempo continuo $x(t)$ es *parcialmente continua*, si es continua en toda $t$ excepto en una colección finita o contablemente infinita de puntos $t_i, i = 1, 2, 3, \ldots$. Ejemplos de funciones parcialmente continuas son la función escalón $Ku(t)$ y la función pulso rectangular $p_\tau(t)$. Otro ejemplo de una señal parcialmente continua es el tren de pulsos que muestra la figura 1.9. Esta señal es continua en todo $t$, excepto en $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Observe que el tren de pulsos es una señal periódica, con periodo fundamental igual a 2.

### 1.1.6 Derivada de una señal de tiempo continuo

Se dice que una señal de tiempo continuo $x(t)$ es *diferenciable* en un punto fijo $t_1$, si

$$\frac{x(t_1 + h) - x(t_1)}{h}$$

tiene un límite cuando $h \to 0$, independientemente de si $h$ se aproxima a cero por la derecha ($h > 0$) o por la izquierda ($h < 0$). Si el límite existe, $x(t)$ tiene una *derivada* en el punto $t_1$ definida por

$$\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=t_1} = \lim_{h \to 0} \frac{x(t_1 + h) - x(t_1)}{h}$$

A esta definición de derivada de $x(t)$ algunas veces se le denomina *derivada ordinaria* de $x(t)$.

Para que sea diferenciable en el punto $t_1$, es necesario (pero, en general no suficiente) que la señal $x(t)$ sea continua en $t_1$. Por lo tanto, las señales de tiempo continuo que no son continuas en todos los puntos no pueden ser diferenciables en todos los puntos. En particular, las señales parcialmente continuas no son diferenciables en todos los puntos. Sin embargo, las señales parcialmente continuas pueden tener una derivada, en un sentido generalizado. Suponga que $x(t)$ es diferenciable en todo $t$, excepto en $t = t_1$. Entonces, la *derivada generalizada* de $x(t)$ se define como

$$\frac{dx(t)}{dt} + [x(t_1^+) - x(t_1^-)]\delta(t - t_1)$$

donde $dx(t)/dt$ es la derivada ordinaria de $x(t)$ en todo $t$, excepto en $t = t_1$, y $\delta(t - t_1)$ es el impulso unitario centrado en el punto $t = t_1$. Así, la derivada generalizada de una señal, en un punto de discontinuidad $t_1$, es igual al impulso ubicado en $t_1$, y con un área igual a la cantidad de "saltos" de la función en el punto $t_1$.

Para ilustrar la ocurrencia del impulso cuando se toma una derivada generalizada, hagamos que $x(t)$ sea la función escalón $Ku(t)$. La derivada ordinaria de $Ku(t)$ es igual a cero en todo $t$, excepto en $t = 0$. Por lo tanto, la derivada generalizada de $Ku(t)$ es igual a

$$K[u(0^+) - u(0^-)]\delta(t - 0) = K\delta(t)$$

Para $K = 1$, se desprende que la derivada generalizada de la función escalón unitario $u(t)$ es igual al impulso unitario $\delta(t)$.

### 1.1.7 Cómo utilizar MATLAB® con señales de tiempo continuo

Una señal de tiempo continuo $x(t)$, dada por una expresión matemática puede definirse y desplegarse mediante MATLAB. Debido a que MATLAB se utiliza a lo largo de este libro, el lector debe familiarizarse con los comandos básicos, por lo que le invitamos a revisar el breve tutorial que está disponible en el sitio Web de este libro. Para mostrar su uso, considere la señal $x(t)$ dada por

$$x(t) = e^{-0.1t} \operatorname{sen} \tfrac{2}{3}t$$

Una gráfica de $x(t)$ contra $t$, para un intervalo de valores de $t$, puede generarse mediante MATLAB. Por ejemplo, para un intervalo $r$ entre 0 y 30 segundos, con incrementos de 0.1 segundos, los comandos de MATLAB para generar $x(t)$ son

```
t = 0:0.1:30;
x = exp(−.1*t).*sin(2/3*t);
plot(t,x)
axis([0 30 −1 1])
grid
xlabel('Time (sec)')
ylabel('x(t)')
```

En este programa, los valores de tiempo para los que $x$ se grafica, se almacenan como elementos en el vector `t`. Cada una de las expresiones `exp(−.1*t)` y `sin(2/3*t)` crea un vector con elementos iguales a los de la expresión evaluada en los valores de tiempo correspondientes. Los vectores resultantes deben multiplicarse, elemento por elemento, para definir el vector `x`. Como se ve en el comando `x = exp(−.1*t).*sin(2/3*t),` las operaciones elemento por elemento necesitan un punto antes del operador. Entonces, mediante el comando `plot(t,x)`, `x` se grafica contra `t`. El comando `axis` se utiliza para sobrescribir los valores predeterminados (por lo general, los predeterminados son aceptables, y este comando no se necesita). Es importante destacar que el uso del comando `axis` varía según la versión de MATLAB que se utilice.

La gráfica resultante de $x(t)$ aparece en la figura 1.10. Observe que la gráfica que genera MATLAB es en forma de caja, y los ejes son etiquetados como se muestra. El formato de la gráfica difiere de las que presentamos con anterioridad. En este libro, las gráficas que genera MATLAB siempre tendrán forma de caja, mientras que aquellas que no se generan con este software tendrán la forma utilizada previamente (como en la figura 1.9).

Es importante tomar en cuenta que, cuando generemos gráficas de señales de tiempo continuo con MATLAB, el incremento en el escalón de tiempo debe elegirse lo suficiente-

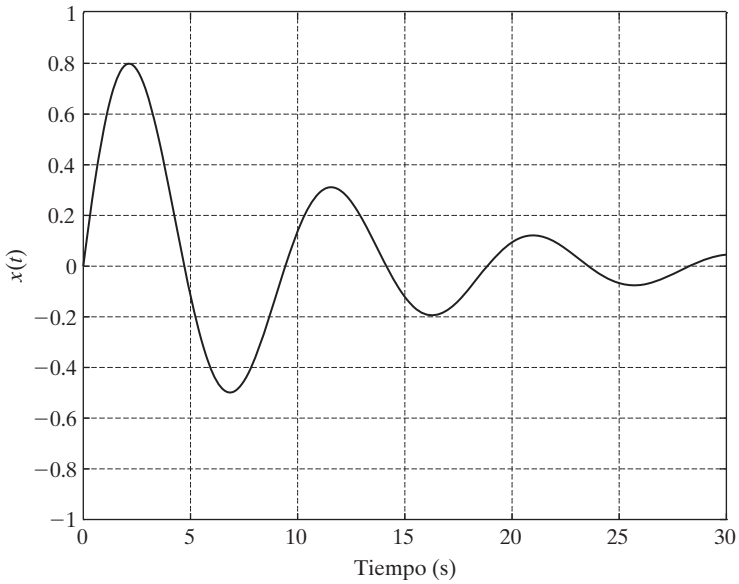



**FIGURA 1.10**
Gráfica en MATLAB para la señal $x(t) = e^{-0.1t}\,\text{sen}\,\frac{2}{3}t$.

mente pequeño para generar una gráfica suave. Si el incremento se elige demasiado grande (para una señal dada), entonces cuando los valores de la señal se conecten mediante líneas rectas (en la generación por computadora de la gráfica), el resultado será que la gráfica se verá dentada. Para ver este efecto, invitamos al lector a que ejecute de nuevo el programa anterior, utilizando un incremento de tiempo de 1 segundo para graficar $x(t) = e^{-0.1t}\,\text{sen}\,\frac{2}{3}t$. Para las gráficas de este libro descubrimos que al utilizar de 200 a 400 puntos por gráfica, daba como resultado un incremento lo suficientemente pequeño en el tiempo. Para mayor información sobre cómo seleccionar el incremento en el tiempo, vea el problema 1.2.

El programa que proporcionamos anteriormente, se encuentra almacenado como un "archivo M" (M-file) llamado `fig1_10.m`, y está disponible en el sitio Web http://users.ece.gatech.edu/~bonnie/book3/. Todos los archivos M que utilizamos en este libro, se incluyeron con un título que coincide con el número de figura o el número de ejemplo; esto es, `ex1_3.m` es el archivo M que contiene los comandos del ejemplo 1.3.

## 1.2 SEÑALES DE TIEMPO DISCRETO

Se dice que la variable de tiempo $t$ es una *variable de tiempo discreto*, si $t$ sólo toma los *valores discretos* $t = t_n$ para algún intervalo de valores enteros de $n$. Por ejemplo, $t$ podría tomar los valores enteros $t = 0, 1, 2, \ldots$; es decir, $t = t_n = n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Una señal de tiempo discreto es una señal que es una función de la variable de tiempo discreto $t_n$; en otras palabras, una señal de tiempo discreto tiene valores (está definida) sólo en los puntos de tiempo discreto $t = t_n$, donde $n$ toma sólo valores enteros. Las señales de tiempo discreto surgen en muchas áreas de la ingeniería, ciencia y economía. En aplicaciones a la economía, la variable discreta en el tiempo $t_n$ puede ser el día, mes, trimestre, o año de un periodo específico. En esta sección proporcionamos un ejemplo en el que la variable discreta en el tiempo es el día en el que se especifica el precio de cierre de un fondo índice.

En este libro, una señal de tiempo discreto, definida en los puntos de tiempo $t = t_n$, se denotará como $x[n]$. Observe que en la notación "$x[n]$", la variable entera $n$ corresponde a los instantes $t_n$. También observe que los corchetes se utilizan para denotar una señal de tiempo discreto $x[n]$, en contraste con la señal de tiempo continuo $x(t)$, la cual se denota con paréntesis. La gráfica de una señal de tiempo discreto $x[n]$ siempre estará en términos de los valores de $x[n]$ contra la variable de tiempo entera $n$. Los valores de $x[n]$ con frecuencia se indican en la gráfica mediante círculos rellenos, con líneas verticales que conectan a dichos círculos con el eje de tiempo. Esto da como resultado una *gráfica de tallo*, la cual es una forma común de desplegar señales de tiempo discreto. Por ejemplo, suponga que la señal de tiempo discreto $x[n]$ está dada por

$$x[0] = 1, x[1] = 2, x[2] = 1, x[3] = 0, x[4] = -1$$

con $x[n] = 0$ para cualquier otro $n$. Entonces, la gráfica de tallo de $x[n]$ es la que aparece en la figura 1.11. Una gráfica de esta señal puede generarse mediante los comandos de MATLAB

```
n = −2:6;
x = [0 0 1 2 1 0 −1 0 0];
stem (n,x,'filled');
xlabel ('n')
ylabel ('x[n]')
```

La gráfica de $x[n]$, generada por MATLAB, aparece en la figura 1.12. Nuevamente observe que la gráfica MATLAB tiene forma de caja, a diferencia del formato de la gráfica que se aprecia en la figura 1.11. Al igual que en el caso de tiempo continuo, las graficas de MATLAB siempre se despliegan en forma de caja. Las gráficas de señales de tiempo discreto no generadas con MATLAB tendrán la apariencia de la figura 1.11.

### 1.2.1 Muestreo

Una de las formas más comunes en las que surgen señales de tiempo discreto es muestreando señales de tiempo continuo. Como muestra la figura 1.13, suponga que una señal de tiempo continuo $x(t)$ se aplica a un interruptor electrónico que se cierra brevemente cada $T$ segundos. Si el lapso durante el cual el interruptor se cierra es mucho más pequeño que $T$, la salida

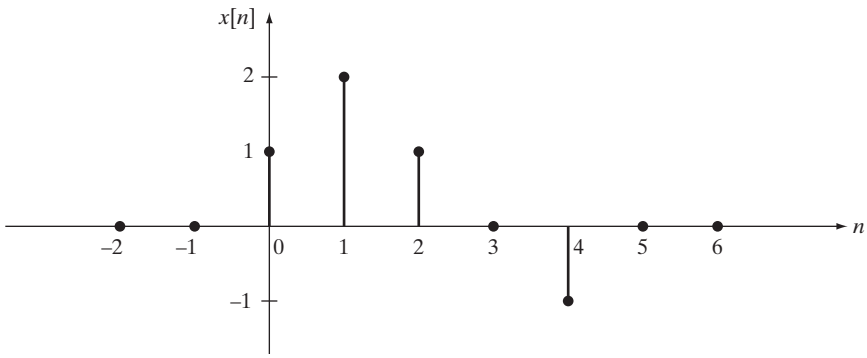



**FIGURA 1.11**
Gráfica de tallo de una señal de tiempo discreto.

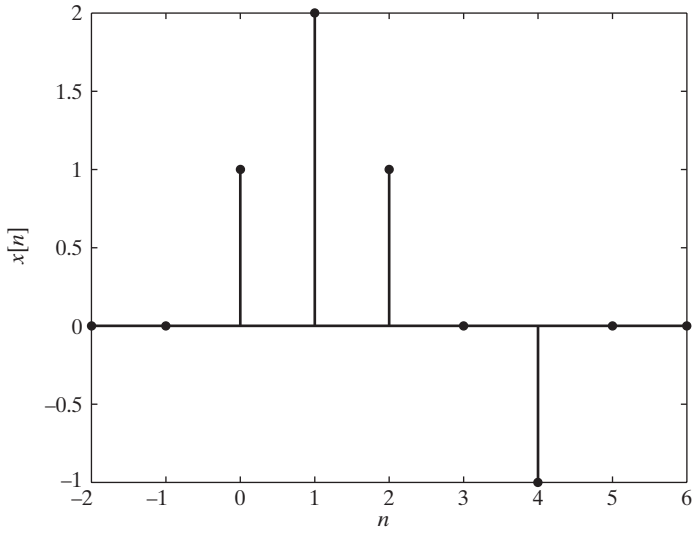



**FIGURA 1.12**
Gráfica en MATLAB de $x[n]$.

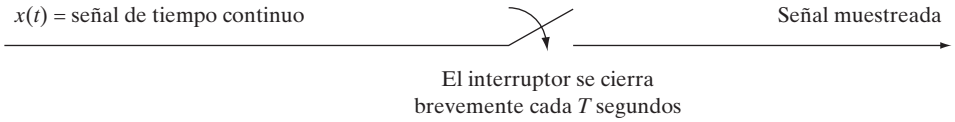



**FIGURA 1.13**
Proceso de muestreo.

del interruptor puede considerarse como una señal de tiempo discreto, que es una función de los puntos de tiempo discreto $t_n = nT$, donde $n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$. La señal de tiempo discreto resultante se conoce como *versión muestreada* de la señal continua original $x(t)$, y a $T$ se le conoce como *periodo de muestreo*. Debido a que la duración T entre instantes adyacentes de muestreo $t_n = nT$ y $t_{n+1} = (n + 1)T$ es igual a una constante, el proceso de muestreo bajo estas consideraciones se conoce como *muestreo uniforme*. El *muestreo no uniforme* se utiliza en algunas aplicaciones, pero no lo consideramos en este libro.

Para ser consistentes con la notación que presentamos anteriormente para las señales de tiempo discreto, la señal de tiempo discreto resultante de la operación de muestreo uniforme que mostramos en la figura 1.13 será denotada por $x[n]$. Observe que en este caso, la variable entera $n$ denota el instante $nT$. Por definición del proceso de muestreo, el valor de $x[n]$ para cualquier valor entero de $n$ está dado por

$$x[n] = x(t)|_{t=nT} = x(nT)$$

Una amplia gama de señales de tiempo discreto puede generarse mediante el muestreo de señales de tiempo continuo. Por ejemplo, si la señal de tiempo continuo $x(t)$ que ilustra la figura 1.10 es muestreada con $T = 1$, el resultado es la señal de tiempo discreto $x[n]$ que ilustra la figura 1.14. Esta gráfica puede obtenerse ejecutando el programa que generó la figura 1.10, en donde el incremento en el tiempo es de 1 segundo, y el comando `plot(t,x)` se reemplaza por `stem(t,x,'filled')`.

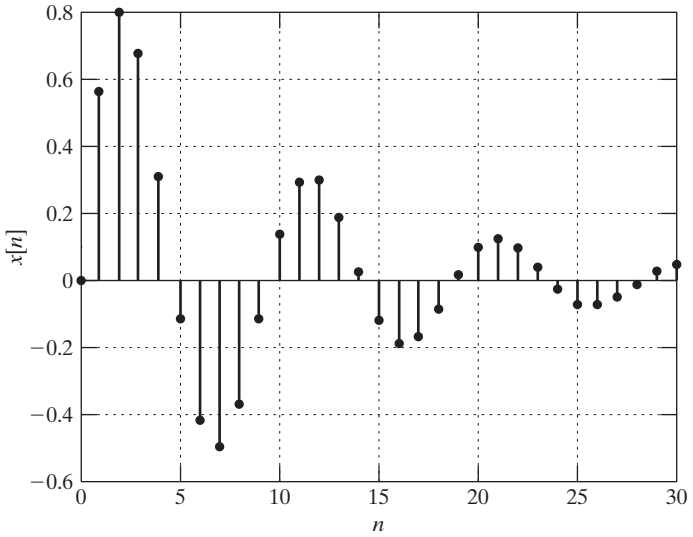



**FIGURA 1.14**
Señal de tiempo continuo muestreada.

### 1.2.2 Funciones escalón y rampa

Dos ejemplos sencillos de señales de tiempo discreto son las funciones escalón unitario $u[n]$ y rampa unitaria $r[n]$, las cuales se definen como

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, \ldots \\ 0, & n = -1, -2, \ldots \end{cases}$$

$$r[n] = \begin{cases} n, & n = 0, 1, \ldots \\ 0, & n = -1, -2, \ldots \end{cases}$$

Estas dos señales de tiempo discreto aparecen graficadas en la figura 1.15.

La función de tiempo discreto escalón unitario $u[n]$ puede obtenerse muestreando la función de tiempo continuo escalón unitario $u(t)$. Si la función rampa unitaria $r(t) = tu(t)$ se

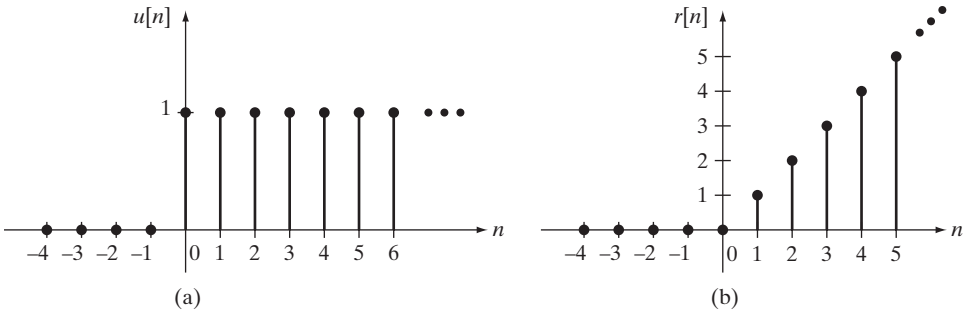



**FIGURA 1.15**
Funciones de tiempo discreto (a) escalón unitario y (b) rampa unitaria.

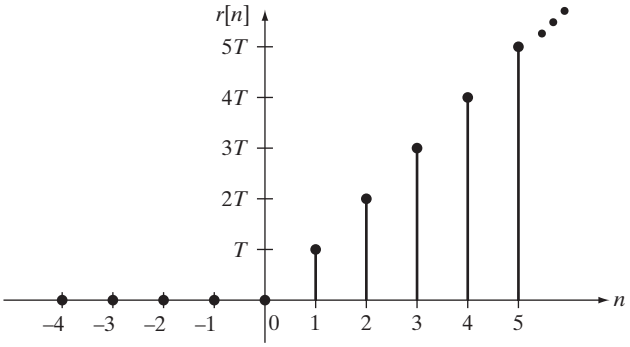



**FIGURA 1.16**
Función de tiempo discreto rampa.

muestrea, el resultado es la función de tiempo discreto rampa $r[n]$, dada por

$$r[n] = r(t)|_{t=nT} = r(nT)$$

La señal de tiempo discreto $r[n]$ se encuentra graficada en la figura 1.16. Observe que aunque las señales de tiempo discreto de las figuras 1.15b y 1.16 están expresadas con la misma notación $r[n]$, estas dos señales no son las mismas, a menos que el periodo de muestreo $T$ sea igual a 1. Para distinguir estas dos señales, podríamos denotar a la que está graficada en la figura 1.16 como $r_T[n]$, pero la convención estándar (que es la que seguimos aquí) no es para mostrar la dependencia sobre $T$ en la notación para la señal muestreada.

### 1.2.3 Pulso unitario

Primero debemos observar que no existe una versión muestreada del impulso unitario $\delta(t)$, debido a que $\delta(0)$ no está definido. Sin embargo, existe una señal de tiempo discreto que es la contraparte discreta del impulso unitario. Ésta es la *función pulso unitario* $\delta[n]$, definida como

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

En la figura 1.17 aparece la gráfica de la función pulso unitario. Es necesario resaltar que $\delta[n]$ no es una versión muestreada del impulso unitario $\delta(t)$.

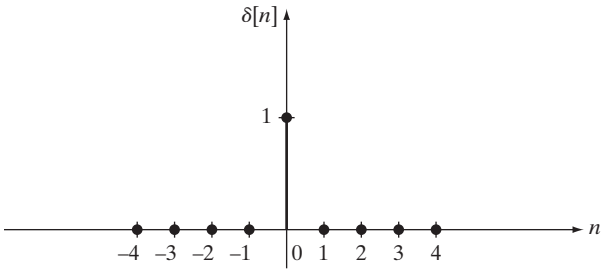



**FIGURA 1.17**
Función pulso unitario.

### 1.2.4 Señales de tiempo discreto periódicas

Una señal de tiempo discreto $x[n]$ es periódica si existe un entero positivo $r$, tal que

$$x[n + r] = x[n] \quad \text{para todos los enteros } n$$

Así, $x[n]$ es periódica si y sólo si existe un entero positivo $r$, tal que $x[n]$ se repita a sí misma a cada instante $r$, donde $r$ se conoce como *periodo*. El periodo fundamental es el valor más pequeño de $r$, para el que la señal se repite

Por ejemplo, revisemos la periodicidad de una sinusoide de tiempo discreto, dada por

$$x[n] = A\cos(\Omega n + \theta)$$

donde $\Omega$ es la "frecuencia de tiempo discreto" en radianes por unidad de tiempo $T$, y $\theta$ es la fase en radianes. La señal es periódica con periodo $r$, si

$$A\cos[\Omega(n + r) + \theta] = A\cos(\Omega n + \theta)$$

Recuerde que la función coseno se repite cada $2\pi$ radianes, por lo que

$$A\cos(\Omega n + \theta) = A\cos(\Omega n + 2\pi q + \theta)$$

para todos los enteros $q$. Por lo tanto, la señal $A\cos(\Omega n + \theta)$ es periódica si y sólo si existe un entero positivo $r$, tal que $\Omega r = 2\pi q$ para algún entero $q$; o de manera equivalente, que la frecuencia de tiempo discreto $\Omega$ sea tal que $\Omega = 2\pi q/r$ para algunos enteros positivos $q$ y $r$. El periodo fundamental es el valor entero de $r$ más pequeño tal que $\Omega = 2\pi q/r$.

La sinusoide de tiempo discreto $x[n] = A\cos(\Omega n + \theta)$ se encuentra graficada en la figura 1.18, con $A = 1$ y con dos diferentes valores de $\Omega$. Para el caso en que $\Omega = \pi/3$ *y* $\theta = 0$, el cual está graficado en la figura 1.18a, la señal es periódica debido a que $\Omega = 2\pi q/r$ con $q = 1$

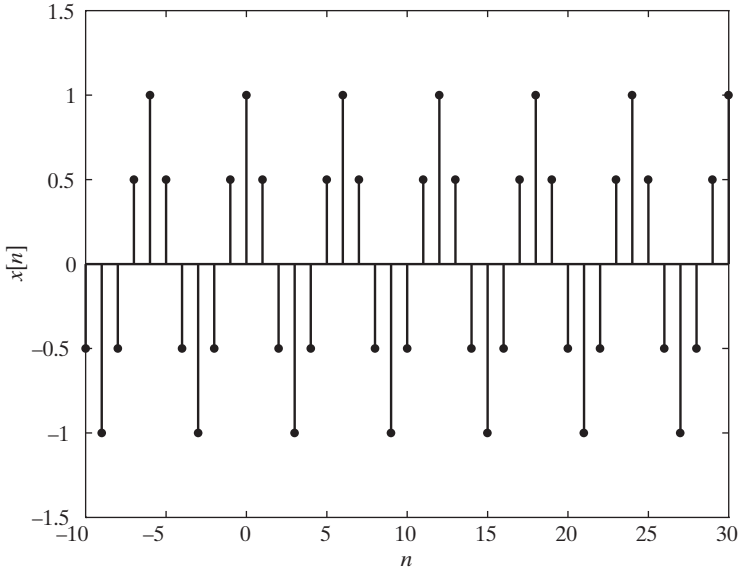



**FIGURA 1.18a**
Sinusoide de tiempo discreto con $\Omega = \pi/3$ y $\theta = 0$.

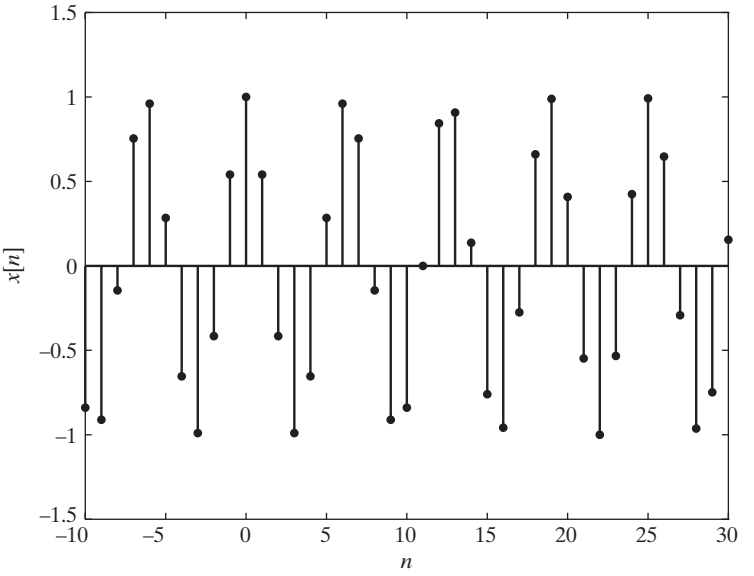



**FIGURA 1.18b**
Sinusoide de tiempo discreto con $\Omega = 1$ y $\theta = 0$.

y $r = 6$, y el periodo fundamental es igual a 6. El caso en que $\Omega = 1$ y $\theta = 0$, se encuentra graficado en la figura 1.18b. Observe que en este caso la envolvente de la señal es periódica, pero la señal por sí misma no lo es, ya que $1 \neq 2\pi q/r$ para cualquier entero positivo $q$ y $r$.

### 1.2.5 Pulso de tiempo discreto rectangular

Sea $L$ un entero positivo impar. Un ejemplo importante de una señal de tiempo discreto es la *función pulso de tiempo discreto rectangular* $p_L[n]$ de longitud $L$, definida por

$$p_L[n] = \begin{cases} 1, & n = -(L-1)/2, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, (L-1)/2 \\ 0, & \text{todos los demás de } n \end{cases}$$

La figura 1.19 muestra el pulso de tiempo discreto rectangular.

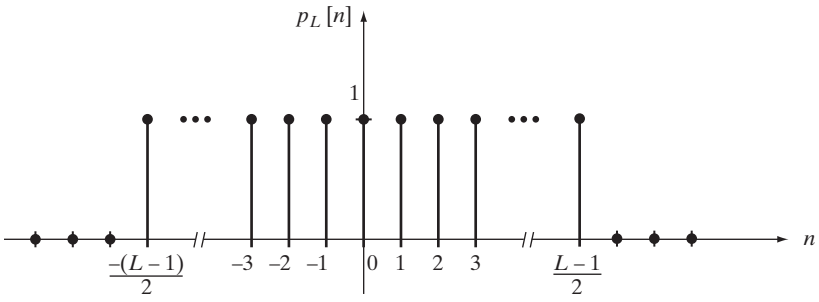



**FIGURA 1.19**
Pulso de tiempo discreto rectangular.

### 1.2.6 Señales digitales

Sea $\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ un conjunto de $N$ números reales. Una *señal digital* $x[n]$ es una señal de tiempo discreto cuyos valores pertenecen al conjunto finito $\{a_1, a_2, ..., a_N\}$; es decir, en cada instante $t_n$, $x(t_n) = x[n] = a_i$ para algún $i$, donde $1 \leq i \leq N$. Por lo que una señal digital sólo puede tener un número finito de valores diferentes.

Una señal continua muestreada no necesariamente es una señal digital. Por ejemplo, la función rampa unitaria muestreada $r[n]$, que aparece en la figura 1.16, no es una señal digital, ya que $r[n]$ toma un intervalo infinito de valores, cuando $n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$.

Una *señal binaria* es una señal digital cuyos valores son iguales a 1 o a 0; es decir, $x[n] = 0$ o 1 para $n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$. Las funciones escalón unitario y pulso unitario son ejemplos de señales binarias.

### 1.2.7 Señales desplazadas en el tiempo

Dada una señal discreta $x[n]$ y un entero positivo $q$, la señal de tiempo discreto $x[n - q]$ es el desplazamiento de $q$ pasos por la derecha de $x[n]$, y $x[n + q]$ es el desplazamiento de $q$ pasos por la izquierda de $x[n]$. Por ejemplo, $p_3[n - 2]$ es el desplazamiento de 2 posiciones a la derecha del pulso rectangular de tiempo discreto $p_3[n]$, y $p_3[n + 2]$ es el desplazamiento de 2 posiciones a la izquierda de $p_3[n]$. La figura 1.20 muestra las gráficas de las señales desplazadas.

### 1.2.8 Cómo descargar de la Web información de tiempo discreto

Existe un gran número de sitios en la Web que contienen información sobre señales de tiempo discreto (con frecuencia conocidas como series de tiempo) que surgen en los campos de la ingeniería, ciencia y economía. Éste es en especial el caso de la economía, ya que existen muchos sitios que contienen una gran variedad de información económica, como cifras mensuales sobre empleo, ventas de viviendas, tasas de interés, precios diarios de consumibles (por ejemplo, aceite, gas, oro, plata, trigo, soya, etcétera), y precios diarios de acciones. La información por lo general se presenta en forma de tabla, donde la primera columna contiene puntos en el tiempo, día por día, semana por semana, mes por mes, etcétera, y las demás columnas contienen la información correspondiente a los diferentes puntos en el tiempo.

En muchos casos, la información contenida en las series de tiempo de los sitios Web, puede descargarse en la computadora y almacenarse en un archivo. Si la computadora tiene instalado software de hojas de cálculo, el archivo puede entonces abrirse y guardarse con dicho software. De muchos sitios Web, la información puede descargarse directamente en una hoja de cálculo. Si el software de hojas de cálculo puede guardar la información en un archivo

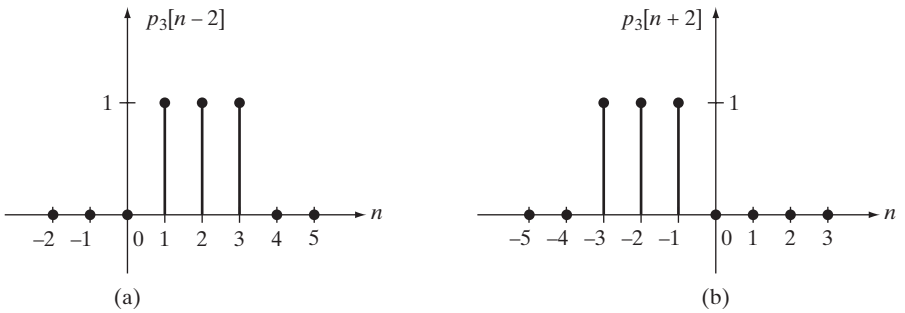



**FIGURA 1.20**
Desplazamientos de dos posiciones de $p_3[n]$: (a) desplazamiento por la derecha; (b) desplazamiento por la izquierda.

con formato csv (valor separado por comas), MATLAB estará preparado para leer el archivo, en cuyo caso será posible aplicar a la información diversas técnicas de análisis. Más adelante explicaremos el proceso para descargar series de datos en una hoja de cálculo. El software de hojas de cálculo que utilizamos para esto es Microsoft Excel.

El desarrollo que presentamos aquí se enfoca en la descarga de información histórica sobre precios para QQQQ, que es un fondo índice, cuyo valor da seguimiento al precio de las acciones de 100 empresas que tienen acciones negociadas en la Bolsa de Valores Nasdaq. Para obtener una lista de las 100 empresas y otra información relacionada con QQQQ; sólo escriba "QQQQ" en una máquina de búsqueda, y aparecerán una multitud de sitios.

El fondo índice QQQQ puede negociarse a lo largo de cualquier día hábil, como una acción ordinaria, por lo que tiene un precio de apertura (el precio a las 9:30 a.m., hora del Este de Estados Unidos), un precio máximo del día, un precio mínimo del día, y un precio diario de cierre (el precio a las 4:00 p.m., hora del Este de Estados Unidos). La información histórica de precios para QQQQ y otras acciones puede descargarse directamente en una hoja de cálculo desde muchos sitios Web. Aquí utilizaremos el sitio Web de Yahoo!

El precio diario de QQQQ es un ejemplo interesante de una señal de tiempo discreto o serie de tiempo, que puede analizarse mediante varias técnicas matemáticas, incluyendo las desarrolladas en este libro. Esto se ilustra hasta cierto punto en la sección 1.5 y en otros capítulos del libro. Por supuesto, la información sobre los precios de QQQQ es un ejemplo de *series de datos financieros*, no de *series de tiempo en ingeniería*. Sin embargo, creemos que este tipo de señal es adecuado para estudiarla como ejemplo en un libro de texto que está dirigido básicamente a la profesión de ingeniería. Es probable que muchos ingenieros inviertan en el mercado de acciones, por lo que tener una idea de cómo aplicar el análisis técnico a la información de precios de acciones puede ser útil para tomar decisiones de inversión. Además, algunos de los métodos que pueden aplicarse al análisis de precios de acciones también pueden aplicarse a las señales de ingeniería, las cuales se caracterizan por tener una buena cantidad de ruido (que es el mismo caso de la información de precios de acciones).

Para descargar la información de precios de QQQQ, primero vaya al sitio http://espanol.finance.yahoo.com. Cerca de la parte superior de la página Web, escriba el símbolo QQQQ, haga un clic en "IR", y después en la columna izquierda que aparece en la página, haga clic en "Precios Históricos". La tabla que aparece en la pantalla de su computadora despliega el precio de apertura, que en la tabla aparece como Por Pagar, Máximo, Mínimo, Volumen, y Cierre Ajustado de QQQQ para cada día, durante un periodo de varios años. La primera línea de datos de la tabla es el precio más reciente de QQQQ, y la última línea es el precio correspondiente a la primera fecha del periodo desplegado. Para ver los precios históricos de QQQQ de un periodo diferente, escriba las Fecha de Inicio y Fecha Final deseadas, y después haga clic en "Obtené Precios". Para obtener información de una acción diferente, escriba el símbolo en la página Web en la casilla que se encuentra del lado derecho "Obtener Precios Históricos para:", y después haga clic en "IR". Una vez que tenemos la información de una acción específica para el periodo deseado, podemos descargarla haciendo clic en "Descargar la hoja de cálculo", ubicada al final de la página. A continuación presentamos un ejemplo que ilustra este procedimiento

---

**Ejemplo 1.2 Cómo descargar información de la Web**

Suponga que el objetivo es descargar el precio de cierre de QQQQ para el periodo de 10 días hábiles del 1 de marzo de 2004, al 12 de marzo del mismo año. Para lograrlo, siga los pasos que describimos anteriormente, y después escriba como Fecha de Inicio el 1 de marzo de 2004, y como Fecha Final el 12 de marzo de ese año. Después haga clic en "Obtené Precios", y la tabla de datos

| Date | Open | High | Low | Close | Volume | Adj. Close* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 12-Mar-04 | 35.18 | 35.59 | 35.15 | 35.51 | 1.18E + 08 | 35.17 |
| 11-Mar-04 | 35.07 | 35.53 | 34.8 | 34.87 | 1.52E + 08 | 34.54 |
| 10-Mar-04 | 35.75 | 36 | 35.13 | 35.19 | 1.34E + 08 | 34.86 |
| 9-Mar-04 | 35.81 | 35.98 | 35.52 | 35.66 | 1.26E + 08 | 35.32 |
| 8-Mar-04 | 36.69 | 36.82 | 35.73 | 35.77 | 1.13E + 08 | 35.43 |
| 5-Mar-04 | 36.42 | 37.15 | 36.36 | 36.63 | 1.18E + 08 | 36.28 |
| 4-Mar-04 | 36.44 | 36.83 | 36.39 | 36.76 | 65905600 | 36.41 |
| 3-Mar-04 | 36.51 | 36.63 | 36.21 | 36.42 | 83938304 | 36.07 |
| 2-Mar-04 | 36.98 | 37.18 | 36.61 | 36.62 | 91536000 | 36.27 |
| 1-Mar-04 | 36.68 | 37.07 | 36.47 | 37.05 | 79700704 | 36.7 |

**FIGURA 1.21**
Copia de hoja de cálculo de Excel.

aparecerá en su pantalla. Haga un clic en "Descargar a hoja de cálculo". La figura 1.21 muestra una copia de la hoja de cálculo resultante. La información que aparece en esta figura se reprodujo con la autorización de Yahoo! Inc.,© 2005 por Yahoo! Inc. YAHOO! y YAHOO! logo son marcas registradas de Yahoo! Inc.

Observe que la hoja de cálculo de la figura 1.21 consta de 11 filas y 7 columnas. La primera fila y la primera columna contienen texto (no datos), lo que MATLAB no puede leer. MATLAB numera la primera fila como fila 0, y la primera columna como columna 0. Entonces, los datos de la tabla se ubican en las filas 1 a 10 y en las columnas 1 a 6. El valor de un dato de la tabla se denota con el par (F,C), donde F es la fila y C la columna que contiene el valor. Por ejemplo, (1,1) es el valor de la esquina superior izquierda de la tabla, cuyo valor es 35.18, y (10,6) es el valor de la esquina inferior derecha, cuyo valor es 36.7.

---

Una vez que descargamos los datos en Excel, es necesario invertir el orden de los datos para que la primera fecha aparezca primero en la tabla. Logramos esto haciendo clic con el botón izquierdo del ratón en la esquina superior izquierda de la hoja de cálculo, para resaltar toda la tabla; después hacemos clic en el botón "Orden ascendente" de la barra de herramientas. Esto invertirá el orden de la información, para que la primera línea de datos sea ahora el precio correspondiente al primer día de nuestro rango de interés. Posteriormente hacemos clic con el botón izquierdo del ratón sobre un punto ubicado fuera de la tabla, y desaparecerá el resaltado. Ahora podemos guardar la información en formato "csv" con el nombre de archivo deseado, como datosQQQQ.csv. No olvide añadir la extensión "csv" al nombre de archivo. Guarde el archivo en un subdirectorio que pertenezca al directorio que contiene la versión estudiantil de MATLAB, o en un directorio en la ruta de búsqueda de MATLAB.

Cuando se abre MATLAB, toda o parte de la información del archivo puede leerse, mediante el comando `csvread('filename', R1,C1,[R1 C1 R2 C2])`, donde `(R1, C1)` representa la esquina superior izquierda, y `(R2, C2)` a la esquina inferior derecha de la porción de los datos que se leerán con MATLAB.

---

### Ejemplo 1.3 Cómo importar datos en MATLAB

Para la hoja de cálculo que creamos en el ejemplo 1.2, reordene la información como le indicamos con anterioridad. Haga clic en "Guardar como", y escriba en el nombre del archivo datosQQQQ1.csv. Guarde este archivo en su subdirectorio MATLAB, y responda "sí" cuando se le pregunte si desea mantener este formato. Los precios de cierre de QQQQ pueden entonces leerse con MATLAB mediante el comando `csvread('datosQQQQ1.csv', 1, 4,[1 4 10 4])`,

*Precio cierre ajustado para dividendos y splits.

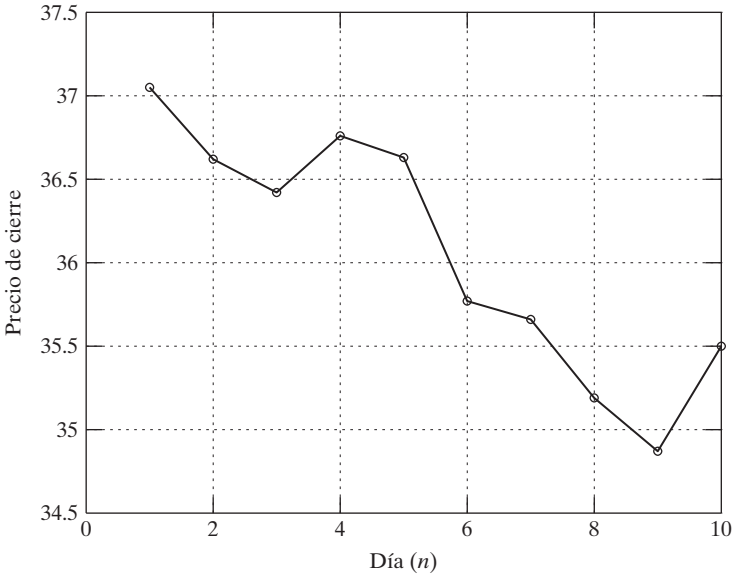



**FIGURA 1.22**
Precio de cierre de QQQQ del 01/03/04 al 12/03/04.

el cual genera un vector columna `c`, que contiene los precios de cierre de QQQQ. Observe que el número `4` aparece, debido a que estamos leyendo la cuarta columna de la tabla que contiene los datos numéricos. Para verificar que este proceso funciona, una vez creado el archivo datosQQQQ1.csv, ejecute los siguientes comandos de MATLAB:

```
c=csvread('datosQQQQ1.csv',1,4,[1 4 10 4]);
n=1:10;
plot(n,c(n),n,c(n),'o')
grid
xlabel('Day (n)')
ylabel('Closing Price')
```

La gráfica resultante aparece en la figura 1.22, la cual despliega el precio de cierre de QQQQ durante un periodo de 10 días. Observe que el valor de la gráfica en $n = 1$ es el precio de cierre del 1 de marzo de 2004, y el valor de $n = 10$ es el precio de cierre del 12 de marzo de 2004. También observe que no estamos utilizando el comando stem para graficar los valores. En su lugar, graficamos los puntos con círculos sin rellenar y líneas que conectan los valores. La razón para hacerlo así es que nos interesa ver la tendencia de los precios de cierre, y es mucho más notoria con líneas que conectan los valores que con una gráfica de tallo.

## 1.3 SISTEMAS

Un sistema es una colección de uno o más dispositivos, procesos o algoritmos implementados por computadora, que operan sobre una señal de entrada $x$ para producir una señal de salida $y$. Cuando la entrada y la salida son señales continuas en el tiempo, $x(t)$ y $y(t)$, se dice que el sistema es un *sistema de tiempo continuo* o *sistema analógico*. Cuando las señales de entrada y salida son discretas, $x[n]$ y $y[n]$, se dice que se trata de un *sistema de tiempo discreto*.

Algunos ejemplos comunes de sistemas que consisten en dispositivos físicos o procesos son los siguientes:

1. Un circuito eléctrico con entradas iguales a voltajes y/o corrientes y con salidas iguales a voltajes y/o corrientes en diversos puntos del circuito.
2. Un sistema de comunicaciones con entradas iguales a las señales por transmitirse y con salidas iguales a las señales recibidas.
3. Un sistema biológico, como el corazón humano, con entradas iguales al estímulo eléctrico aplicado al músculo cardiaco y con salidas iguales a la velocidad de flujo de la sangre a través del corazón.
4. Un manipulador robótico con entradas iguales a las torcas aplicadas a las uniones del robot y con salidas iguales a la posición del manipulador final (mano).
5. Una refinería petrolera, con una entrada igual a la velocidad de flujo de petróleo y con salida igual a la velocidad de flujo de gasolina.
6. Un sistema de manufactura, con entradas iguales a la velocidad de flujo de materias primas, y con salidas iguales a la velocidad de producción de productos terminados.

Además de los ejemplos de sistemas antes mencionados, existen diversos tipos de sistemas que procesan señales (conocidos como *procesadores de señales*), los cuales operan sobre una señal de entrada, para producir una señal de salida deseada. Un ejemplo común de procesador de señales es un *filtro*, que es diseñado para eliminar componentes sinusoidales, cuyas frecuencias se encuentran en cierto rango, o para remover el ruido que puede estar presente en una señal. Para introducir el proceso de eliminación de ruido, suponga que una señal $x(t)$ puede expresarse de la siguiente manera

$$x(t) = s(t) + e(t) \tag{1.4}$$

donde $s(t)$ es la *parte suave* de la señal $x(t)$ y $e(t)$ es la *parte ruidosa* o *errática*. Muchas señales que surgen con ruido en aplicaciones, pueden expresarse de la forma aditiva (1.4). Por ejemplo, suponga que $x(t)$ es la medición de la distancia (por ejemplo, rango) desde algún objetivo hasta una antena de radar. Debido a que la energía reflejada desde un objetivo es muy pequeña, las mediciones de radar sobre su posición siempre son ruidosas y por lo general inmersas en el "ruido de fondo". En este caso, la medición $x(t)$ puede expresarse en la forma (1.4), donde $e(t)$ es el ruido de fondo y $s(t)$ es la verdadera distancia entre el objetivo y la antena del radar.

Dada una señal de entrada $x(t)$ con la forma (1.4), el objetivo de un filtro es eliminar $e(t)$ y dejar pasar $s(t)$, para que la salida del filtro $y(t)$ sea igual a $s(t)$. En la práctica, es raro que esto pueda hacerse, aunque es posible diseñar un filtro para que $y(t)$ sea "parecida" a $s(t)$. En la siguiente sección consideraremos un tipo específico de filtro, y en otros capítulos del libro estudiaremos con más profundidad el filtrado.

Los procesadores de señales con frecuencia se utilizan no sólo para filtrar, sino para determinar la información contenida en una señal. En general, éste no es un problema sencillo; en particular, conocer la forma funcional o los valores de muestra de una señal no revela directamente (en general) la información que lleva la señal. Un ejemplo interesante es la extracción de información que contiene una señal de voz. Por ejemplo, no es una cuestión trivial el desarrollar un esquema de procesamiento de voz capaz de identificar a la persona que está hablando a partir de un segmento de diálogo. Por supuesto, para poder identificar correctamente al parlante, el procesador de voz debe tener almacenados en su memoria los

"patrones de voz" de una serie de personas, uno de los cuales corresponde al parlante. La pregunta aquí es, ¿cuál es un patrón de voz adecuado? En otras palabras, ¿qué es exactamente lo que distingue a una voz de otras? Una manera de responder a esto es considerar la caracterización de las señales de voz en términos de sus espectros de frecuencias. En los capítulos 3 a 5 estudiamos el concepto de espectro de frecuencia de una señal.

La extracción de información a partir de señales también es de gran importancia en el campo médico, en el procesamiento de señales bioeléctricas. Por ejemplo, un problema importante es determinar la salud del corazón de una persona a partir de la información contenida en una colección de señales de un electrocardiograma (ECG), tomadas de la superficie de los electrodos colocados en la persona. Un objetivo específico es poder detectar si existe algún daño cardiaco que pueda ser el resultado de una enfermedad de la arteria coronaria o de un estado prolongado de hipertensión. Un médico capacitado puede detectar enfermedades cardiacas "leyendo" las señales de un ECG, pero debido a la complejidad de estas señales, quizás un "procesador humano" no pueda extraer toda la información contenida en estas señales. Ésta es un área donde las técnicas de procesamiento de señales pueden aplicarse; de hecho, ha habido progresos en el desarrollo de esquemas automatizados de procesamiento para señales bioeléctricas.

Para llevar a cabo un estudio minucioso de un sistema, como uno de los mencionados en los ejemplos anteriores, resulta muy útil tener un *modelo matemático* del sistema. Un modelo matemático consiste en una colección de ecuaciones que describen las relaciones entre las señales que aparecen en el sistema. En muchos casos, las ecuaciones pueden determinarse a partir de principios físicos, como las leyes de movimiento de Newton para un sistema mecánico. En el capítulo 2, abarcamos esto de alguna manera. Otro método para modelar, conocido como identificación de sistemas, es deducir funciones matemáticas que relacionen un conjunto muestra de datos de entrada, y el conjunto de datos de salida correspondiente. Dejaremos la identificación de sistemas basada en la entrada y salida de datos para estudios más avanzados de señales y sistemas, por lo que no la consideraremos en este libro.

Un modelo matemático de un sistema es, por lo general, una representación idealizada del sistema. En otras palabras, muchos sistemas (físicos) del mundo real no pueden describirse con exactitud mediante un modelo matemático, ya que se deben hacer muchas suposiciones para obtener las ecuaciones del sistema. Sin embargo, puede generarse un modelo matemático lo suficientemente preciso para que el comportamiento y las propiedades del sistema se puedan estudiar en términos del modelo. Los modelos matemáticos también son muy útiles para diseñar nuevos sistemas que tengan diversas características deseables de operación: por ejemplo, en el diseño de "controladores", cuyo propósito es modificar el comportamiento de un sistema para lograr ciertos objetivos de rendimiento. Así, los modelos matemáticos se utilizan ampliamente, tanto en el análisis como en el diseño de sistemas.

Si el modelo de un sistema va a ser útil, debe ser manejable y, por lo tanto, se debe hacer siempre un esfuerzo para construir el modelo más sencillo posible del sistema bajo estudio. Pero el modelo también debe ser lo suficientemente exacto, lo que significa que las características principales (todos los efectos de primer orden) deben incluirse en el modelo. Por lo general, entre más características se incluyan en el modelo, éste resultará más complicado, por lo que hay un compromiso mutuo entre su simplicidad y su exactitud.

Existen dos tipos básicos de modelos matemáticos: representaciones de entrada/salida, que describen la relación entre las señales de entrada y salida de un sistema, y el estado o modelo interno que describe la relación entre las señales de entrada, de estado y de salida de un sistema. En los primeros 10 capítulos estudiaremos las representaciones de entrada/salida; y en el capítulo 11 consideraremos el modelo de estado.

En este libro estudiaremos cuatro tipos de representaciones de entrada/salida:

1. El modelo de convolución
2. La ecuación en diferencias o ecuación diferencial de entrada/salida
3. La representación de la transformada de Fourier
4. La representación de la función de transferencia

Como demostraremos, la representación de la transformada de Fourier puede considerarse como un caso especial de la representación de la función de transferencia. Por lo tanto, básicamente sólo existen tres tipos diferentes de representaciones de entrada/salida que estudiaremos en este libro.

Las dos primeras representaciones mencionadas y el modelo de estado son conocidos como *modelos en el dominio del tiempo*, ya que estas representaciones están dadas en términos de funciones de tiempo. Las últimas dos representaciones mencionadas se conocen como *modelos en el dominio de la frecuencia*, ya que están especificadas en términos de funciones de una variable compleja que se interpreta como una variable de la frecuencia. Tanto el modelo en el dominio del tiempo, como el modelo en el dominio de frecuencia se utilizan en el análisis y diseño de sistemas. Estos tipos diferentes de modelos a menudo se emplean juntos para comprender al máximo el comportamiento del sistema bajo estudio.

## 1.4 EJEMPLOS DE SISTEMAS

Para ser relativamente concretos respecto al concepto de sistema, en esta sección proporcionamos tres ejemplos específicos de sistema. Los dos primeros ejemplos son sistemas de tiempo continuo y el tercero es uno de tiempo discreto.

### 1.4.1 Circuito *RC*

Considere el circuito *RC* que muestra la figura 1.23. Este circuito puede considerarse como un sistema de tiempo continuo, con una entrada $x(t)$ igual a la corriente $i(t)$ dentro de la conexión en paralelo, y con una salida $y(t)$ igual al voltaje $v_C(t)$ en las terminales del capacitor. Por la ley de corriente de Kirchhoff (vea la sección 2.4),

$$i_C(t) + i_R(t) = i(t) \tag{1.5}$$

donde $i_C(t)$ es la corriente en el capacitor e $i_R(t)$ es la corriente en el resistor.

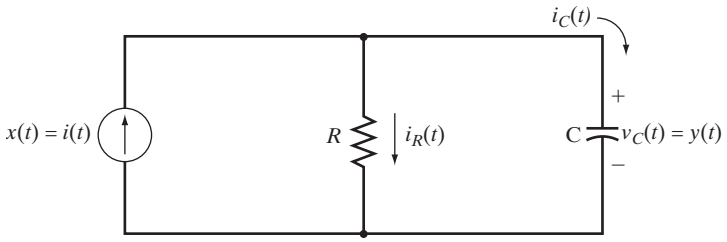



**FIGURA 1.23**
Circuito *RC*.

Ahora

$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} = C\frac{dy(t)}{dt} \tag{1.6}$$

e

$$i_R(t) = \frac{1}{R}v_C(t) = \frac{1}{R}y(t) \tag{1.7}$$

Al sustituir las ecuaciones (1.6) y (1.7) en (1.5), obtenemos la siguiente ecuación diferencial lineal:

$$C\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{R}y(t) = i(t) = x(t) \tag{1.8}$$

La ecuación diferencial (1.8) se conoce como *ecuación diferencial de entrada/salida* del circuito. Ésta proporciona una relación implícita entre la entrada $x(t)$ y la salida $y(t)$. La salida $y(t)$ resulta de una entrada $x(t)$ que puede generarse resolviendo la ecuación diferencial de entrada y salida (1.8). Por ejemplo, suponga que la entrada $x(t)$ es igual a la función escalón unitario $u(t)$, y la condición inicial $y(0)$ es igual a cero. Entonces, la respuesta $y(t)$ para $t > 0$ es la solución a la ecuación diferencial

$$C\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{R}y(t) = 1, t > 0 \tag{1.9}$$

con la condición inicial $y(0) = 0$. La solución a (1.9) puede encontrarse mediante el uso del manipulador simbólico de MATLAB, el cual consideramos en el capítulo 2, o mediante el uso de la transformada de Laplace, que estudiaremos en el capítulo 6. El resultado es que la respuesta de salida está dada por

$$y(t) = R[1 - e^{-(1/RC)t}], t \geq 0 \tag{1.10}$$

La respuesta de salida $y(t)$ dada por (1.10) se conoce como *respuesta al escalón*, debido a que $y(t)$ es la salida cuando la entrada es la función escalón unitario $u(t)$ con la condición inicial cero [$y(0) = 0$]. Si en $t = 0$ se enciende una fuente constante de corriente de amplitud 1 [para que $x(t) = u(t)$], el voltaje resultante en el capacitor estará dado por (1.10). Para el caso $R = 1$ y $C = 1$, la respuesta escalón es la que se grafica en la figura 1.24. Observe que el voltaje sobre el capacitor alcanza un valor de 1 conforme $t \to \infty$, en respuesta al encendido de una fuente constante de corriente de amplitud 1 en el tiempo $t = 0$.

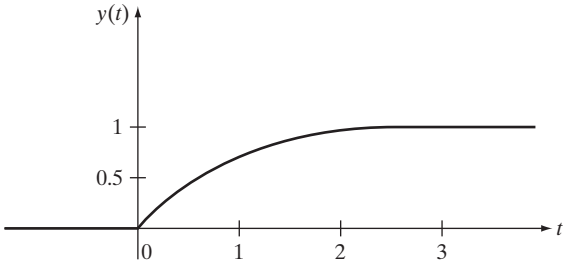



**FIGURA 1.24**
Respuesta al escalón de un circuito *RC*, cuando $R = C = 1$.

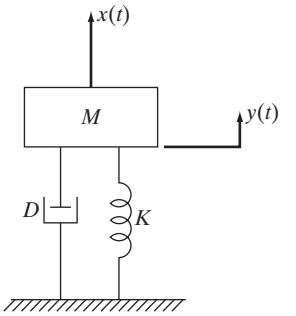



**FIGURA 1.25**
Diagrama esquemático de un sistema masa-resorte-amortiguador.

### 1.4.2 Sistema masa-resorte-amortiguador

El modelo más sencillo de sistemas vibratorios es el sistema masa-resorte-amortiguador que aparece esquemáticamente en la figura 1.25. Este sistema es una representación exacta de muchas estructuras o dispositivos del mundo real; algunos ejemplos incluyen el acelerómetro (un dispositivo para medir la aceleración), sismómetro (un dispositivo que mide la vibración de la tierra), y un amortiguador de vibraciones (un dispositivo de montaje utilizado para absorber vibraciones de equipos). Otros sistemas, como la herramienta de una máquina o un compresor sobre un montaje resistente, pueden modelarse como sistemas de masa-resorte-amortiguador para simplificar su análisis. Este sistema, aunque burdo, demuestra la mayor parte de los fenómenos asociados con los sistemas vibratorios y, como tal, es el bloque de construcción fundamental para el estudio de la vibración.

Físicamente, la masa $M$ es soportada por un resorte con una constante de rigidez $K$, y un amortiguador con una constante de amortiguamiento $D$. Una fuerza externa $x(t)$ se aplica a la masa y ocasiona que se mueva hacia arriba o hacia abajo, con un desplazamiento $y(t)$, medido respecto a una posición de equilibrio. (Es decir, $y(t) = 0$ cuando no se aplica fuerza externa alguna). Cuando la masa se encuentra por encima de su posición de equilibrio, $y(t) > 0$; y cuando la masa se encuentra por debajo de su posición de equilibrio, $y(t) < 0$. El resorte se resiste al movimiento de la masa (si la masa se mueve hacia abajo, esto comprime el resorte, el cual actúa empujando la masa hacia arriba). El amortiguador actúa para disipar la energía y convertirla de energía mecánica a energía térmica, la cual abandona el sistema en forma de calor. Por ejemplo, el absorbente de choques de un coche contiene un amortiguador.

Como mostramos en la sección 2.4, la ecuación diferencial de entrada/salida para el sistema masa-resorte-amortiguador, está dada por

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2} + D\frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = x(t)$$

En el sitio Web del libro se encuentra disponible una demostración de un sistema masa-resorte-amortiguador. El demo permite al usuario seleccionar diferentes entradas para $x(t)$, como una función escalón o un sinusoide, y ver una animación de la respuesta resultante del sistema conforme la masa se mueve en respuesta a la entrada. El usuario puede elegir

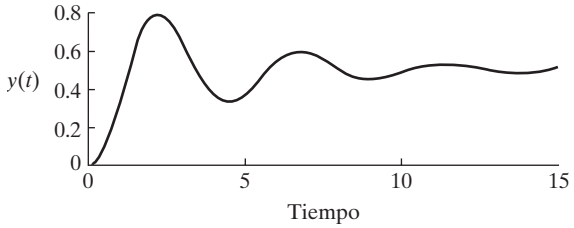



**FIGURA 1.26**
Respuesta del sistema masa-resorte-amortiguador a una entrada de escalón unitario con $M = 1$, $K = 2$, y $D = 0.5$.

diferentes valores de $M$, $D$, y $K$ para ver sus efectos en la respuesta del sistema. Para muchas combinaciones de valores para $M$, $D$ y $K$, la respuesta $y(t)$ a una entrada escalón $x(t) = u(t)$, es una oscilación en decaimiento que se establece en un valor constante (o estado estable), como muestra la figura 1.26. La oscilación se debe a la transferencia de energía entre la energía cinética (proporcional a la velocidad al cuadrado de la masa) y la energía potencial (energía almacenada en el resorte conforme se comprime o se estira). El decaimiento en la oscilación se debe a la disipación de energía que ocurre en el amortiguador.

Sistema masa-resorte-amortiguador

El objetivo de este ejemplo o del demo en línea no es una explicación detallada sobre vibraciones. Sin embargo, el sistema masa-resorte-amortiguador es un sistema cuya respuesta puede visualizarse sin dificultad mediante la animación. Un circuito en serie $RLC$ está regido por la misma ecuación general y responde de la misma manera que este sistema, pero la respuesta no puede visualizarse fácilmente mediante la animación. Por lo tanto, el sistema masa-resorte-amortiguador y el demo en línea serán los que utilicemos a lo largo del libro para demostrar los conceptos básicos de entrada/salida de un sistema.

### 1.4.3 Filtro de promedio móvil

Dado un entero positivo $N$, el *filtro de promedio móvil* ($PM$) *en el punto* $N$ es un sistema de tiempo discreto dado por la relación de entrada/salida

$$y[n] = \frac{1}{N}[x[n] + x[n-1] + x[n-2] + \cdots + x[n-N+1]] \qquad (1.11)$$

donde $x[n]$ es la entrada aplicada al filtro, y $y[n]$ es la respuesta de salida resultante. Por ejemplo, si $N = 3$, el filtro PM en el punto 3 está dado por la relación de entrada/salida

$$y[n] = \frac{1}{3}[x[n] + x[n-1] + x[n-2]]$$

De la ecuación (1.11) vemos que la salida $y[n]$, al tiempo $n$ del filtro PM en el punto $N$, es el promedio de los $N$ valores de entrada $x[n]$, $x[n-1]$, $x[n-2]$,..., $x[n-N+1]$. Así, el término "punto $N$" se refiere al número de valores de entrada utilizados al calcular la salida del filtro. El filtro se conoce como "filtro de promedio móvil", debido a que calculamos el siguiente valor $y[n+1]$ de la salida, moviendo el intervalo de puntos de tiempo sobre el

que se calcula la salida del filtro. En particular, $y[n + 1]$ es el promedio de $x[n + 1]$, $x[n]$, $x[n - 1],\ldots, x[n - N + 2]$, por lo que

$$y[n + 1] = \frac{1}{N}[x[n + 1] + x[n] + x[n - 1] + \cdots + x[n - N + 2]] \quad (1.12)$$

Observe que (1.12) se deriva de (1.11), estableciendo $n = n + 1$ en (1.11). Algunos autores se refieren al filtro PM como *filtro de promedio corriente*.

Los filtros PM con frecuencia se utilizan para reducir la magnitud del ruido que puede estar presente en una señal. Para ver cómo es esto posible, suponga que la entrada $x[n]$ está dada en la forma $x[n] = s[n] + e[n]$, donde $s[n]$ es la parte suave de $x[n]$, y $e[n]$ es la parte errática o ruidosa de $x[n]$. Entonces, la salida $y[n]$ del filtro PM en el punto $N$ está dada por

$$\begin{aligned} y[n] = {} & \frac{1}{N}[s[n] + s[n - 1] + \cdots + s[n - N + 1]] \\ & + \frac{1}{N}[e[n] + e[n - 1] + \cdots + e[n - N + 1]] \end{aligned} \quad (1.13)$$

La parte ruidosa de la salida $y[n]$ del filtro PM dada por (1.13) es el promedio de los valores ruidosos $e[n]$, $e[n - 1]$, …, $e[n - N + 1]$, que es igual a

$$\frac{1}{N}[e[n] + e[n - 1] + \cdots + e[n - N + 1]] \quad (1.14)$$

Si $e[n]$ varía aleatoriamente alrededor de cero, el término ruidoso dado por el promedio (1.14) puede hacerse tan pequeño como se desee (en teoría), tomando el valor de $N$ lo suficientemente grande. Esto explica por qué los filtros PM funcionan bien reduciendo la magnitud de la parte errática o ruidosa de una señal.

Si el valor de $N$ es lo suficientemente grande, la salida del filtro PM es aproximadamente igual a un retraso de tiempo de la parte suave, $s[n]$ de $x[n]$, donde el retraso es igual a $(N - 1)/2$ unidades de tiempo. En el capítulo 5 verificaremos de manera matemática la ocurrencia del retraso con la transformada de Fourier de tiempo discreto. El siguiente ejemplo ilustra el filtro PM en el punto $N$ y el retraso de tiempo que puede ocurrir, y donde el filtro se aplica a información de precios para el fondo de acciones QQQQ. Primero, debemos destacar que la salida $y[n]$ del filtro dado por (1.11) se calcula fácilmente con el comando `sum` de MATLAB. En particular, si la señal de entrada $x[n]$ se escribe como el vector columna

$$x = \begin{bmatrix} x[n - N + 1] \\ x[n - N + 2] \\ \vdots \\ x[n] \end{bmatrix}$$

entonces la salida $y[n]$ al tiempo $n$ es igual al comando `(1/N)*sum(x)` de MATLAB.

### Ejemplo 1.4 Aplicación a información de precios de acciones

El precio de cierre de QQQQ para un periodo de 50 días hábiles, del 1 de marzo de 2004 hasta el 10 de mayo de 2004, es el que consideraremos. Para obtener la información, siga el procedimiento descrito en la sección 1.2, y después guárdela en el archivo datosQQQQ2.csv. Al establecer $N = 11$ días, el filtro PM en el punto día 11 puede aplicarse a los precios de cierre de QQQQ, mediante los comandos de MATLAB

```
c=csvread('datosQQQQ2.csv',1,4,[1 4 50 4]);
for i=11:50;
  y(i)=(1/11)*sum(c(i-10:i));
end;
n=11:50;
plot(n,c(n),n,c(n),'o',n,y(n),n,y(n),'*')
grid
xlabel('Day(n)')
ylabel('c[n] and y[n]')
```

Observe que en este caso la entrada $x[n]$ para el filtro es el precio de cierre $c[n]$ de QQQQ. También observe que el primer valor de la salida del filtro $y[n]$ es la salida $y[11]$ en el día 11, debido a que el filtro PM en el día 11 requiere los valores de entrada $c[1], c[2], c[3], \ldots, c[11]$, para calcular $y[11]$. La gráfica resultante de MATLAB para la entrada del filtro, $c[n]$, y la salida del filtro, $y[n]$, aparece en la figura 1.27. En la gráfica, los valores de $c[n]$ están graficados con o's, y los valores de $y[n]$ están graficados con *'s. Observe que aunque los precios de cierre son bastante erráticos, el filtro hace un buen trabajo al suavizar la información. Sin embargo, es claro que el filtro retrasa varios días la señal de entrada. Como vimos anteriormente, el retraso es aproximadamente igual a $(N - 1)/2$, que es igual a cinco días en este ejemplo. Si $y[n]$ es despla-

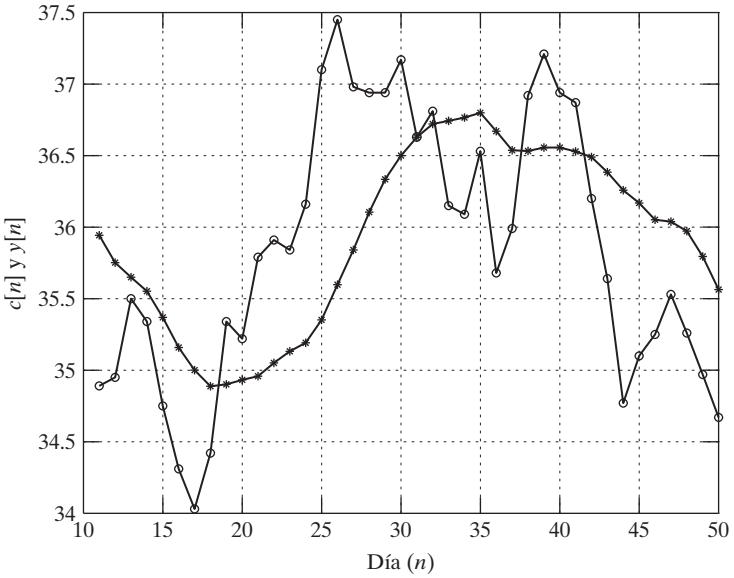



**FIGURA 1.27**
Gráfica en MATLAB de un filtro de entrada y salida.

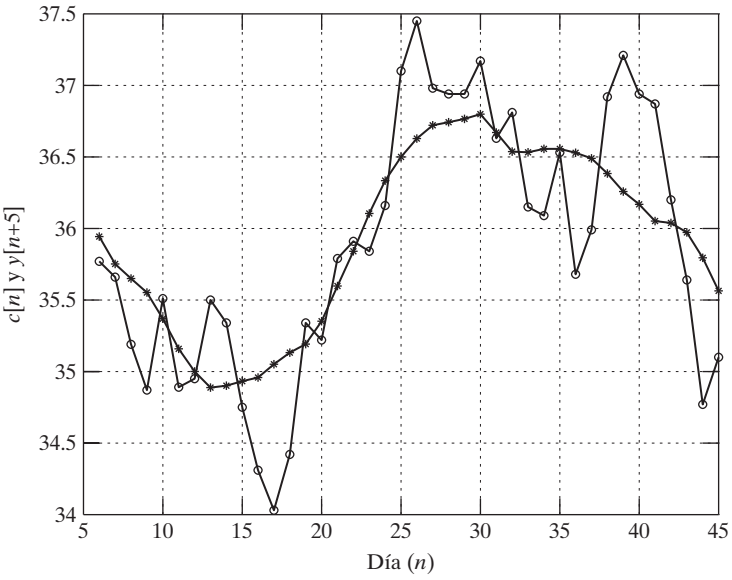



**FIGURA 1.28**
Gráfica en MATLAB de una entrada al filtro y una salida desplazada por la izquierda.

zada hacia la izquierda cinco días (lo que corresponde a la señal desplazada por la izquierda $y[n + 5]$), y después se grafica con $c[n]$, el resultado es el que presenta la figura 1.28. Observe que la salida desplazada por la izquierda $y[n + 5]$ coincide muy bien con la información de entrada. Por desgracia, la salida desplazada no puede generarse en tiempo real, ya que su cálculo requiere valores futuros de $c[n]$. Para ver esto, sea $\rho[n] = y[n + 5]$. Después, al reemplazar $n$ por $n + 5$ y establecer $N = 11$, en la ecuación (1.11), obtenemos

$$\rho[n] = \frac{1}{11}[c[n + 5] + c[n + 4] + c[n + 3] + c[n + 2] + c[n + 1] + c[n] + c[n - 1] + \cdots + c[n - 5]] \tag{1.15}$$

Así, el cálculo de $\rho[n]$ en el tiempo $n$, requiere los valores futuros $c[n + 5]$, $c[n + 4]$, $c[n + 3]$, $c[n + 2]$, y $c[n + 1]$ de la entrada $c[n]$.

---

**Aplicación a la negociación de QQQQ.** Las personas que negocian acciones, en algunas ocasiones utilizan filtros PM para determinar cuándo comprar y cuándo vender una acción en particular (como QQQQ). En esta aplicación, los filtros PM con frecuencia se conocen como filtros PMS, lo que significa "promedio móvil simple". Un tipo de filtro todavía más común que se utiliza en estas negociaciones es el filtro PMPE, también llamado filtro PME, donde PMPE significa "promedio móvil ponderado exponencialmente". En la sección 2.1 se define el filtro PMPE de $N$ puntos; en la sección 7.5 se define una "versión recursiva" del filtro PMPE; en esta misma sección, presentamos un método para la compra y venta de acciones QQQQ, en términos de la diferencia en las respuestas a dos filtros PMPE, con diferentes valores en sus parámetros. Para más detalles sobre el uso de los filtros de promedio móvil en la negociación de acciones, escriba "promedio móvil" en una máquina de búsqueda.

## 1.5 PROPIEDADES BÁSICAS DE UN SISTEMA

El grado de estudio de un sistema mediante el uso de técnicas analíticas depende de las propiedades del sistema. Dos de las propiedades más importantes son la linealidad y la invariancia en el tiempo. En este libro veremos que existe una teoría analítica muy amplia para estudiar los sistemas que presentan las propiedades de linealidad y de invariancia en el tiempo. En esta sección definimos estas dos propiedades y la propiedad de causalidad.

En las definiciones siguientes, asumimos que $y(t)$ es la respuesta de salida de un sistema que resulta de la entrada $x(t)$. Los sistemas considerados en esta sección están limitados a aquéllos para los cuales una entrada $x(t) = 0$ para toda $t$, donde $-\infty < t < \infty$, arroja una salida de $y(t) = 0$ para toda $t$. En el siguiente desarrollo, la variable de tiempo $t$ puede tomar valores reales o sólo valores discretos $t = nT$; es decir, el sistema puede ser continuo o discreto en el tiempo.

### 1.5.1 Causalidad

Se dice que un sistema es *causal* o *no anticipativo* si para cualquier tiempo $t_1$, la respuesta de salida $y(t_1)$ en el tiempo $t_1$, que resulta de la entrada $x(t)$, no depende de los valores de entrada $x(t)$ para $t > t_1$. En un sistema causal, si $y(t)$ es la respuesta a una entrada $x(t)$, y $x(t) = 0$ para toda $t < t_2$, para alguna $t_2$, entonces $y(t) = 0$ para toda $t < t_2$. Se dice que un sistema es *anticausal* o *anticipativo* si no es causal. Aunque todos los sistemas que surgen en la naturaleza son causales (o parecen serlo), existen aplicaciones en ingeniería donde surgen los sistemas no causales. Un ejemplo es el procesamiento fuera de línea (o procesamiento batch, o por lotes) de información. Explicaremos esto en un capítulo posterior.

---

**Ejemplo 1.5 Predictor ideal**

Considere el sistema de tiempo continuo dado por la relación de entrada/salida

$$y(t) = x(t + 1)$$

Este sistema es anticausal, debido a que el valor $y(t)$ de la salida al tiempo $t$, depende del valor $x(t + 1)$ de la entrada al tiempo $t + 1$. La no causalidad también puede verse considerando la respuesta del sistema al pulso de entrada de 1 segundo que aparece en la figura 1.29a. De la relación $y(t) = x(t + 1)$, podemos ver que la salida $y(t)$ resultante del pulso de entrada es el pulso que muestra la figura 1.29b. Debido a que el pulso de salida aparece antes de que se aplique el pulso de entrada, el sistema es anticausal. El sistema con la relación de entrada/salida $y(t) = x(t + 1)$ se conoce como predictor *ideal*.

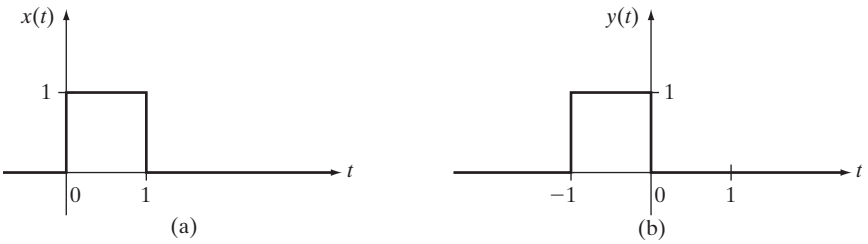



**FIGURA 1.29**
Pulso (a) de entrada, y (b) de salida, del ejemplo 1.5.

---

### Ejemplo 1.6 Retraso ideal de tiempo

Considere el sistema con la relación de entrada y salida

$$y(t) = x(t - 1)$$

Este sistema es causal, debido a que el valor de la salida al tiempo $t$ depende sólo del valor de la entrada al tiempo $t - 1$. Si el pulso que aparece en la figura 1.30a se aplica a este sistema, la salida es el pulso de la figura 1.30b. De la figura 1.30 es claro que el sistema retrasa el pulso de entrada durante 1 segundo. De hecho, el sistema retrasa todas las salidas 1 segundo; en otras palabras, el sistema es un *retraso ideal de tiempo*.

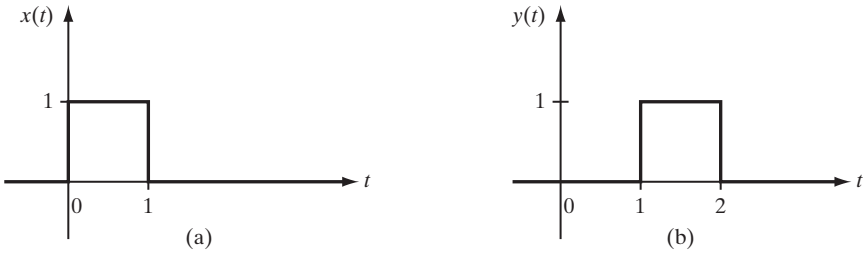



**FIGURA 1.30**
Pulso de (a) entrada, y (b) salida del sistema correspondiente al ejemplo 1.6.

### Ejemplo 1.7 Filtro PM

Considere el filtro PM de $N$ puntos dado por la relación de entrada/salida

$$y[n] = \frac{1}{N}[x[n] + x[n - 1] + x[n - 2] + \cdots + x[n - N + 1]] \tag{1.16}$$

El filtro es causal debido a que la salida $y[n]$ al tiempo $n$ depende sólo de los valores de entrada $x[i]$, para $i = n, n-1, n-2, \ldots, n - N + 1$. Sin embargo, el filtro PM dado por la relación de entrada/salida (1.15) es anticausal, ya que la salida del filtro $\rho[n]$ al tiempo $n$ requiere los valores futuros $c[n + 5], c[n + 4], c[n + 3], c[n + 2]$ y $c[n + 1]$ de la entrada $c[n]$.

**Sistemas con y sin memoria.** Un sistema causal no tiene memoria, o es estático, si para cualquier tiempo $t_1$, el valor de la salida al tiempo $t_1$ depende sólo del valor de la entrada al tiempo $t_1$.

### Ejemplo 1.8 Amplificador/atenuador ideal

Suponga que $y(t) = Kx(t)$, donde $K$ es un número fijo real. En cualquier tiempo $t_1$, $y(t_1) = Kx(t_1)$ y, por lo tanto, $y(t_1)$ sólo depende del valor de la entrada al tiempo $t_1$. Así, el sistema no tiene memoria. Debido a que un amplificador o atenuador ideal puede representarse con la relación de entrada/salida $y(t) = Kx(t)$, es obvio que estos dispositivos no tienen memoria.

Un sistema tiene *memoria* si la salida al tiempo $t_1$ depende, en general, de los valores pasados de la entrada $x(t)$, para algún intervalo de valores de $t$ hasta $t = t_1$.

**Ejemplo 1.9 Filtro PM**

De nuevo considere el filtro PM en el punto $N$, con la relación de entrada/salida (1.16), y suponga que $N \geq 2$. Debido a que la salida del filtro $y[n]$ en el tiempo $n$ depende de los valores de entrada $x[i]$ para $i = n, n-1, n-2, \ldots, n-N+1$, el filtro PM tiene memoria. Cuando $N = 1$, el filtro PM en el punto uno tiene la relación de entrada y salida $y[n] = x[n]$ y, por lo tanto, en este caso no tiene memoria.

### 1.5.2 Linealidad

Se dice que un sistema es *aditivo*, si para cualesquiera dos entradas $x_1(t)$ y $x_2(t)$, la respuesta a la suma de las entradas $x_1(t) + x_2(t)$, es igual a la suma de las respuestas a las entradas. De manera más precisa, si $y_1(t)$ es la respuesta a la entrada $x_1(t)$, y $y_2(t)$ es la respuesta a la entrada $x_2(t)$, la respuesta a $x_1(t) + x_2(t)$ es igual a $y_1(t) + y_2(t)$. Se dice que un sistema es *homogéneo*, si para cualquier entrada $x(t)$ y cualquier escalar real $a$, la respuesta a la entrada $ax(t)$ es igual que $a$ veces la respuesta de $x(t)$.

Un sistema es lineal, si es aditivo y homogéneo; es decir, para dos entradas $x_1(t)$ y $x_2(t)$ arbitrarias, y escalares reales $a_1, a_2$ arbitrarios, la respuesta a la entrada $a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$ es igual que $a_1$ veces la respuesta a la entrada $x_1(t)$ más $a_2$ veces la respuesta a la entrada $x_2(t)$. Entonces, si $y_1(t)$ es la respuesta a $x_1(t)$ y $y_2(t)$ es la respuesta a $x_2(t)$, la respuesta a $a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$ es igual a $a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$.

La linealidad es una propiedad muy importante. Si un sistema es lineal, es posible aplicar la amplia colección de resultados existentes para operaciones lineales para estudiar el comportamiento y estructura del sistema. En contraste, la teoría analítica de sistemas no lineales es muy limitada. En la práctica, es frecuente aproximar un sistema no lineal dado como si fuera un sistema lineal, para poder aplicarle técnicas analíticas.

Un tipo muy común de sistema no lineal es un circuito que contiene diodos, como muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.10 Circuito con diodo**

Considere el circuito con el diodo ideal que aparece en la figura 1.31. Aquí, la salida $y(t)$ es el voltaje a través del resistor con resistencia $R_2$. El diodo ideal es un corto circuito cuando el

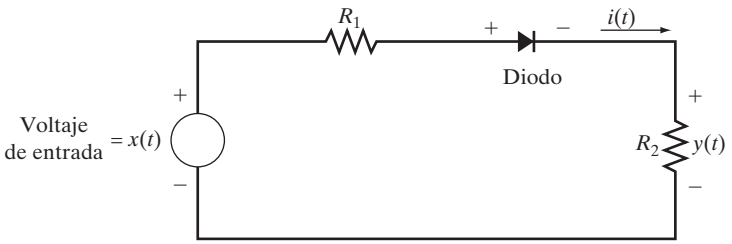



**FIGURA 1.31**
Circuito resistivo con un diodo ideal.

voltaje $x(t)$ es positivo, y es un circuito abierto cuando el voltaje $x(t)$ es negativo. Entonces, la relación de entrada/salida del circuito está dada por

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} x(t) & \text{cuando } x(t) \geq 0 \\ 0 & \text{cuando } x(t) \leq 0 \end{cases} \tag{1.17}$$

Ahora suponga que la entrada $x(t)$ es la función escalón unitario $u(t)$. Entonces, de la ecuación (1.17), la respuesta resultante es

$$y(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u(t) \tag{1.18}$$

Si multiplicamos la entrada escalón unitario por el escalar $-1$, para que la entrada sea $-u(t)$, por (1.17) la respuesta resultante es cero para toda $t \geq 0$. Pero no es igual a $-1$ veces la respuesta a $u(t)$ dada por (1.18). Entonces, el sistema no es homogéneo, y por lo tanto no es lineal. También es sencillo notar que el circuito no es aditivo.

La no linealidad también puede ser el resultado de la presencia de multiplicadores de señales; en el siguiente ejemplo ilustramos esto.

### Ejemplo 1.11 Dispositivo de ley cuadrada

Considere el sistema continuo en el tiempo, con la relación de entrada/salida

$$y(t) = x^2(t) \tag{1.19}$$

Este sistema puede realizarse mediante el uso de un multiplicador de señales, como muestra la figura 1.32. El multiplicador de señal que aparece en esta figura puede construirse (de forma aproximada) con amplificadores operacionales y diodos. El sistema definido por (1.19) algunas veces se conoce como dispositivo de ley cuadrada. Observe que el sistema no tiene memoria. Dado un escalar $a$, y una entrada $x(t)$, por la ecuación (1.19), la respuesta a $ax(t)$ es $a^2x^2(t)$. Pero $a$ número de veces la respuesta de $x(t)$ es igual a $ax^2(t)$, lo que en general no es igual a $a^2x^2(t)$. Por lo tanto, el sistema no es homogéneo, y tampoco es lineal.

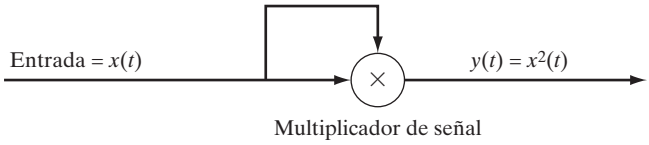



**FIGURA 1.32**
Realización de $y(t) = x^2(t)$.

Otra forma en la que surge la no linealidad es en los sistemas que tienen dispositivos que se "saturan" cuando los niveles de la señal se vuelven muy grandes, como en el siguiente ejemplo.

### Exjemplo 1.12 Amplificador

Considere un amplificador ideal, con la relación de entrada/salida $y(t) = Kx(t)$, donde $K$ es un número real positivo fijo. La figura 1.33 muestra una gráfica de la salida $y(t)$ contra la entrada

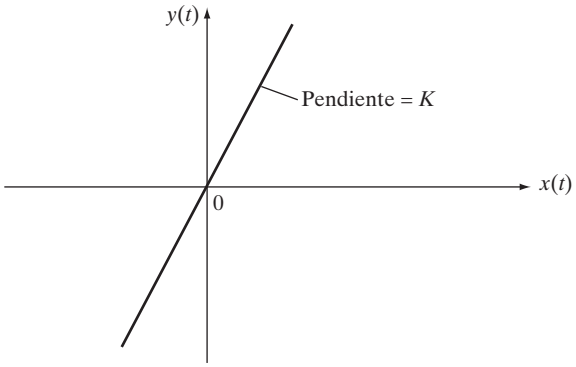



**FIGURA 1.33**
Salida contra entrada, en un amplificador ideal.

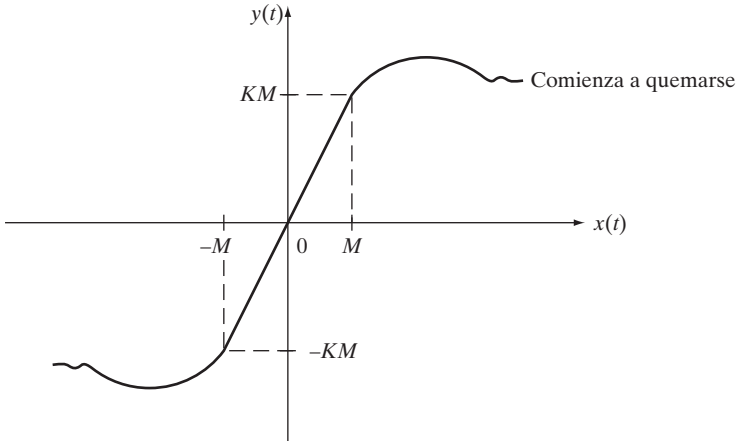



**FIGURA 1.34**
Salida contra entrada en un amplificador no ideal.

$x(t)$. El amplificador ideal es claramente lineal, pero éste no es el caso para un amplificador real (no ideal), ya que la salida $y(t)$ no será igual a $Kx(t)$ para amplitudes de la señal de entrada arbitrariamente grandes. En un amplificador no ideal, las características de salida frente a las de entrada podrían ser como las que aparecen en la figura 1.34. A partir de la figura, resulta claro que $y(t) = Kx(t)$, sólo cuando la magnitud $|x(t)|$ de la entrada es menor que $M$. El amplificador no ideal no es homogéneo, ya que la respuesta a $ax(t)$ no es igual que $a$ número de veces la respuesta de $x(t)$, a menos que $|x(t)| < M$ y $|ax(t)| < M$. El amplificador no ideal puede considerarse como un sistema lineal sólo si puede garantizarse que la magnitud de la entrada aplicada al amplificador nunca excederá a $M$.

---

Aunque los sistemas no lineales son muy comunes, muchos sistemas que surgen en la práctica sí son lineales, o pueden aproximarse a un sistema lineal. Por ejemplo, el filtro PM es un sistema lineal. La linealidad de un filtro PM se demuestra con facilidad, partiendo del hecho de que la salida del filtro es una combinación lineal de valores de la entrada [vea (1.16)]. Además, el circuito *RC* y el sistema masa-resorte-amortiguador que consideramos en la sección 1.4 son sistemas lineales. En estos dos ejemplos, la linealidad surge del hecho de que cada sistema está definido por una ecuación diferencial de entrada/salida.

Excepto por la breve introducción a los sistemas no lineales que dimos anteriormente, este libro maneja sólo los sistemas lineales. En el siguiente capítulo definimos una clase general de sistemas lineales.

### 1.5.3 Invariancia en el tiempo

Dado un número real $t_1$, y una señal $x(t)$, recuerde que $x(t - t_1)$ es igual a $x(t)$ desplazada hacia la derecha $t_1$ segundos, si $t_1 > 0$, y que $x(t - t_1)$ es igual a $x(t)$ desplazada hacia la izquierda $t_1$ segundos, si $t_1 < 0$. Ahora considere un sistema con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$. Se dice que el *sistema es invariante en el tiempo* o que es *constante* si para cualquier entrada $x(t)$ y para cualquier $t_1$, la respuesta a la entrada desplazada $x(t - t_1)$ es igual a $y(t - t_1)$, donde $y(t)$ es la respuesta a $x(t)$. Por lo tanto, en un sistema invariante en el tiempo, la respuesta a un desplazamiento por la izquierda o por la derecha de la entrada $x(t)$ es igual al desplazamiento correspondiente en la respuesta $y(t)$ de $x(t)$. En un sistema invariante en el tiempo no hay cambios en la estructura del sistema como función del tiempo $t$. Un sistema es *variante en el tiempo* si no es invariante en el tiempo.

---

**Ejemplo 1.13 Amplificador con ganancia de variación en el tiempo**

Suponga que $y(t) = tx(t)$. Resulta fácil ver que este sistema no tiene memoria y es lineal. Ahora, para cualquier $t_1$,

$$y(t - t_1) = (t - t_1)x(t - t_1)$$

Pero la respuesta a la entrada $x(t - t_1)$ es $tx(t - t_1)$, la cual en general no es igual a $(t - t_1)x(t - t_1)$. Así, $y(t - t_1)$ no es igual al desplazamiento de un segundo de la respuesta a $x(t)$ y, por lo tanto, el sistema es variante en el tiempo. Observe que este sistema puede considerarse como un amplificador ideal, con ganancia $t$ de variación en el tiempo.

---

**Ejemplo 1.14 Filtro PM**

De nuevo considere el filtro PM de $N$ puntos, con la relación de entrada/salida (1.16). Dado un entero positivo o negativo $q$, considere la versión desplazada $x[n - q]$ de la entrada $x[n]$ del filtro. Entonces, sustituyendo $x[n]$ por $x[n - q]$ en (1.16), vemos que la respuesta del filtro $p[n]$ a $x[n - q]$ está dada por

$$p[n] = \frac{1}{N}[x[n - q] + x[n - q - 1] + x[n - q - 2] + \cdots + x[n - q + N - 1]] \qquad (1.20)$$

Además, si en (1.16) reemplazamos $n$ por $n - q$, la expresión resultante para $y[n - q]$ es igual al lado derecho de (1.20) y, por lo tanto, $y\,[n - q] = p[n]$. Así, el filtro PM es invariante en el tiempo.

---

Además del filtro PM, el circuito $RC$ y el sistema masa-resorte-amortiguador, que definimos en la sección 1.4, también son invariantes en el tiempo, ya que la ecuación diferencial de entrada/salida para cada uno de estos sistemas es una ecuación diferencial de coeficientes constantes.

En este libro, nos enfocaremos en sistemas que sean lineales e invariantes en el tiempo. En el siguiente capítulo, comenzaremos a estudiar una clase general de tales sistemas, con representaciones en el dominio de tiempo.

## 1.6 RESUMEN DEL CAPÍTULO

Este capítulo introdujo los conceptos de señales y sistemas. Tanto las señales como los sistemas se dividen en las categorías de continuos y discretos en el tiempo. Las señales de tiempo continuo son aquellas $x(t)$ en las que el tiempo $t$ asume valores del conjunto de los números reales, mientras que las señales de tiempo discreto $x[n]$ están definidas sólo en valores enteros del índice $n$. Las señales de tiempo continuo surgen de manera natural; ejemplos comunes son el voltaje y la corriente en circuitos, velocidades y posiciones de objetos en movimiento, velocidades de flujo y presiones en procesos químicos, y la voz y electrocardiogramas en humanos. Las señales de tiempo discreto con frecuencia se obtienen muestreando señales de tiempo continuo, es decir, definiendo la señal sólo en puntos discretos en el tiempo $t = nT$, donde $T$ es el tiempo de muestreo. Las señales de tiempo discreto también surgen "de manera natural", como vimos en el ejemplo que involucraba los precios de cierre de una acción particular, al final de cada día hábil.

Tenemos muchas señales comunes definidas en este capítulo, las cuales utilizaremos a lo largo del libro. Los nombres son los mismos para las versiones de tiempo continuo y discreto de estas señales: función escalón, función rampa y función sinusoidal. Además, existe la función impulso unitario para señales de tiempo continuo, y la función pulso unitario para señales de tiempo discreto. Las funciones pulso e impulso son muy importantes para analizar los sistemas en ingeniería. En el capítulo 2 mostraremos que la respuesta del sistema al impulso unitario o al pulso unitario es un medio para caracterizarlo. Las funciones de tiempo discreto escalón, rampa y sinusoide pueden considerarse como versiones muestreadas de sus versiones continuas, pero una versión escalada de la función rampa muestreada se utiliza con más frecuencia, $r[n] = nu[n]$. Es interesante observar que una sinusoide de tiempo continuo, $\cos(\omega t + \theta)$, es periódica, pero una sinusoide de tiempo discreto, $\cos(\Omega n + \theta)$, es periódica si y sólo si existe un entero positivo $r$ tal que $\Omega = 2\pi q/r$ para algún entero $q$.

Un sistema es una colección de uno o más dispositivos o procesos que operan sobre una señal de entrada para producir una señal de salida. Ejemplos de sistemas son los circuitos eléctricos, sistemas de comunicación, procesadores de señales, sistemas biológicos, manipuladores robóticos, procesos químicos, y sistemas de manufactura. Existen diversas representaciones de sistemas; algunas de ellas se consideran modelos en el dominio del tiempo, y otras como modelos en el dominio de la frecuencia. Las representaciones en el dominio del tiempo incluyen el modelo de convolución, y la ecuación diferencial o en diferencias de entrada/salida, la cual estudiaremos en el capítulo 2. Los modelos en el dominio de la frecuencia incluyen la transformada de Fourier, que estudiaremos en los capítulos 3 al 5, y los modelos de transformadas que estudiaremos en los capítulos 6 al 8.

Hay muchas propiedades importantes de los sistemas de tiempo continuo y discreto, que incluyen la linealidad, la invariancia en el tiempo, la causalidad, y la memoria. Existen diversos métodos poderosos de análisis, como la transformada de Fourier y los métodos de funciones de transferencia, que podemos utilizar para estudiar el comportamiento de los sistemas que tienen estas propiedades. Los capítulos restantes del libro se enfocan en estos métodos de análisis.

## PROBLEMAS

**1.1.** Considere las señales de tiempo continuo de la figura P1.1.

**(i)** Muestre que cada una de estas señales es igual a la suma de los pulsos rectangulares $p_\tau(t)$ y/o los pulsos triangulares $(1 - 2|t|/\tau)p_\tau(t)$.

**(ii)** Utilice MATLAB para graficar las señales de la figura P1.1.

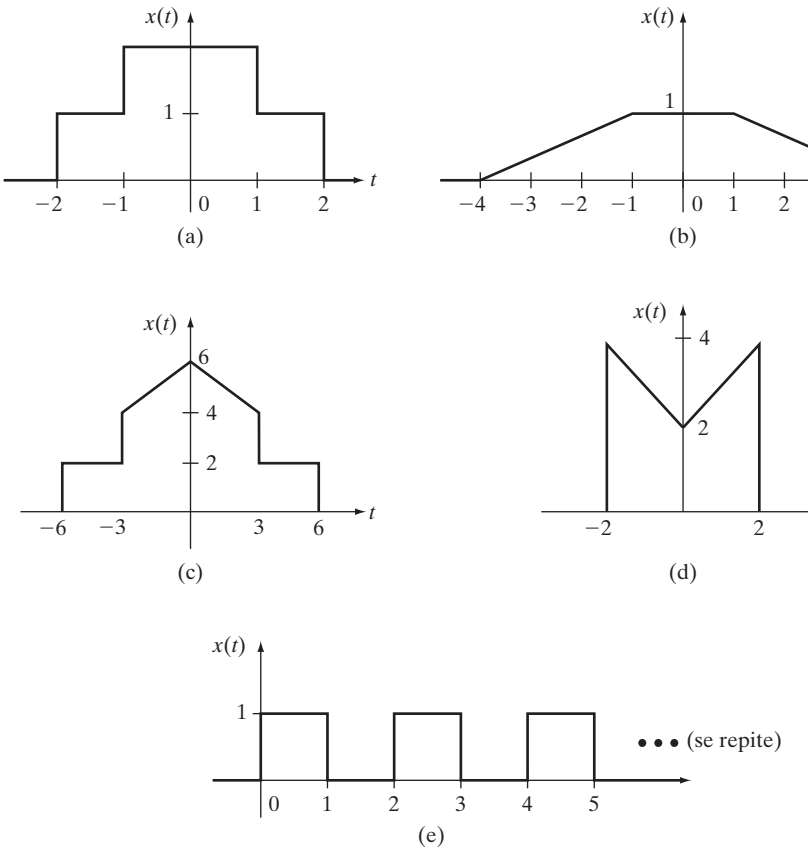



**FIGURA P1.1**

**1.2.** Obtener la gráfica por computadora de una señal de tiempo continuo requiere algo de cuidado al elegir el incremento de tiempo $\Delta t$ (el espacio entre los puntos). Como explicamos en la sección 1.1, un incremento muy grande provocará una gráfica dentada. Más aún, un incremento muy grande podría provocar un fenómeno conocido como *aliasing* o "apodamiento", el cual distorsiona la información dada de una señal (en el capítulo 5 explicamos el *aliasing* con más detalle). Para evitar el *aliasing* al definir una función sinusoide mediante computadora, como $x(t) = \cos(\omega t + b)$, elija $\Delta t \leq \pi/\omega$. Una regla de oro en el caso de una función sinusoide en decaimiento exponencial como $x(t) = e^{-at}\cos(\omega t + b)$ es elegir $\Delta t \leq \pi/\left(4\sqrt{a^2 + \omega^2}\right)$. (Elegir valores incluso más pequeños de $\Delta t$ genera gráficas más suaves).

**(a)** Calcule el máximo incremento de tiempo para graficar $x(t) = \text{sen } \pi t$ en MATLAB. Verifique su resultado mediante la gráfica $x(t)$ para $t = 0$ a $t = 20$ s con los siguientes incrementos de tiempo: $\Delta t = 0.1$ s, $\Delta t = 0.5$ s, $\Delta t = 0.9$ s, $\Delta t = 1.5$ s. Observe el aparente cambio de frecuencia en la gráfica debido al efecto de *aliasing* para $\Delta t = 1.5$. ¿Cómo espera que su gráfica aparezca cuando $\Delta t = 2$ s? Verifique su resultado.

**(b)** Calcule el tiempo máximo de incremento para graficar $x(t) = e^{-0.1t}\cos \pi t$. Verifique su resultado al graficar $x(t)$ para $t = 0$ a $t = 20$ s con $\Delta t = 0.1, 0.5, 1.5$ y 2 s.

**(c)** Calcule el tiempo máximo de incremento para graficar $x(t) = e^{-t}\cos(\pi t/4)$. Verifique sus resultados mediante una gráfica $x(t)$ para $t = 0$ a $t = 10$ s con $\Delta t = 0.1, 1.2$, y 3 s.

El problema con el *aliasing* existe no solamente con las gráficas, sino también con el procesamiento digital de señales continuas en el tiempo. Un programa de computadora que emula un sistema de tiempo continuo debe tener una señal de entrada definida de tal manera que ésta tenga el mínimo *aliasing*.

**1.3.** Utilice MATLAB para graficar las funciones (a)-(h) para $-1 \leq t \leq 5$ s. Marque sus ejes de manera apropiada.

**(a)** Función escalón unitario $u(t)$.

**(b)** Función rampa unitaria $r(t)$.

**(c)** $x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

**(d)** $x(t) = 10e^{-3t}\,u(t)$

**(e)** $x(t) = 3e^{-t}\cos 2t\,u(t)$

**(f)** $x(t) = 3e^{t}\cos 2t\,u(t)$

**(g)** $x(t) = 2\,\text{sen}(3t - \pi/2) - \cos 2t$

**(h)** $x(t) = \text{sen}\,5t + \text{sen}\,\pi t$

**1.4.** Esquematice las señales de tiempo continuo de los incisos (a) a (c).

**(a)** $x(t) = u(t + 1) - 2u(t - 1) + u(t - 3)$

**(b)** $x(t) = (t + 1)u(t - 1) - tu(t) - u(t - 2)$

**(c)** $x(t) = 2(t - 1)u(t - 1) - 2(t - 2)u(t - 2) + 2(t - 3)u(t - 3)$

**(d)** Utilice MATLAB para graficar las señales de los incisos (a) a (c).

**1.5.** Utilice MATLAB para graficar las siguientes señales, sobre el intervalo de $-1 \leq t \leq 5$:

**(a)** $x(t) = e^{-t}\,u(t) + e^{-t}[\exp(2t - 4) - 1]u(t - 2) - e^{t-4}u(t - 4)$

**(b)** $x(t) = \cos t\left[u\left(t + \dfrac{\pi}{2}\right) - 2u(t - \pi)\right] + (\cos t)u\left(t - \dfrac{3\pi}{2}\right)$

**1.6.** Dada una señal de tiempo continuo $x(t)$ y una constante $c$, considere la señal $x(t)u(t - c)$.

**(a)** Demuestre que existe una señal $v(t)$ tal que

$$x(t)u(t - c) = v(t - c)u(t - c)$$

Exprese $v(t)$ en términos de $x(t)$.

**(b)** Determine la forma analítica más sencilla posible para $v(t)$ cuando

**(i)** $x(t) = e^{-2t}$ y $c = 3$

**(ii)** $x(t) = t^2 - t + 1$ y $c = 2$

**(iii)** $x(t) = \text{sen}\,2t$ y $c = \pi/4$

**1.7.** Grafique las siguientes señales de tiempo discreto:

**(a)** $x[n]$ = función escalón unitario $u[n]$de tiempo discreto

**(b)** $x[n]$ = función rampa unitaria $r[n]$ de tiempo discreto

**(c)** $x[n] = (0.5)^n\,u[n]$

**(d)** $x[n] = (-0.5)^n\,u[n]$

**(e)** $x[n] = 2^n\,u[n]$

**(f)** $x[n] = \text{sen}(\pi n/4)$

**(g)** $x[n] = \text{sen}(\pi n/2)$

**(h)** $x[n] = (0.9)^n[\text{sen}(\pi n/4) + \cos(\pi n/4)]$

**(i)** $x[n] = \begin{cases} 1, & -4 \le n \le 4 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$

**(j)** Verifique las gráficas de los incisos (a) a (i) mediante MATLAB, con el comando `stem`, `stem(n,x,'filled')`. Etiquete sus ejes de manera apropiada.

**1.8.** Grafique las siguientes señales de tiempo discreto:

**(a)** $x[n] = u[n] - 2u[n-1] + u[n-4]$

**(b)** $x[n] = (n+2)u[n+2] - 2u[n] - nu[n-4]$

**(c)** $x[n] = \delta[n+1] - \delta[n] + u[n+1] - u[n-2]$

**(d)** $x[n] = e^{0.8n}u[n+1] + u[n]$

**(e)** Utilice MATLAB para graficar las señales definidas en los incisos (a) a (d).

**1.9.** Utilice un método analítico para determinar si las señales de la (a) a la (f) son periódicas; si lo son, encuentre el periodo fundamental. Utilice MATLAB para graficar cada señal y verifique su predicción de periodicidad. Utilice un incremento pequeño de tiempo para las señales de tiempo continuo para hacer que su gráfica sea suave (vea el problema 1.2).

**(a)** $x(t) = \cos \pi t + \cos(4\pi t/5)$

**(b)** $x(t) = \cos(2\pi(t-4)) + \text{sen } 5\pi t$

**(c)** $x(t) = \cos 2\pi t + \text{sen } 10t$

**(d)** $x[n] = \text{sen } 10n$

**(e)** $x[n] = \text{sen}(10\,\pi n/3)$

**(f)** $x[n] = \cos(\pi n^2)$ (*Pista:* para obtener $n^2$, cuando $n$ está almacenada en un vector, escriba n.^2.)

**1.10.** Para el filtro PM de $N$ puntos, dado por la relación de entrada/salida (1.16), donde $N$ es cualquier entero positivo, deduzca una expresión matemática para la respuesta de salida del filtro $y[n]$, cuando la entrada $x[n]$ es

**(a)** la función pulso unitario $\delta[n]$.

**(b)** la función escalón unitario $u[n]$ de tiempo discreto.

**(c)** la función rampa unitaria $r[n]$ de tiempo discreto.

**1.11.** En el problema 1.10c, determine el retraso en el tiempo de la respuesta del filtro PM en el punto $N$ $y[n]$, cuando $n > N$.

**1.12.** Escriba un archivo M (M-file) de MATLAB para calcular la respuesta de salida $y[n]$ del filtro PM en el punto 6, de la entrada $x[n] = 5\,\text{sen}(\pi n/10 + \pi/4)$, para $0 \le n \le 69$. Exprese su respuesta mediante el archivo M y la gráfica de MATLAB correspondiente.

**1.13.** Para la solución al problema 1.12, determine el retraso en el tiempo para la respuesta del filtro.

**1.14.** Considere el sistema dado por la relación de entrada/salida

$$y[n] = \frac{32}{63}\left[x[n] + \frac{1}{2}x[n-1] + \frac{1}{4}x[n-2] + \frac{1}{8}x[n-3] + \frac{1}{16}x[n-4] + \frac{1}{32}x[n-5]\right]$$

**(a)** Cuando $x[n]$ es igual a una constante $c$, para toda $n \ge 0$, muestre que $y[n]$ es igual a $c$ para toda $n \ge 5$.

**(b)** Escriba un archivo M de MATLAB para calcular la respuesta de salida $y[n]$, que resulta de la entrada $x[n] = 5\,\text{sen}(\pi n/10 + \pi/4)$, para $0 \le n \le 69$. Exprese su respuesta mediante el archivo M y la gráfica de MATLAB correspondiente.

**(c)** Compare el resultado que obtuvo en el inciso (b) con la respuesta al filtro PM que obtuvo en el problema 1.12.

**1.15.** La contraparte continua del filtro PM de tiempo discreto en el punto $N$, es el filtro PM de tiempo continuo en el intervalo $I$, dado por la relación de entrada/salida

$$y(t) = \frac{1}{I}\int_{t-I}^{t} x(\lambda)\, d\lambda$$

donde $I$ es un número positivo (el intervalo sobre el que se integra la entrada). Deduzca una expresión matemática para la respuesta de salida del filtro $y(t)$, cuando la entrada $x(t)$ es

**(a)** el impulso unitario $\delta(t)$.

**(b)** la función escalón unitario $u(t)$ de tiempo continuo.

**(c)** la función rampa unitaria $r(t)$ de tiempo continuo.

**(d)** Para su resultado en el inciso $c$, determine el retraso en la respuesta del filtro cuando $t > I$.

**1.16.** Utilizando el procedimiento dado en la sección 1.2, descargue de la Web los precios de cierre de QQQQ para el periodo de 60 días hábiles, del 27 de abril de 2004 al 22 de julio de 2004. Proporcione la gráfica MATLAB para $9 \leq n \leq 60$ para los precios de cierre y para la respuesta del filtro PM en el día 9.

**1.17.** Determine si estos sistemas de tiempo continuo son o no causales, y si tienen o no memoria. Justifique sus respuestas. En los siguientes incisos, $x(t)$ es una entrada cualquiera y $y(t)$ es la respuesta de salida a $x(t)$:

**(a)** $y(t) = |x(t)| = \begin{cases} x(t) & \text{cuando } x(t) \geq 0 \\ -x(t) & \text{cuando } x(t) < 0 \end{cases}$

**(b)** $y(t) = e^{x(t)}$

**(c)** $y(t) = (\operatorname{sen} t)x(t)$

**(d)** $y(t) = \begin{cases} x(t) & \text{cuando } |x(t)| \leq 10 \\ 10 & \text{cuando } |x(t)| > 10 \end{cases}$

**(e)** $y(t) = \displaystyle\int_0^t (t - \lambda)x(\lambda)\, d\lambda$

**(f)** $y(t) = \displaystyle\int_0^t \lambda x(\lambda)\, d\lambda$

**1.18.** Demuestre que el sistema integral y el sistema diferencial dados a continuación, son lineales

**(i)** $y(t) = \displaystyle\int_0^t x(\lambda)\, d\lambda$

**(ii)** $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$

**1.19.** Para cada uno de los sistemas del problema 1.17, determine si el sistema es lineal o no. Justifique sus respuestas.

**1.20.** Para cada uno de los sistemas del problema 1.17, determine si el sistema es o no variante en el tiempo. Justifique sus respuestas.

**1.21.** Se dice que un sistema de tiempo continuo tiene una *zona muerta*, si la respuesta de salida $y(t)$ es cero para cualquier entrada $x(t)$, con $|x(t)| < A$, donde $A$ es una constante llamada *umbral*. Un ejemplo es un motor de cd que no es capaz de proporcionar torca alguna, a menos que el voltaje de entrada exceda un valor de umbral. Demuestre que cualquier sistema con una zona muerta es no lineal.

**1.22.** Determine si el circuito con el diodo ideal de la figura P1.22 es causal o no causal, lineal o no lineal, y si es o no variante en el tiempo. Justifique sus respuestas.

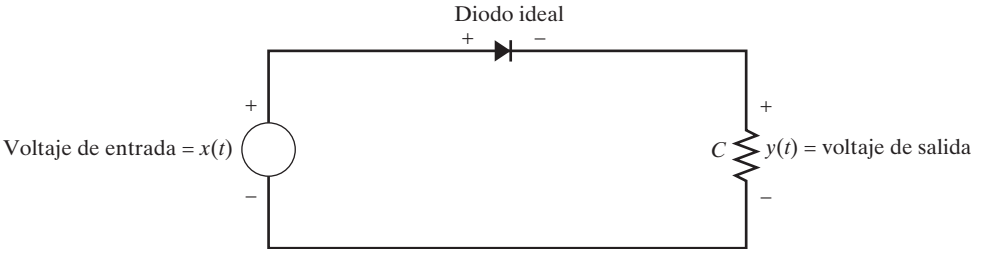



FIGURA P1.22

**1.23.** Suponga que $x(t)$ es la entrada de un sistema lineal invariante en el tiempo, con una salida correspondiente $y(t)$. Demuestre que el sistema tiene las siguientes propiedades:

**(a)** Una entrada de $x_1(t) = \int_0^t x(\lambda)\, d\lambda$ al mismo sistema arroja una salida de $y_1(t) = \int_0^t y(\lambda)\, d\lambda$.

**(b)** Una entrada de $x_1(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ al mismo sistema arroja una salida de $y_1(t) = \dfrac{dy(t)}{dt}$.

**1.24.** Un sistema lineal de tiempo continuo invariante en el tiempo, responde a las siguientes entradas con las salidas correspondientes: si $x(t) = u(t)$, entonces $y(t) = 2(1 - e^{-t})u(t)$ y, si $x(t) = \cos t$, entonces $y(t) = 1.414\cos(t - \pi/4)$. Encuentre $y(t)$ para las siguientes entradas (*Pista:* utilice el problema 1.23 para el inciso (d)):

**(a)** $x(t) = 2u(t) - 2u(t - 1)$

**(b)** $x(t) = 4\cos(2(t - 2))$

**(c)** $x(t) = 5u(t) + 10\cos(2t)$

**(d)** $x(t) = tu(t)$

**1.25.** Para comprender mejor el concepto de linealidad en sistemas discretos, escriba un archivo M de MATLAB que genere la respuesta de salida $y[n]$ para $0 \leq n \leq 30$ del filtro PM en el día cinco para cada uno de los siguientes casos:

**(a)** Que calcule $y_1[n]$ y proporcione la gráfica de MATLAB de la respuesta a la entrada $x[n] = u[n]$.

**(b)** Que calcule $y_2[n]$ y proporcione la gráfica de MATLAB de la respuesta a la entrada $x[n] = 2u[n]$. Compare esta respuesta con la obtenida en el inciso (a).

**(c)** Que calcule $y_3[n]$ y proporcione la gráfica de MATLAB de la respuesta a la entrada $x[n] = \text{sen}(\pi n/4)u[n]$.

**(d)** Que calcule $y_4[n]$ y proporcione la gráfica de MATLAB para la respuesta a la entrada $x[n] = 2u[n] + \text{sen}(\pi n/4)u[n]$. Compare esta respuesta con $2y_1[n] + y_3[n]$.

**1.26.** Para comprender mejor el concepto de invariancia en el tiempo en los sistemas discretos, escriba un archivo M de MATLAB que genere la respuesta de salida $y[n]$ para $0 \leq n \leq 30$, para las siguientes entradas, para el sistema definido en el problema 1.14:

**(a)** Que calcule $y_1[n]$ y proporcione la gráfica de MATLAB de la respuesta a la entrada $x[n] = u[n]$.

**(b)** Que calcule $y_2[n]$ y proporcione la gráfica de MATLAB de la respuesta a la entrada $x[n] = u[n - 2]$. Compare esta respuesta con la obtenida en el inciso (a).

**(c)** Que calcule $y_3[n]$ y proporcione la gráfica de MATLAB de la respuesta a la entrada $x[n] = \text{sen}(\pi n/4)u[n]$.

**(d)** Que calcule $y_4[n]$ y proporcione la gráfica de MATLAB de la respuesta a la entrada $x[n] = \text{sen}(\pi[n - 4]/4)u[n - 4]$. Compare esta respuesta con $y_3[n - 4]$.

**1.27.** Demuestre que el siguiente sistema es lineal:

$$y[n] = \sum_{i=0}^{n} a_i x[n - i]$$

donde los coeficientes $a_i$ son constantes.

**1.28.** Determine si el sistema definido en el problema 1.14 es causal o no causal, lineal o no lineal, y si es variante o no en el tiempo. Justifique sus respuestas.

**1.29.** Determine si los siguientes sistemas discretos son causales o no causales, si tienen o no memoria, si son lineales o no lineales, y si son variantes o no en el tiempo. Justifique sus respuestas. En los siguientes incisos, $x[n]$ es una entrada cualquiera, y $y[n]$ es la respuesta a $x[n]$.

**(a)** $y[n] = x[n] + 2x[n - 2]$

**(b)** $y[n] = x[n] + 2x[n + 1]$

**(c)** $y[n] = nx[n]$

**(d)** $y[n] = u[n]x[n]$

**(e)** $y[n] = |x[n]|$

**(f)** $y[n] = \text{sen } x[n]$

**(g)** $y[n] = \sum_{i=0}^{n} (0.5)^n x[i], \; n \geq 0$

CAPÍTULO

2

# Modelos de sistemas con dominio de tiempo

Este capítulo trata sobre los sistemas de tiempo continuo, de tiempo discreto e invariantes en el tiempo, dados por modelos en el dominio del tiempo que describen la relación entre la señal de entrada y la señal de salida resultante del sistema. El desarrollo comienza en la sección 2.1 con la representación de la convolución de los sistemas de tiempo discreto invariantes en el tiempo, y en la sección 2.2 abordamos la evaluación de la operación de convolución para señales de tiempo discreto. En la sección 2.3 nos enfocamos a los sistemas de tiempo discreto especificados por una ecuación de diferencias de entrada/salida lineal con coeficientes constantes, que puede resolverse de una manera muy fácil mediante la recursividad. Implementamos el proceso de recursividad con un programa de MATLAB que produce una solución mediante software del sistema de tiempo discreto en consideración. Más adelante, en la sección 2.4 estudiamos los sistemas lineales causales de tiempo continuo invariantes en el tiempo, en términos de ecuaciones diferenciales de entrada/salida; mostramos cómo es que surgen tales ecuaciones, cuando se modelan circuitos eléctricos y sistemas mecánicos. En la sección 2.5 mostramos cómo resolver una ecuación diferencial de entrada/salida mediante métodos numéricos y el manipulador simbólico de MATLAB. En la sección 2.6 estudiamos la convolución de señales de tiempo continuo y la representación de convolución de sistemas de tiempo continuo lineales invariantes en el tiempo. En la sección 2.7 proporcionamos un resumen del capítulo.

## 2.1 REPRESENTACIÓN DE ENTRADA/SALIDA DE LOS SISTEMAS DE TIEMPO DISCRETO

En la sección 1.4 del capítulo 1, definimos el filtro de promedio móvil (PM) de $N$ puntos, mediante la relación de entrada/salida

$$y[n] = \frac{1}{N}\big[x[n] + x[n-1] + x[n-2] + \ldots + x[n-N+1]\big] \tag{2.1}$$

donde $N$ es un entero positivo. Observe que (2.1) puede expresarse de la forma

$$y[n] = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{N} x[n-i] \tag{2.2}$$

La relación dada por (2.2) o (2.1) con frecuencia se conoce como la *representación de entrada/salida* del sistema. Éste es un ejemplo de un modelo de dominio de tiempo, ya que se expresa en términos de la entrada $x[n]$ y de la salida $y[n]$ del sistema, las cuales son señales de tiempo.

Es evidente que podemos generalizar (2.2) para que sea una clase más amplia de los sistemas de tiempo discreto lineales invariantes en el tiempo, si consideramos la representación de entrada/salida

$$y[n] = \sum_{i=0}^{N-1} w_i x[n - i] \tag{2.3}$$

donde $w_i$ (es decir, $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{N-1}$) son números reales, y se conocen como *ponderaciones* de la combinación lineal dada por (2.3). Observe que si todas las ponderaciones son iguales a $1/N$, es decir, $w_1 = 1/N$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, N - 1$, entonces (2.3) se reduce a (2.2). Así, el filtro PM de $N$ puntos es un ejemplo de un sistema cuya representación de entrada/salida puede escribirse de la forma (2.3).

### 2.1.1 Filtro de promedio móvil ponderado exponencialmente

Otro ejemplo de un sistema que puede expresarse en la forma (2.3) es el *filtro de promedio móvil de N puntos, ponderado exponencialmente* definido por

$$y[n] = \sum_{i=0}^{N-1} a(b^i x[n - i]) \tag{2.4}$$

donde $b$ es un número real con $0 < b < 1$, y $a$ es una constante positiva dada por

$$a = \frac{1 - b}{1 - b^N} \tag{2.5}$$

Observe que si $b = 0$, entonces $a = 1$, y (2.4) se reduce a $y[n] = x[n]$, en cuyo caso no existe un filtrado a la señal de entrada.

De (2.4) vemos que los pesos del filtro de promedio móvil de $N$ puntos ponderado exponencialmente (PMPE), están dados por

$$w_i = ab^i, i = 0, 1, 2, \ldots, N - 1 \tag{2.6}$$

Aquí, el término "ponderado exponencialmente" se refiere al exponente de $b$ en los pesos (ponderaciones) dados por (2.6). Debido a que $0 < b < 1$, las ponderaciones dadas por (2.6) disminuyen en valor, conforme $i$ se incrementa. Por ejemplo, si $N = 3$ y $b = 0.5$, entonces a partir de (2.5) se deriva que

$$a = \frac{1 - 0.5}{1 - 0.5^3} = \frac{0.5}{0.875} = 0.571$$

y utilizando (2.6) se obtiene $w_0 = a = 0.571$, $w_1 = ab = 0.286$, y $w_2 = ab^2 = 0.143$. Así, el filtro PMPE en el punto 3, con $b = 0.5$ está dado por la relación de entrada-salida

$$y[n] = 0.571x[n] + 0.286x[n - 1] + 0.143x[n - 2] \tag{2.7}$$

De (2.7) vemos que al calcular la salida del filtro $y[n]$, se da una "ponderación" más grande para los valores más recientes de la entrada $x[n]$, mientras que en el filtro PM de 3 puntos se da la misma ponderación para todos los valores de entrada; es decir, en el filtro PM de 3 puntos la salida es

$$y[n] = 0.333x[n] + 0.333x[n - 1] + 0.333x[n - 2]$$

Debido a la ponderación exponencial, el filtro PMPE de $N$ puntos dado por (2.4) tiene una respuesta más rápida a las variaciones de tiempo en la entrada del filtro $x[n]$, en comparación con el filtro PM de $N$ puntos. En otras palabras, para un valor fijo de $N$, el retraso de tiempo a través del filtro PMPE es menor que el de un filtro PM; sin embargo, en general, el filtro PM remueve mejor el ruido que un filtro PMPE. Para un valor dado de $N$, el retraso de tiempo a través del filtro PMPE depende de la elección de $b$: entre más pequeño sea $b$, será menor el retraso. En particular, si $b = 0$, entonces, como vimos antes, la relación de entrada/salida es $y[n] = x[n]$ y, por lo tanto, en este caso no existe retraso en el sistema. En el siguiente ejemplo, el PMPE se aplica al filtrado de información de precios para el fondo índice QQQQ.

---

### Ejemplo 2.1 Filtrado PMPE de información de precios QQQQ

Como en el ejemplo 1.4 del capítulo 1, consideraremos el precio de cierre $c[n]$ de QQQQ para un periodo de 50 días hábiles, es decir, del 1 de marzo de 2004 al 10 de mayo de 2004. Aplicaremos la serie de tiempo $c[n]$ a un filtro PMPE en el día 11, con $b = 0.7$. Después calculamos la salida del filtro $y[n]$, evaluando (2.4). Para hacerlo, calculamos las ponderaciones $w_i = ab^i$ y después se acomodan en un vector fila $w$ que tiene la forma

$$w = [w_{N-1} \quad w_{N-2} \quad w_{N-3} \quad \cdots \quad w_0]$$

Después $y[n]$ se obtiene con la multiplicación en MATLAB de `w*c(n-10:n)`. Los comandos de MATLAB para calcular la salida del filtro $y[n]$ para $11 \leq n \leq 50$ son los siguientes:

```
c=csvread('QQQQdata2.csv',1,4,[1 4 50 4]);
b=0.7;
a=(1-b)/(1-b^11);
i=1:11;
w=a*(b.^(11-i));
for n=11:50;
  y(n)=w*c(n-10:n);
end;
n=11:50;
plot(n,c(n),n,c(n),'o',n,y(n),n,y(n),'*')
grid
xlabel('Day(n)')
ylabel('c[n] and y[n]')
```

La gráfica resultante en MATLAB para la entrada del filtro $c[n]$, y la salida $y[n]$ se da en la figura 2.1, con los valores de $c[n]$ graficados con o's y los valores de $y[n]$ graficados con *'s. Al comparar la figura 1.27 del capítulo 1 con la figura 2.1, vemos que hay un menor retraso a través del filtro PMPE en el día 11 con $b = 0.7$, que con el filtro PM en el día 11. Para ver esto con mayor claridad, en la figura 2.2 combinamos la salida del filtro PM en el día 11 con la gráfica de $c[n]$ y la salida del filtro PMPE en el día 11. Graficamos los valores de la respuesta del filtro PM con +'s.

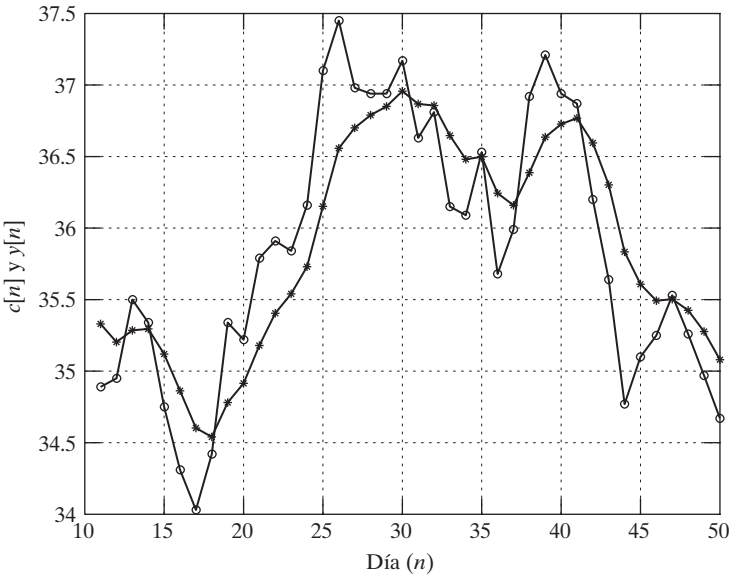



**FIGURA 2.1**
Gráfica en MATLAB para la entrada $c[n]$ y la salida $y[n]$ de un filtro PMPE.

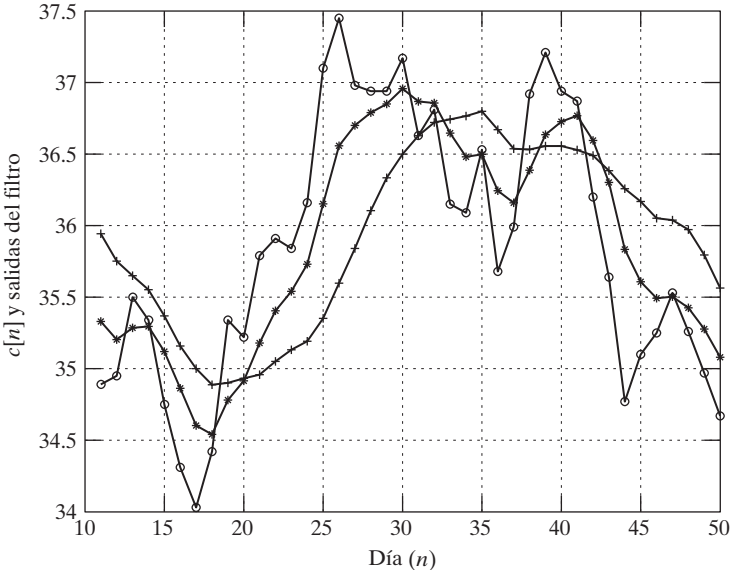



**FIGURA 2.2**
Gráfica en MATLAB para $c[n]$ y salidas del filtro.

### 2.1.2 Una clase general de sistemas

La clase de sistemas dada por la representación de entrada/salida (2.3), puede generalizarse aún más si reemplazamos el índice superior $N - 1$ de la sumatoria por $n$; es decir, la relación entrada/salida ahora está dada por

$$y[n] = \sum_{i=0}^{n} w_i x[n - i], \; n \geq 0 \tag{2.8}$$

donde, en general, existe un número infinito de ponderaciones diferentes de cero $w_0$, $w_1$, $w_2$,…. Se hace evidente que cualquier sistema de tiempo discreto lineal invariante en el tiempo con la entrada $x[n]$ igual a cero para toda $n < 0$, puede expresarse de la forma (2.8).

Un sistema con la representación de entrada/salida (2.8) por lo general se expresa en términos de su respuesta al pulso unitario, la cual se define como sigue: la *respuesta al pulso unitario*, denotada por $h[n]$, es la respuesta de salida del sistema que resulta de aplicar el pulso unitario $\delta[n]$; es decir, $x[n] = \delta[n]$. (Recuerde que $\delta[0] = 1$ y $\delta[n] = 0$ para toda $n \neq 0$.) Observe que, debido a que $\delta[n] = 0$ para $n = -1, -2,\ldots$, por la propiedad de causalidad, la respuesta al pulso unitario $h[n]$ debe ser cero para todos los enteros $n < 0$ (vea la sección 1.5 del capítulo 1).

Para calcular la respuesta al pulso unitario para un sistema dado por (2.8), sólo inserte $x[n] = \delta[n]$ en (2.8), lo que resulta en

$$h[n] = \sum_{i=0}^{n} w_i \delta[n - i], \; n \geq 0 \tag{2.9}$$

Ahora, debido a que $\delta[n - i] = 0$ para toda $i \neq n$, y $\delta[n - i] = 1$ cuando $i = n$, (2.9) se reduce a

$$h[n] = w_n, \; n \geq 0$$

Por lo tanto, el valor $h[n]$ de la respuesta al pulso unitario en el tiempo $n$ es igual al peso $w_n$.

---

**Ejemplo 2.2 Respuestas al pulso unitario de los filtros PM y PMPE**

Del desarrollo anterior, las ponderaciones del filtro PM en el día 11 están dadas por $w_i = 1/11$ para $i = 0, 1,\ldots, 10$, y por (2.5) y (2.6), los pesos del filtro PMPE en el día 11 con $b = 0.7$, están dados por $w_i = ab^i = (0.3061)(0.7)^i$, $i = 0, 1,\ldots,10$. Para ambos filtros, $w_i = 0$ para $i \geq 11$. Entonces, establecer $h[n] = w_n$, $n = 0, 1,\ldots, 10$, y $h[n] = 0$ para $n \geq 11$ y $n \leq -1$ arroja las gráficas de línea de las respuestas al pulso unitario para los filtros PM y PMPE en el día 11, que aparecen en la figura 2.3. En la figura, $h[n]$ es la respuesta al pulso unitario del filtro PM en el día 11, y $h2[n]$ es la respuesta al pulso unitario del filtro PMPE en el día 11 con $b = 0.7$. Observe que las respuestas al pulso unitario de los filtros del día 11 son señales de duración finita; es decir, $h[n]$ es diferente de cero sólo para un número finito de valores de $n$.

---

Si rescribimos (2.8) en términos de la respuesta al pulso unitario $h[n]$ obtenemos

$$y[n] = \sum_{i=0}^{n} h[i] x[n - i], \; n \geq 0 \tag{2.10}$$

La operación definida por la expresión

$$\sum_{i=0}^{n} h[i] x[n - i]$$

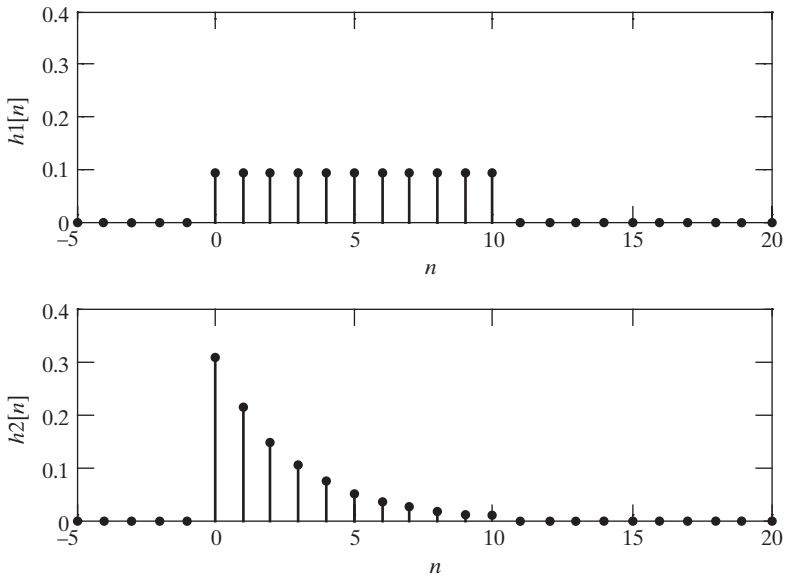



**FIGURA 2.3**
Respuestas al pulso unitario del filtro PM en el día 11, $h1[n]$, y del filtro PMPE $h2[n]$.

se conoce como la *convolución* de $h[n]$ y $x[n]$, y se denota con el símbolo "*"; es decir,

$$h[n] * x[n] = \sum_{i=0}^{n} h[i]x[n - i]$$

Si rescribimos (2.10) en términos del símbolo de convolución, obtenemos

$$y[n] = h[n] * x[n], n \geq 0 \tag{2.11}$$

Por (2.11), la respuesta de salida $y[n]$ que resulta de la entrada $x[n]$ con $x[n] = 0$ para toda $n < 0$ es igual a la convolución de la respuesta al pulso unitario $h[n]$ con la entrada $x[n]$. La ecuación (2.11) [o (2.10)] se conoce como *representación de convolución* del sistema. Éste es un modelo de dominio de tiempo, debido a que los componentes de (2.11) son funciones del índice del tiempo discreto en el tiempo $n$.

Una consecuencia interesante de la representación de convolución (2.10) es que el sistema está determinado completamente por la respuesta al pulso unitario $h[n]$. En particular, si conocemos $h[n]$, la respuesta de salida resultante de cualquier entrada $x[n]$ puede calcularse, evaluando (2.10). En la siguiente sección estudiaremos cómo evaluar la operación de convolución.

## 2.2 CONVOLUCIÓN DE SEÑALES DE TIEMPO DISCRETO

En la sección anterior, definimos la convolución de una entrada $x[n]$ y de la respuesta pulso unitario $h[n]$, con $x[n]$ y $h[n]$ igual a cero para toda $n < 0$. En esta sección definimos la

operación de convolución para cualesquiera señales de tiempo discreto $x[n]$ y $v[n]$, que no necesariamente son cero para $n < 0$.

Dadas dos señales de tiempo discreto $x[n]$ y $v[n]$, la convolución de $x[n]$ y $v[n]$ se define como

$$x[n] * v[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]v[n - i] \tag{2.12}$$

La sumatoria del lado derecho de (2.12) se conoce como *suma de convolución*. Es importante notar que la operación de convolución $x[n]*v[n]$ es conmutativa; es decir, $x[n]*v[n] = v[n]*x[n]$, y por lo tanto,

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]v[n - i] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} v[i]x[n - i]$$

Si $x[n]$ y $v[n]$ son cero para todos los enteros $n < 0$, entonces $x[i] = 0$ para todos los enteros $i < 0$, y $v[n - i] = 0$ para todos los enteros $n - i < 0$ (o $n < i$). Entonces, la sumatoria sobre $i$ en (2.12) puede tomarse de $i = 0$ hasta $i = n$, y la operación de convolución está dada por

$$x[n] * v[n] = \begin{cases} 0, & n = -1, -2, \ldots \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n} x[i]v[n - i], & n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{2.13}$$

o por la propiedad conmutativa,

$$x[n] * v[n] = \begin{cases} 0, & n = -1, -2, \ldots \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n} v[i]x[n - i], & n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{2.14}$$

Si las señales $x[n]$ y $v[n]$ están dadas por expresiones matemáticas sencillas, la convolución $x[n]*v[n]$ puede calcularse de manera analítica, insertando $x[n]$ y $v[n]$ en (2.13) o (2.14); en el siguiente ejemplo ilustramos esto.

---

**Ejemplo 2.3 Forma analítica**

Suponga que $x[n] = a^n u[n]$ y $v[n] = b^n u[n]$, donde $u[n]$ es la función de tiempo discreto escalón unitario, y $a$ y $b$ son números reales fijos diferentes de cero. Al sustituir $x[i] = a^i u[i]$ y $v[n - i] = b^{n-i} u[n - i]$ en (2.13), obtenemos

$$x[n] * v[n] = \sum_{i=0}^{n} a^i u[i] b^{n-i} u[n - i], \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.15}$$

Ahora, $u[i] = 1$ y $u[n - i] = 1$ para todos los valores enteros de $i$ en el rango $i = 0$ a $i = n$ y, por lo tanto, (2.15) se reduce a

$$x[n] * v[n] = \sum_{i=0}^{n} a^i b^{n-i} = b^n \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{a}{b}\right)^i, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.16}$$

Si $a = b$,

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{a}{b}\right)^i = n + 1$$

y

$$x[n] * v[n] = b^n(n + 1) = a^n(n + 1), n = 0, 1, 2, \ldots$$

Si $a \neq b$,

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{a}{b}\right)^i = \frac{1 - (a/b)^{n+1}}{1 - a/b} \tag{2.17}$$

Podemos verificar la relación (2.17) si multiplicamos ambos lados de (2.17) por $1 - (a/b)$. Si sustituimos (2.17) en (2.16), obtenemos (suponiendo que $a \neq b$)

$$\begin{aligned} x[n] * v[n] &= b^n \frac{1 - (a/b)^{n+1}}{1 - a/b} \\ &= \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

---

Es fácil generalizar (2.13) o (2.14) al caso en que $x[n]$ y $v[n]$ no son necesariamente cero para todos los enteros $n < 0$. En particular, suponga que $x[n] = 0$ para toda $n < Q$ y $v[n] = 0$ para toda $n < P$, donde $P$ y $Q$ son enteros positivos o negativos. En este caso, la operación de convolución (2.12) puede escribirse de la forma

$$x[n] * v[n] = \begin{cases} 0, & n < P + Q \\ \displaystyle\sum_{i=Q}^{n-P} x[i]v[n - i], & n \geq P + Q \end{cases} \tag{2.18}$$

Observe que la suma de convolución en (2.18) aún es finita y, por lo tanto, la convolución $x[n]*v[n]$ existe.

La operación de convolución (2.18) puede evaluarse con un arreglo de la forma:

| | $x[Q]$ | $x[Q + 1]$ | $x[Q + 2]$ | $x[Q + 3]$ |
|---|---|---|---|---|
| $v[P]$ | $v[P]x[Q]$ | $v[P]x[Q + 1]$ | $v[P]x[Q + 2]$ | $v[P]x[Q + 3]$ |
| $v[P + 1]$ | $v[P + 1]x[Q]$ | $v[P + 1]x[Q + 1]$ | $v[P + 1]x[Q + 2]$ | $v[P + 1]x[Q + 3]$ |
| $v[P + 2]$ | $v[P + 2]x[Q]$ | $v[P + 2]x[Q + 1]$ | $v[P + 2]x[Q + 2]$ | $v[P + 2]x[Q + 3]$ |
| $v[P + 3]$ | $v[P + 3]x[Q]$ | $v[P + 3]x[Q + 1]$ | $v[P + 3]x[Q + 2]$ | $v[P + 3]x[Q + 3]$ |

La parte superior del arreglo está etiquetada con los valores $x[Q]$, $x[Q+1]$,..., y la parte izquierda está etiquetada con los valores $v[P]$, $v[P+1]$,.... Los elementos del arreglo se completan mediante la multiplicación de las etiquetas correspondientes de columna y fila. Los valores de $y[n]$ de la convolución $x[n]*v[n]$ se determinan entonces con la suma de los elementos de las diagonales, donde la diagonal que inicia en $x[Q+i]$ y termina en $v[P+i]$ se suma para arrojar $y[Q+P+i]$.

En el siguiente ejemplo mostramos este proceso.

---

### Ejemplo 2.4 Método de arreglo

Suponga que $x[n] = 0$ para $n < -1, x[-1] = 1, x[0] = 2, x[1] = 3, x[2] = 4, x[3] = 5$,..., y $v[n] = 0$ para $n < -2, v[-2] = -1, v[-1] = 5, v[0] = 3, v[1] = -2, v[2] = 1$,.... En este caso, $Q = -1, P = -2$, y el arreglo es el siguiente:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| −1 | −1 | −2 | −3 | −4 | −5 |
| 5 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| 3 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |
| −2 | −2 | −4 | −6 | −8 | −10 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

Los valores $y[n]$ de la convolución $x[n]*v[n]$ se calculan sumando los elementos de las diagonales que se indican mediante líneas punteadas, iniciando con el elemento de la esquina superior izquierda del arreglo. Al sumar los índices de los primeros elementos de $x[n]$ y $v[n]$, los cuales son $n = -1$ y $n = -2$, se determina el índice del primer elemento en la secuencia de $y$. Debido a que $(-1)+(-2)= -3$, el índice para el primer elemento de $y$ es $-3$. Por tanto, el primer valor diferente de cero para $y[n]$ es el valor $y[-3]$, que es igual al elemento $-1$ de la diagonal. El siguiente valor $y[-2]$ es igual a la suma $-2 + 5 = 3$, $y[-1]$ es igual a la suma de $-3 + 10 + 3 = 10$, $y[0]$ es igual a la suma $-4 + 15 + 6 - 2 = 15$, $y[1]$ es igual a la suma de $-5 + 20 + 9 - 4 + 1 = 21$, etcétera. En este ejemplo, $y[n] = 0$ para $n < -3$.

---

Convolución de señales de tiempo discreto

La convolución de dos señales discretas puede realizarse con el archivo M de MATLAB, `conv`. Para ilustrar esto, considere la convolución del pulso $p[n] = 0$ consigo mismo, donde $p[n]$ está definido $p[n] = 1$ para $0 \leq n \leq 10$, $p[n] = 0$ para cualquier otro $n$. En este caso, los comandos de MATLAB para calcular la convolución son:

```
p = [0 ones(1,10) zeros(1,5)]; % corresponds to n=-1 to n=14
x = p; v = p;
y = conv(x,v);
n = -2:25;
stem(n,y(1:length(n)),'filled')
```

El comando `y = conv(x,v)` de este ejemplo da como resultado un vector `y` de longitud 32. Como en el caso del método de arreglo, el índice $n$ correspondiente al primer elemento del vector `y` se determina mediante la suma de los índices de los primeros elementos de los vec-

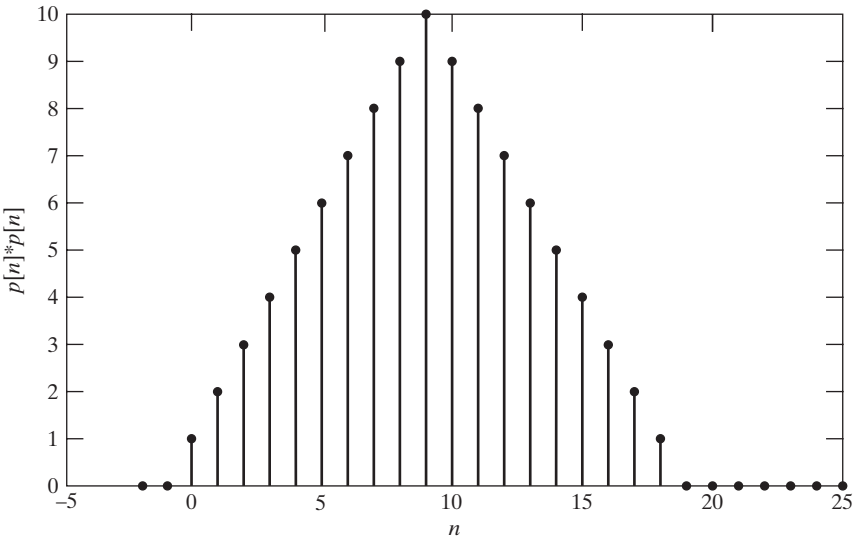



**FIGURA 2.4**
Convolución del pulso consigo mismo.

tores `x` y `v`, lo que da como resultado el primer elemento de `y`, que corresponde a $y[-2]$. Después se grafican los valores de $n = -2$ hasta $n = 25$, lo que da como resultado la gráfica de tallo que aparece en la figura 2.4. Invitamos al lector a que lea los comentarios del tutorial de MATLAB que se encuentra en el sitio Web.

### 2.2.1 Cálculo de la salida del sistema

Considere un sistema de tiempo discreto lineal invariante en el tiempo y causal, con $x[n] = 0$ para $n < 0$. Debido a que la salida $y[n]$ es igual a la convolución de tiempo discreto $h[n]*x[n]$ dada por (2.10), la respuesta $y[n]$ para cualquier rango finito de valores de $n$ puede calcularse con el archivo M de MATLAB `conv`. En el siguiente ejemplo ilustramos el procedimiento.

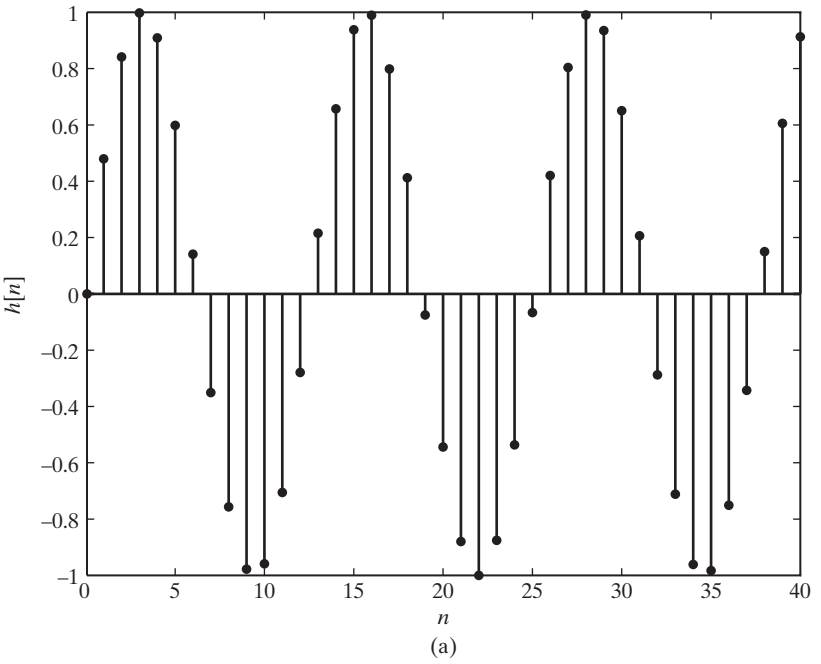
---

**Ejemplo 2.5 Cálculo de la respuesta de salida mediante MATLAB**

Suponga que la respuesta al pulso unitario $h[n]$ es igual a $\text{sen}(0.5n)$ para $n \geq 0$, y la salida $x[n]$ es igual a $\text{sen}(0.2n)$ para $n \geq 0$. La figura 2.5 muestra las gráficas de $h[n]$ y $x[n]$. Ahora, para calcular la respuesta $y[n]$ para $n = 0, 1, \ldots, 40$, utilice los comandos

```
n=0:40;
x = sin(.2*n);
h = sin(.5*n);
y = conv(x,h);
stem(n,y(1:length(n)),'filled')
```

La figura 2.6 muestra una gráfica generada con MATLAB de los valores de respuesta.



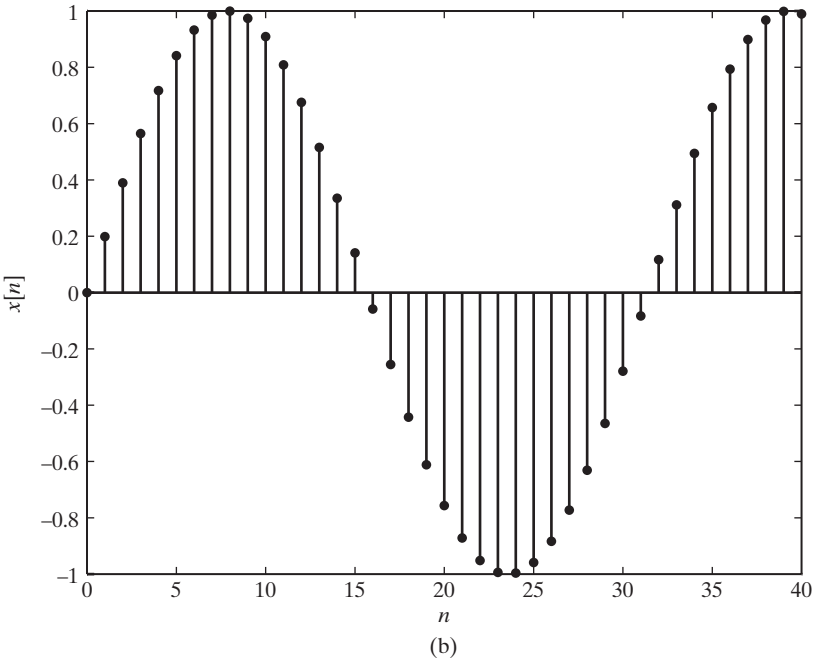




**FIGURA 2.5**
Gráficas del ejemplo 2.5 (a) $h[n]$, y (b) $x[n]$.

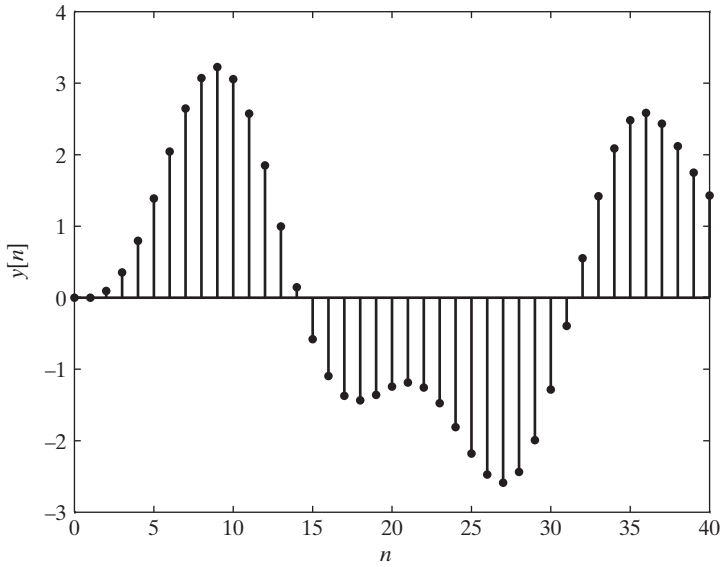



**FIGURA 2.6**
Gráfica de la respuesta de salida del ejemplo 2.5.

**Sistemas no causales.** Si el sistema dado es no causal, la respuesta al pulso unitario $h[n]$ no será cero para $n < 0$, y como resultado, la sumatoria de (2.10) para calcular $y[n]$ debe ejecutarse desde $i = 0$ hasta $i = \infty$ (no $i = n$). Además, si la entrada $x[n]$ es diferente de cero para valores de $n$ en el rango 0 a $-\infty$, la sumatoria de (2.10) debe iniciar en $i = -\infty$. Así, la expresión de convolución de entrada/salida para un sistema no causal (con $x[n] \neq 0$ para $n < 0$) está dada por

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i]x[n - i] \tag{2.19}$$

Es interesante destacar que, aunque (2.19) es la relación de entrada/salida para el sistema, en general esta ecuación no puede calcularse, ya que es una suma dos veces infinita; es decir, una sumatoria infinita no puede evaluarse en un número finito de pasos (computacionales).

## 2.3 MODELOS DE ECUACIONES DE DIFERENCIAS

En muchas aplicaciones, un sistema de tiempo discreto lineal invariante en el tiempo y causal está dado por una ecuación de diferencias de entrada/salida, en lugar de un modelo de convolución de entrada/salida. Por ejemplo, el reembolso de un préstamo bancario puede modelarse con una ecuación diferencial de la siguiente manera: con $n = 1, 2, \ldots$, la entrada $x[n]$ es el monto del pago en el enésimo mes, y la salida $y[n]$ es el saldo del préstamo después del enésimo mes. Aquí $n$ es el índice del tiempo que denota el mes, y la entrada $x[n]$ y la salida $y[n]$ son señales de tiempo discreto que son funciones de $n$. La condición inicial $y[0]$ es el monto del préstamo. Por lo general, los pagos de un préstamo $x[n]$ son constantes; es decir, $x[n] = c, n = 1, 2, 3, \ldots$, donde $c$ es una constante. En este ejemplo, se permite que $x[n]$ varíe mes con mes (es decir, los pagos pueden no ser iguales).

El reembolso del préstamo se describe con la ecuación de diferencias de entrada/salida

$$y[n] - \left(1 + \frac{I}{12}\right)y[n-1] = -x[n], \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.20}$$

donde $I$ es la tasa de interés anual en forma decimal. Por ejemplo, si la tasa fuera 10 por ciento, $I$ sería igual a 0.1. El término $(I/12)y[n-1]$ de (2.20) es el interés sobre el préstamo en el enésimo mes; por lo tanto, en el modelo dado por (2.20), el interés se compone mensualmente. La ecuación (2.20) es una *ecuación de diferencias lineal de primer orden*; es la ecuación de diferencias de entrada/salida del sistema que consiste en el proceso de reembolso de un préstamo. Es importante observar que la respuesta de salida $y[n]$ en (2.20) es la respuesta que resulta de la aplicación de la entrada $x[n]$ para $n \geq 1$ y la condición inicial $y[0]$. Esta formulación difiere del modelo de convolución de entrada/salida en que este último no tiene condiciones iniciales.

Se puede calcular la salida $y[n]$ al resolver recursivamente (2.20) de la siguiente manera. Primero, rescriba (2.20) de la forma

$$y[n] = \left(1 + \frac{I}{12}\right)y[n-1] - x[n] \tag{2.21}$$

Ahora, al sustituir $n = 1$ en (2.21) tenemos

$$y[1] = \left(1 + \frac{I}{12}\right)y[0] - x[1] \tag{2.22}$$

Al sustituir $n = 2$ en (2.21) tenemos

$$y[2] = \left(1 + \frac{I}{12}\right)y[1] - x[2] \tag{2.23}$$

Si sustituimos $n = 3$ en (2.21),

$$y[3] = \left(1 + \frac{I}{12}\right)y[2] - x[3] \tag{2.24}$$

Si continuamos de esta manera, podemos calcular $y[n]$ para cualquier rango finito de valores de $n$. De (2.22) a (2.24), vemos que el siguiente valor de la salida se calcula a partir del valor presente de la salida más un término de entrada. Es por esto que al proceso se le llama *recursividad*. En este ejemplo, la recursividad es de primer orden.

La figura 2.7 presenta un programa de MATLAB para desarrollar la recursividad definida por (2.21). Las entradas del programa son el monto del préstamo, la tasa de interés, y el pago mensual. La instrucción "$y = [\,]$;" se utiliza para inicializar $y$ como un vector sin elementos. Los elementos de $y$ se calculan entonces de manera recursiva para que sea el saldo

```
% Programa de saldo de un préstamo
% Programa que calcula el saldo de un préstamo y[n]
y0 = input ('Amount of loan ');
I = input ('Yearly Interest rate, in decimal ');
c = input ('Monthly loan payment '); % x[n] = c
y = [ ];            % define a y como un vector vacío
y(1) = (1 + (I/12))*y0 - c;
for n = 2:360,
    y(n) = (1 + (I/12))*y(n-1) - c;
    if y(n) < 0, break, end
end
```

**FIGURA 2.7**
Programa en MATLAB para calcular el saldo de un préstamo.

del préstamo al final del enésimo mes, donde el índice del vector corresponde al mes $n$. Observe que en MATLAB los elementos de los vectores se denotan con paréntesis. El programa continúa en un ciclo hasta que el saldo del préstamo es negativo, lo que significa que el préstamo está pagado.

Como un ejemplo, el programa MATLAB se ejecutó con $y[0] = \$6000$, tasa de interés igual a 12 por ciento, y pago mensual de \$200 (por lo que $I = 0.12$ y $c = 200$). El saldo resultante $y[n]$ es el que aparece en la tabla 2.1. Cuando el pago mensual es \$300, el saldo del préstamo $y[n]$ es el que se despliega en la tabla 2.2. Observe que en el primer caso, toma 36 meses saldar el préstamo, mientras que en el último caso, el préstamo se paga en 23 meses. Cuando se obtiene un préstamo, por lo general el número de meses del periodo de reembolso está especificado y entonces se determina el pago mensual. Es posible resolver para el pago mensual, mediante la representación (2.20) [o (2.21)], pero aquí no lo hacemos (vea el problema 2.14).

### 2.3.1 Ecuación de diferencias de entrada/salida de orden *N*

La ecuación de diferencias de entrada/salida de primer orden (2.20) se generaliza con facilidad al caso de orden $N$, donde $N$ es cualquier entero positivo. Esto da como resultado una clase de sistemas de tiempo discreto lineales invariantes en el tiempo y causales, dados por la representación de entrada/salida

$$y[n] + \sum_{i=1}^{N} a_i y[n - i] = \sum_{i=0}^{M} b_i x[n - i] \tag{2.25}$$

donde $n$ es el índice del tiempo discreto valuado en reales, $x[n]$ es la entrada, y $y[n]$ es la salida. Aquí suponemos que los coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_N$ y $b_0, b_1, \ldots, b_M$ son constantes. Es importante destacar que el entero $N$ de (2.25) no tiene relación con el valor de $N$ de los filtros PM y PMPE definidos en la sección 1.4 del capítulo 1, y en la sección 2.1 de este capítulo. Este uso doble de la notación "$N$" es muy común en el campo de señales y sistemas, y no debe generar confusión alguna.

**TABLA 2.1** Saldo de préstamo con pagos mensuales de $200

| $n$ | $y[n]$ | $n$ | $y[n]$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $5859.99 | 19 | $3086.47 |
| 2 | 5718.59 | 20 | 2917.33 |
| 3 | 5575.78 | 21 | 2746.51 |
| 4 | 5431.54 | 22 | 2573.97 |
| 5 | 5285.85 | 23 | 2399.71 |
| 6 | 5138.71 | 24 | 2223.71 |
| 7 | 4990.1 | 25 | 2045.95 |
| 8 | 4840 | 26 | 1866.41 |
| 9 | 4688.4 | 27 | 1685.07 |
| 10 | 4535.29 | 28 | 1501.92 |
| 11 | 4380.64 | 29 | 1316.94 |
| 12 | 4224.44 | 30 | 1130.11 |
| 13 | 4066.69 | 31 | 941.41 |
| 14 | 3907.36 | 32 | 750.83 |
| 15 | 3746.43 | 33 | 558.33 |
| 16 | 3583.89 | 34 | 363.92 |
| 17 | 3419.73 | 35 | 167.56 |
| 18 | 3253.93 | 36 | −30.77 |

**TABLA 2.2** Saldo de préstamo con pagos mensuales de $300

| $n$ | $y[n]$ | $n$ | $y[n]$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $5759.99 | 13 | $2685.76 |
| 2 | 5517.59 | 14 | 2412.61 |
| 3 | 5272.77 | 15 | 2136.74 |
| 4 | 5025.5 | 16 | 1858.11 |
| 5 | 4775.75 | 17 | 1576.69 |
| 6 | 4523.51 | 18 | 1292.46 |
| 7 | 4268.75 | 19 | 1005.38 |
| 8 | 4011.43 | 20 | 715.43 |
| 9 | 3751.55 | 21 | 422.59 |
| 10 | 3489.06 | 22 | 126.81 |
| 11 | 3223.95 | 23 | −171.92 |
| 12 | 2956.19 | | |

Las ecuaciones de diferencia de entrada/salida de la forma (2.25) pueden resolverse con un procedimiento numérico directo. Para ser más precisos, la salida $y[n]$ para algún rango finito de valores enteros de $n$ puede calcularse de manera recursiva como sigue. Primero, rescriba (2.25) de la forma

$$y[n] = -\sum_{i=1}^{N} a_i y[n - i] + \sum_{i=0}^{M} b_i x[n - i] \tag{2.26}$$

Después, al establecer $n = 0$ en (2.26) se obtiene

$$y[0] = -a_1y[-1] - a_2y[-2] - \cdots - a_Ny[-N] + b_0x[0] + b_1x[-1] + \cdots + b_Mx[-M]$$

Así, la salida $y[0]$ al tiempo 0 es una combinación lineal de $y[-1]$, $y[-2]$,..., $y[-N]$, y $x[0]$, $x[-1]$,..., $x[-M]$.

Al establecer $n = 1$ en (2.26) se obtiene

$$y[1] = -a_1y[0] - a_2y[-1] - \cdots - a_Ny[-N + 1] + b_0x[1] + b_1x[0] + \cdots + b_Mx[-M + 1]$$

Entonces, $y[1]$ es una combinación lineal de $y[0]$, $y[1]$,..., $y[-N + 1]$ y $x[1]$, $x[0]$,..., $x[-M + 1]$.

Si se continúa este proceso, es claro que el siguiente valor de la salida es una combinación lineal de los $N$ valores pasados de la salida y $M + 1$ valores de la entrada. En cada paso del cálculo es necesario almacenar sólo los $N$ valores pasados de la salida (más, por supuesto, los valores de entrada). Este proceso se conoce como *recursividad de orden N*. Aquí, el término *recursividad* se refiere a la propiedad de que el siguiente valor de la salida se calcula a partir de los $N$ valores anteriores de la salida (más los valores de entrada). El sistema de tiempo discreto definido por (2.25) [o (2.26)], algunas veces se conoce como *sistema de tiempo discreto recursivo* o *filtro digital recursivo*, debido a que su salida puede calcularse recursivamente. Aquí asumimos que al menos uno de los coeficientes $a_i$ de (2.25) es diferente de cero. Si todos los $a_i$ son cero, la ecuación de diferencia de entrada/salida (2.25) se reduce a

$$y[n] = \sum_{i=0}^{M} b_i x[n - i]$$

En este caso, la salida en cualquier punto fijo de tiempo depende sólo de los valores de la entrada $x[n]$ y, por lo tanto, la salida no se calcula de forma recursiva. Se dice que tales sistemas son *no recursivos*. Ejemplos de sistemas no recursivos son los filtros PM y PMPE.

De la expresión (2.26) para $y[n]$, vemos que si $M = N$, el cálculo de $y[n]$ para cada valor entero de $n$ requiere (en general) $2N$ sumas y $2N + 1$ multiplicaciones. Entonces, la "complejidad para calcular" la recursividad de orden $N$, es directamente proporcional al orden $N$ de la recursividad. En particular, observe que el número de cálculos requeridos para calcular $y[n]$ no depende de $n$.

Por último, de (2.25) o de (2.26) resulta claro que el cálculo de la respuesta de salida $y[n]$ para $n \geq 0$, requiere que las $N$ condiciones iniciales $y[-N]$, $y[-N + 1]$,..., $y[-1]$, deben especificarse. Además, si la entrada $x[n]$ es diferente de cero para $n < 0$, la evaluación de (2.25) o (2.26) también requiere los $M$ valores iniciales de entrada $x[-M]$, $x[-M + 1]$,..., $x[-1]$. Por tanto, la respuesta de salida $y[n]$ para $n \geq 0$ dada en (2.25) o (2.26), es la respuesta a la entrada $x[n]$ aplicada para $n \geq -M$ y las condiciones iniciales $y[-N]$, $y[-N + 1]$,..., $y[-1]$. Observe de nuevo cómo difiere esto del modelo de convolución, en el que no hay condiciones iniciales dadas en términos de los valores de la salida.

Debemos resaltar que la respuesta al pulso unitario $h[n]$ de un sistema dado por (2.25) o (2.26) puede calcularse estableciendo $x[n] = \delta[n]$, con condiciones iniciales cero, esto es, $y[n]$ es cero para $n \leq -1$. Ilustramos la evaluación de (2.26) con el siguiente ejemplo:

### Ejemplo 2.6 Sistema de segundo orden

Considere el sistema de tiempo discreto dado por la ecuación de diferencias de entrada/salida de segundo orden

$$y[n] - 1.5y[n-1] + y[n-2] = 2x[n-2] \tag{2.27}$$

Si escribimos (2.27) de la forma (2.26), obtenemos la ecuación de entrada/salida

$$y[n] = 1.5y[n-1] - y[n-2] + 2x[n-2] \tag{2.28}$$

Para calcular la respuesta al pulso unitario $h[n]$ del sistema, establezca $x[n] = \delta[n]$ de la ecuación (2.28) con las condiciones iniciales $y[-1]$ y $y[-2]$, ambas iguales a cero. Esto resulta en $h[0] = 0$, $h[1] = 0, h[2] = 2\delta[0] = 2, h[3] = (1.5)h[2] = 3, h[4] = (1.5)h[3] - h[2] = 2.5$, etcétera.

Ahora suponga que la entrada $x[n]$ es la función de tiempo discreto escalón unitario $u[n]$, y que los valores iniciales de salida son $y[-2] = 2$ y $y[-1] = 1$. Después, al establecer $n = 0$ en (2.28), obtenemos

$$\begin{aligned} y[0] &= 1.5y[-1] - y[-2] + 2x[-2] \\ y[0] &= (1.5)(1) - 2 + (2)(0) = -0.5 \end{aligned}$$

Si establecemos $n = 1$ en (2.28) obtenemos

$$\begin{aligned} y[1] &= 1.5y[0] - y[-1] + 2x[-1] \\ y[1] &= (1.5)(-0.5) - 1 + 2(0) = -1.75 \end{aligned}$$

Al continuar el proceso se obtiene

$$\begin{aligned} y[2] &= (1.5)y[1] - y[0] + 2x[0] \\ &= (1.5)(-1.75) + 0.5 + (2)(1) = -0.125 \\ y[3] &= (1.5)y[2] - y[1] + 2x[1] \\ &= (1.5)(-0.125) + 1.75 + (2)(1) = 3.5625 \end{aligned}$$

y así sucesivamente.

Al resolver (2.25) o (2.26) de manera recursiva, vemos que el proceso para calcular la salida $y[n]$ puede iniciar en cualquier punto deseado de tiempo. En el desarrollo anterior, el primer valor de la salida que calculamos fue $y[0]$. Si el primer valor deseado es la salida $y[q]$ al tiempo $q$, debemos comenzar el proceso de recursividad estableciendo $n = q$ en (2.26). En este caso, los valores iniciales de la salida que se requieren son $y[q - N], y[q - N + 1], \ldots, y[q - 1]$.

La ecuación de diferencias de orden $N$ (2.25) puede resolverse con el archivo M de MATLAB `recur`, el cual está disponible en el sitio Web. La figura 2.8 presenta una versión abreviada del programa que contiene todos los pasos importantes. Para utilizar el archivo M, `recur`, el usuario debe introducir los coeficientes en el sistema (es decir, $a_i$ y $b_i$), los valores iniciales de $y[n]$ y $x[n]$, el rango deseado de $n$, y la entrada $x[n]$. El programa primero inicializa el vector solución $y$, completando las condiciones iniciales con ceros. Esto predefine

```
N = length(a);
M = length(b)-1;
y = [y0 zeros(1,length(n))];
x = [x0 x];
a1 = a(length(a):-1:1);    % invierte los elementos de a
b1 = b(length(b):-1:1);
for i=N+1:N+length(n),
   y(i) = -a1*y(i-N:i-1)' + b1*x(i-N:i-N+M)';
end
y = y(N+1:N+length(n));
```

**FIGURA2.8**
Programa `recur` de MATLAB.

la longitud de $y$, lo que hace más eficiente al lazo. El vector de entrada $x$ también se completa con las condiciones iniciales de la entrada. Las sumatorias dadas en (2.25) se calculan mediante la multiplicación de vectores; por ejemplo, la sumatoria del lado izquierdo de (2.25) puede escribirse como

$$\sum_{i=1}^{N} a_i y[n-i] = [a_N \; a_{N-1} \cdots a_1] \begin{bmatrix} y[n-N] \\ y[n-N+1] \\ \vdots \\ y[n-1] \end{bmatrix}$$

Cada sumatoria también podría evaluarse con un lazo interno en el programa; sin embargo, MATLAB no procesa lazos de manera muy eficiente, por lo que se evitan lo más posible. En la última línea del programa, las condiciones iniciales se eliminan del vector `y`, lo que resulta en un vector `y` que contiene los valores de $y[n]$ para los índices de tiempo definidos en el vector `n`. Debemos destacar que existen otros programas en las cajas de herramientas de MATLAB que resuelven la ecuación (2.25); sin embargo, estos programas utilizan conceptos que aún no hemos visto.

Los siguientes comandos demuestran cómo se utiliza `recur`, para calcular la respuesta de salida cuando $x[n] = u[n]$ para el sistema del ejemplo 2.6:

```
a = [-1.5 1]; b = [0 0 2];
y0 = [2 1]; x0 = [0 0];
n = 0:20;
x = ones(1, length(n));
y = recur (a, b, n, x, x0, y0);
stem(n,y,'filled')       % produce una "gráfica de líneas"
xlabel ('n')
ylabel ('y[n]')
```

El archivo M calcula la respuesta $y$ para $n = 0, 1, \ldots, 20$, y después grafica $y$ contra $n$, con etiquetas en los ejes. La respuesta de salida resultante aparece en la figura 2.9. En ejemplos

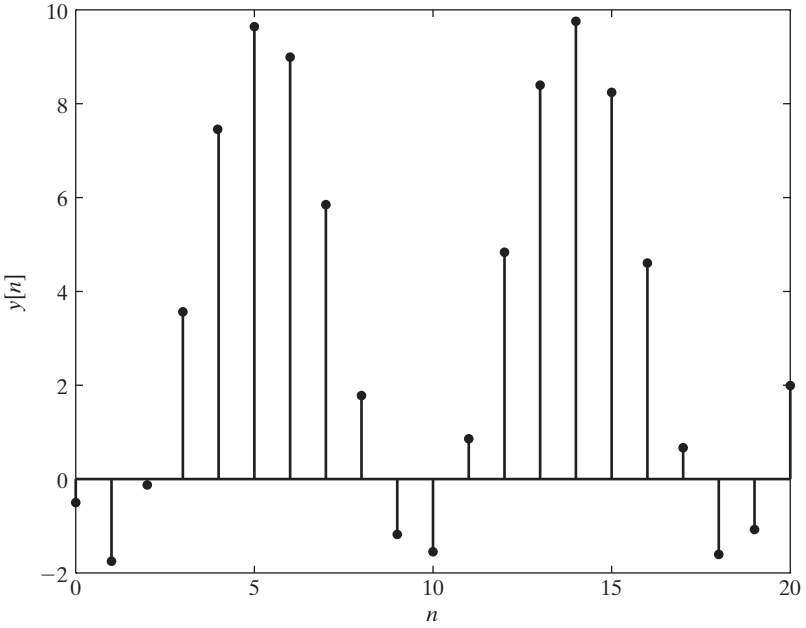



**FIGURA 2.9**
Gráfica de la respuesta de salida resultante de $x[n] = u[n]$ en el ejemplo 2.6.

posteriores los comandos para graficar no aparecerán, excepto cuando las variables por graficar no sean obvias.

### 2.3.2 Solución completa

Si resolvemos (2.25) o (2.26) de manera recursiva, es posible generar una expresión para la solución completa $y[n]$, que resulta de las condiciones iniciales y de la aplicación de la entrada $x[n]$. Mostramos este proceso considerando la ecuación de diferencias lineal de primer orden

$$y[n] = -ay[n-1] + bx[n], n = 1, 2, \ldots \tag{2.29}$$

con la condición inicial $y[0]$. Primero, si en (2.29) establecemos $n = 1, n = 2$, y $n = 3$, obtenemos

$$y[1] = -ay[0] + bx[1] \tag{2.30}$$

$$y[2] = -ay[1] + bx[2] \tag{2.31}$$

$$y[3] = -ay[2] + bx[3] \tag{2.32}$$

Si sustituimos la expresión (2.30) para $y[1]$ en (2.31) obtenemos

$$y[2] = -a(-ay[0] + bx[1]) + bx[2]$$

$$y[2] = a^2y[0] - abx[1] + bx[2] \tag{2.33}$$

Si sustituimos la expresión (2.33) para $y[2]$ en (2.32), arroja

$$y[3] = -a(a^2y[0] - abx[1] + bx[2]) + bx[3]$$
$$y[3] = -a^3y[0] + a^2bx[1] - abx[2] + bx[3] \tag{2.34}$$

Del patrón en (2.30), (2.33) y (2.34), podemos ver que, para $n \geq 1$,

$$y[n] = (-a)^n y[0] + \sum_{i=1}^{n} (-a)^{n-i} bx[i] \tag{2.35}$$

La ecuación (2.35) proporciona la respuesta de salida completa $y[n]$ para $n \geq 1$, que resulta de la condición inicial $y[0]$ y de la entrada $x[n]$, aplicada para $n \geq 1$.

---

### Ejemplo 2.7 Nivel de inventario

Considere a un fabricante que produce un producto específico. Sea $y[n]$ el número del producto en el inventario al final del día $n$; sea $p[n]$ el número del producto cuya fabricación se completó durante el día $n$; y sea $d[n]$ el número del producto que se libera (a los clientes) durante el día $n$. Después, el número $y[n]$ del producto en el inventario al final del día $n$ debe ser igual a $y[n-1]$ más la diferencia entre $p[n]$ y $d[n]$. En términos matemáticos,

$$y[n] = y[n-1] + p[n] - d[n] \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots \tag{2.36}$$

Aquí, $y[0]$ es el número inicial del producto en el inventario. Ahora, con $x[n]$ definida como la diferencia $x[n] = p[n] - d[n]$, (2.36) tiene la forma (2.29) con $a = -1$ y $b = 1$. Por lo tanto, de (2.35), la solución es

$$y[n] = y[0] + \sum_{i=1}^{n} x[i], n = 1, 2, \ldots$$
$$y[n] = y[0] + \sum_{i=1}^{n} (p[i] - d[i]), n = 1, 2, \ldots \tag{2.37}$$

Uno de los objetivos en la manufactura es mantener el nivel del inventario idealmente constante; en particular, es obvio que hay que evitar que el inventario se agote, de lo contrario habrá un retraso en la entrega del producto a los clientes. De la expresión anterior para $y[n]$, vemos que $y[n]$ puede mantenerse constante, estableciendo $p[n] = d[n]$. En otras palabras, el número del producto cuya fabricación se completa durante el día $n$ debe ser igual al número del producto entregado durante el día $n$. Sin embargo, no es posible establecer $p[n] = d[n]$, debido a que un producto no puede fabricarse "instantáneamente" y $d[n]$ depende de las órdenes del cliente, las cuales no se conocen por adelantado. Si el fabricante del producto requiere menos de un día, es posible establecer

$$p[n] = d[n-1], n = 2, 3, \ldots \tag{2.38}$$

Es decir, el número $p[n]$ del producto cuya fabricación se completará durante el día $n$, se establece igual al número $d[n-1]$ de entregas durante el día anterior.

Para utilizar (2.38) en (2.37), primero es necesario escribir (2.37) de la forma

$$y[n] = y[0] + p[1] - d[1] + \sum_{i=2}^{n} (p[i] - d[i]), n = 2, 3, \ldots \tag{2.39}$$

Después, al sustituir $p[i] = d[i-1]$ en (2.39), obtenemos

$$y[n] = y[0] + p[1] - d[1] + \sum_{i=2}^{n}(d[i-1] - d[i]), n = 2, 3, \ldots$$

$$y[n] = y[0] + p[1] - d[1] + d[1] - d[n], n = 2, 3, \ldots$$

$$y[n] = y[0] + p[1] - d[n], n = 2, 3, \ldots$$

A partir de este resultado, es claro que el inventario nunca estará vacío si el inventario inicial es lo bastante grande para manejar las variaciones en el número de entregas día a día. De manera más precisa, el inventario no se agotará si

$$y[0] > d[n] - p[1]$$

Éste es un resultado interesante, que le dice al fabricante cuánto producto debe mantener en almacén para evitar retrasos en la entrega debido a un agotamiento de inventario.

---

Las expresiones de forma cerrada (es decir, las que no contienen sumatorias) para solucionar ecuaciones de diferencia lineales de coeficientes constantes pueden calcularse mediante la transformada $z$. Realizamos esto en el capítulo 7.

## 2.4 MODELOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Los sistemas de tiempo continuo con frecuencia se especifican mediante una ecuación diferencial de entrada/salida, que puede generarse aplicando las leyes de la física. Esta sección comienza con el proceso de determinar la ecuación diferencial de entrada/salida para una clase de circuitos eléctricos y sistemas mecánicos. Después presentamos los métodos para solucionar ecuaciones diferenciales.

### 2.4.1 Circuitos eléctricos

La figura 2.10 muestra representaciones esquemáticas de un resistor, un capacitor y un inductor. Respecto al voltaje $v(t)$ y la corriente $i(t)$ definidos en la figura 2.10, la relación voltaje-corriente para el resistor es

$$v(t) = Ri(t) \tag{2.40}$$

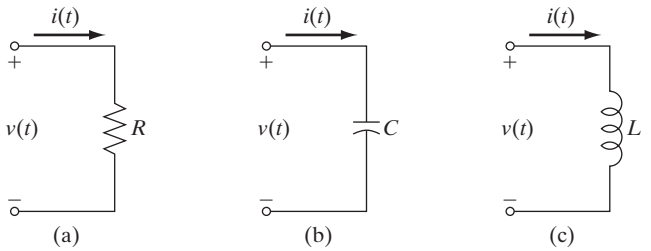



**FIGURA 2.10**
Elementos básicos de un circuito: (a) resistor; (b) capacitor; (c) inductor.

Para el capacitor es

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{C}i(t) \qquad \text{o} \qquad v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\lambda)\, d\lambda \tag{2.41}$$

y para el inductor es

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \qquad \text{o} \qquad i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(\lambda)\, d\lambda \tag{2.42}$$

Ahora considere el proceso de determinar la ecuación diferencial de entrada/salida para un circuito eléctrico que consiste en una interconexión de resistores, capacitores e inductores. La entrada $x(t)$ al circuito es una fuente de alimentación de voltaje o corriente, y la salida $y(t)$ es un voltaje o corriente en algún punto del circuito. La ecuación diferencial de entrada/salida del circuito puede determinarse a través de las leyes de voltajes y corrientes de Kirchhoff. La ley de voltaje establece que en cualquier momento fijo, la suma de los voltajes alrededor de un lazo cerrado en el circuito debe ser igual a cero. La ley de corriente establece que en cualquier momento fijo, la suma de las corrientes que entran a un nodo (una unión de elementos del circuito), debe ser igual a la suma de las corrientes que abandonan el nodo.

Mediante las relaciones voltaje-corriente (2.40) a (2.42) y las leyes de voltaje y corriente de Kirchhoff, es posible escribir las ecuaciones de nodos y lazos para el circuito, las cuales después pueden combinarse para obtener la ecuación diferencial de entrada/salida. En la sección 1.4 del capítulo 1 mostramos cómo utilizar la ley de corrientes de Kirchhoff, para la conexión en paralelo de un resistor y un capacitor. En el siguiente ejemplo mostraremos cómo utilizar la ley de voltajes de Kirchhoff para la conexión en serie de un resistor y un capacitor. Para circuitos más complicados, el modelo de sistema con frecuencia se genera sobre la base de la representación mediante la transformada de Laplace, la cual explicamos en la sección 6.6. Para una explicación más profunda sobre cómo escribir ecuaciones de circuitos, vea Hayt *et al.* (2002) o Nilsson y Riedel (2004).

### Ejemplo 2.8 Circuito *RC* en serie

Considere el circuito *RC* en serie de la figura 2.11. Como muestra la figura, la entrada $x(t)$ es el voltaje $v(t)$ que se aplica a la conexión en serie, y la salida $y(t)$ es igual al voltaje $v_C(t)$ a través del

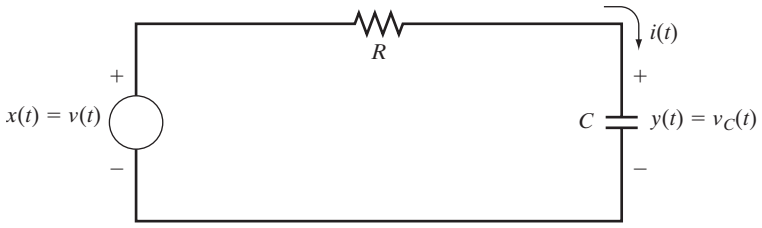



**FIGURA 2.11**
Circuito *RC* en serie.

capacitor. Por la ley de voltaje de Kirchhoff, la suma de los voltajes alrededor del ciclo es igual a cero y, por lo tanto

$$Ri(t) + y(t) - x(t) = 0 \tag{2.43}$$

donde $i(t)$ es la corriente en el lazo (vea la figura 2.11). Utilizar (2.41) arroja

$$i(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} = C\frac{dy(t)}{dt} \tag{2.44}$$

y al sustituir (2.44) en (2.43) obtenemos

$$RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) - x(t) = 0 \tag{2.45}$$

Después, si dividimos ambos lados de (2.45) entre $RC$, y reacomodamos los términos, obtenemos la siguiente ecuación diferencial lineal de entrada/salida:

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t) \tag{2.46}$$

De (2.46) se desprende que el circuito $RC$ en serie es un sistema de tiempo continuo lineal invariante en el tiempo y causal. En la siguiente sección presentaremos algunos métodos para resolver (2.46).

### 2.4.2 Sistemas mecánicos

El movimiento en sistemas mecánicos siempre puede traducirse en componentes traslacionales y rotacionales. Primero consideraremos el movimiento traslacional.

En sistemas traslacionales lineales existen tres tipos fundamentales de fuerzas que se resisten al movimiento; éstas son la fuerza de inercia de un cuerpo en movimiento, la fuerza de amortiguamiento debida a la fricción viscosa, y la fuerza de un resorte. Por la segunda ley de movimiento de Newton, la fuerza de inercia $x(t)$ de un cuerpo en movimiento es igual a su masa $M$ multiplicada por su aceleración; es decir,

$$x(t) = M\frac{d^2y(t)}{dt^2} \tag{2.47}$$

donde $y(t)$ es la posición del cuerpo en el tiempo $t$.

La fuerza de amortiguamiento $x(t)$ debida a la fricción viscosa es proporcional a la velocidad del desplazamiento, por lo que

$$x(t) = k_d\frac{dy(t)}{dt} \tag{2.48}$$

donde $k_d$ es la constante de amortiguamiento. La fricción viscosa con frecuencia se representa con un amortiguador que consiste en un cilindro relleno de aceite y un pistón. La figura 2.12 muestra una representación esquemática del amortiguador.

La fuerza de restauración $x(t)$ de un resorte es proporcional a la deformación $y(t)$; es decir,

$$x(t) = k_s y(t) \tag{2.49}$$

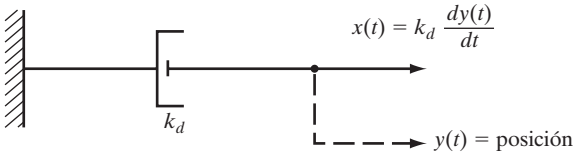



**FIGURA 2.12**
Un amortiguador de aire.

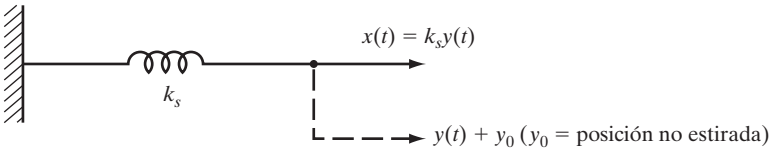



**FIGURA 2.13**
Un resorte.

donde $k_s$ es una constante que representa la rigidez del resorte. La figura 2.13 muestra la representación esquemática de un resorte.

La ecuación diferencial de entrada/salida de un sistema mecánico traslacional puede determinarse aplicando el principio de D'Alembert, el cual es una ligera variación de la segunda ley de movimiento de Newton. Por el principio de D'Alembert, en cualquier momento fijo la suma de todas las fuerzas externas aplicadas a un cuerpo en una dirección dada, y todas las fuerzas que se resisten al movimiento en esa dirección, debe ser igual a cero. El principio de D'Alembert es el análogo mecánico de las leyes de Kirchhoff para el análisis de circuitos. En el siguiente ejemplo ilustramos la aplicación del principio de D'Alembert:

### Ejemplo 2.9 Sistema masa-resorte-amortiguador

Considere el sistema masa-resorte-amortiguador que definimos en la sección 1.4. El diagrama esquemático del sistema aparece en la figura 2.14. Como explicamos en la sección 1.4, la entrada

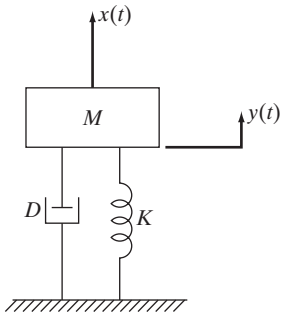



**FIGURA 2.14**
Diagrama esquemático del sistema masa-resorte-amortiguador.

$x(t)$ al sistema es la fuerza externa aplicada a la masa, la cual ocasiona que ésta se mueva hacia arriba o hacia abajo. La salida del sistema es el desplazamiento $y(t)$ de la masa, el cual se mide respecto a una posición de equilibrio. Cuando la masa se mueve hacia arriba mediante la fuerza externa $x(t)$ desde su posición de equilibrio, el desplazamiento $y(t)$ será positivo. En este caso, el resorte se expande y, por lo tanto, se resistirá al movimiento hacia arriba, lo que dará como resultado una fuerza negativa aplicada a la masa. Además, la fuerza de inercia y la de amortiguamiento también se resistirán a ese movimiento y, por lo tanto, resultarán en fuerzas negativas aplicadas a la masa. Por el principio de D'Alembert, la suma de la fuerza externa $x(t)$ y las fuerzas que se resisten al movimiento en la dirección hacia arriba, debe ser cero. Por lo tanto,

$$x(t) - k_s y(t) - M\frac{d^2y(t)}{dt^2} - k_d\frac{dy(t)}{dt} = 0 \tag{2.50}$$

La ecuación (2.50) también es válida en el caso en que la fuerza externa $x(t)$ mueve a la masa hacia abajo, a partir de su posición de equilibrio. Entonces, $k_d = D$ y $k_s = K$, y reacomodando los términos de (2.50), obtenemos la siguiente ecuación diferencial de entrada/salida de segundo orden, para el sistema masa-resorte-amortiguador:

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2} + D\frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = x(t)$$

Como vimos en la sección 1.5, este resultado muestra que el sistema masa-resorte-amortiguador es un sistema lineal de tiempo continuo e invariante en el tiempo.

---

**Sistemas mecánicos rotacionales.** En analogía con los tres tipos de fuerzas que se resisten al movimiento traslacional, existen tres tipos de fuerzas que se resisten al movimiento rotacional. Éstas son la torca de inercia dada por

$$x(t) = I\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \tag{2.51}$$

la torca de amortiguamiento dada por

$$x(t) = k_d\frac{d\theta(t)}{dt} \tag{2.52}$$

y la torca de resorte dada por

$$x(t) = k_s\theta(t) \tag{2.53}$$

En las ecuaciones (2.51) a (2.53), $\theta(t)$ es la posición angular al tiempo $t$, $I$ es el momento de inercia, y $k_d$ y $k_s$ son las constantes de amortiguamiento rotacional y fricción viscosa (o rigidez), respectivamente.

Para los sistemas rotacionales, el principio de D'Alembert establece que en cualquier tiempo fijo la suma de las torcas externas aplicadas a un cuerpo sobre cualquiera de sus ejes y todas las torcas que se resisten al movimiento sobre cualquiera de sus ejes debe ser igual a cero. La ecuación diferencial de entrada/salida de un sistema rotacional puede obtenerse utilizando (2.51) a (2.53), y el principio de D'Alembert. El proceso es muy parecido a los pasos que desarrollamos para el sistema masa-resorte-amortiguador, del ejemplo 2.9.

### Ejemplo 2.10 Motor con carga

Considere un motor con carga, como el que muestra la figura 2.15. La carga que se indica en la figura es alguna estructura, como podrían ser una válvula o una placa, a la cual el eje del motor está conectado. La entrada en este ejemplo es la torca $T(t)$ aplicada al eje del motor que es generada por el motor. La torca $T(t)$ es generada por el motor a través de un proceso que depende del tipo de motor utilizado. Más adelante, consideraremos un motor de cd de campo controlado, y en ese punto especificaremos la generación de $T(t)$. La salida del motor con carga es la posición angular $\theta(t)$ del eje del motor, respecto a una posición de referencia. La torca de inercia y la torca de amortiguamiento se resisten a la torca $T(t)$ y, por el principio de D'Alembert, la ecuación para el motor con carga está dada por

$$T(t) - I\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} - k_d\frac{d\theta(t)}{dt} = 0 \tag{2.54}$$

donde $I$ es el momento de inercia del motor con carga, y $k_d$ es el coeficiente de fricción de viscosidad del motor con carga. Si reacomodamos los términos de (2.54), obtenemos la siguiente ecuación diferencial de entrada/salida de segundo orden para el motor con carga

$$I\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + k_d\frac{d\theta(t)}{dt} = T(t) \tag{2.55}$$

En el capítulo 9 utilizaremos el motor con carga dado por (2.55), ya que dicho capítulo trata sobre aplicaciones de control.

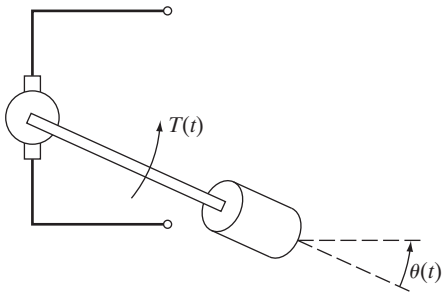



**FIGURA 2.15**
Motor con carga.

## 2.5 SOLUCIÓN A ECUACIONES DIFERENCIALES

Existen diversos métodos para resolver ecuaciones diferenciales lineales de entrada/salida con coeficientes constantes; algunos de éstos se describen en este libro. El método que más conocen los estudiantes es una técnica matemática clásica que se aplica por separado para soluciones homogéneas y no homogéneas. Debido a que este método clásico se trata a profundidad en textos de matemáticas sobre ecuaciones diferenciales, no lo trataremos en este libro. Otro método común para resolver ecuaciones diferenciales utiliza la transformada de

Laplace, la cual presentaremos en el capítulo 6. En esta sección describiremos dos métodos de solución adicionales: un método numérico que hace discreta la ecuación diferencial, y otro método que utiliza Symbolic Math Toolbox que está disponible con MATLAB.

### 2.5.1 Método de solución numérica

Una ecuación diferencial puede hacerse discreta en el tiempo, para llegar a una ecuación de diferencias que pueda entonces resolverse mediante la recursividad. Esta discretización en realidad proporciona una representación aproximada de tiempo discreto del sistema de tiempo continuo definido por la ecuación diferencial de entrada/salida dada.

Considere el sistema de tiempo continuo lineal invariante en el tiempo con la ecuación diferencial de entrada/salida de primer orden

$$\frac{dy(t)}{dt} = -ay(t) + bx(t) \tag{2.56}$$

donde $a$ y $b$ son constantes. La ecuación (2.56) puede discretizarse en el tiempo estableciendo $t = nT$, donde $T$ es un número positivo fijo, y $n$ sólo toma valores enteros. Esto da como resultado la ecuación

$$\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=nT} = -ay(nT) + bx(nT) \tag{2.57}$$

Ahora, la derivada (2.57) puede aproximarse por

$$\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=nT} = \frac{y(nT + T) - y(nT)}{T} \tag{2.58}$$

Si $T$ es lo suficientemente pequeña y $y(t)$ es continua, la aproximación (2.58) a la derivada $dy(t)/dt$ será exacta. Esta aproximación se conoce como la *aproximación de Euler* de la derivada.

Al sustituir la aproximación (2.58) en (2.57) obtenemos

$$\frac{y(nT + T) - y(nT)}{T} = -ay(nT) + bx(nT) \tag{2.59}$$

Para ser consistentes con la notación que estamos utilizando para señales de tiempo discreto, la señal de entrada $x(nT)$ y la señal de salida $y(nT)$ se denotarán como $x[n]$ y $y[n]$, respectivamente; es decir,

$$x[n] = x(t)|_{t=nT} \quad \text{y} \quad y[n] = y(t)|_{t=nT}$$

En términos de esta notación, (2.59) se vuelve

$$\frac{y[n + 1] - y[n]}{T} = -ay[n] + bx[n] \tag{2.60}$$

Por último, si multiplicamos ambos lados de (2.60) por $T$, y reemplazamos $n$ por $n - 1$, obtenemos una aproximación de tiempo discreto a (2.56) dada por la ecuación diferencial de entrada/salida de primer orden

$$y[n] - y[n-1] = -aTy[n-1] + bTx[n-1]$$

o

$$y[n] = (1 - aT)y[n-1] + bTx[n-1] \tag{2.61}$$

La ecuación de diferencias (2.61) se conoce como *aproximación de Euler* de la ecuación diferencial de entrada/salida (2.56), ya que está basada en la aproximación de Euler para la derivada.

Los valores discretos $y[n] = y(nT)$ de la solución $y(t)$ a (2.56) puede calcularse resolviendo la ecuación de diferencias (2.61). La solución a (2.61) con la condición inicial $y[0]$ y con $x[n] = 0$ para toda $n$, está dada por

$$y[n] = (1 - aT)^n y[0], \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.62}$$

Para verificar que (2.62) es la solución, sustituya la expresión (2.62), para $y[n]$, en (2.61) con $x[n] = 0$. Esto arroja

$$\begin{aligned}(1 - aT)^n y[0] &= (1 - aT)(1 - aT)^{n-1} y[0] \\ &= (1 - aT)^n y[0]\end{aligned}$$

Así, (2.61) se satisface, lo cual muestra que (2.62) es la solución.

La expresión (2.62) para $y[n]$ proporciona valores aproximados de la solución $y(t)$ para (2.56) en el tiempo $t = nT$, con la condición inicial $y[0]$ y con entrada cero. Para comparar (2.62) con los valores exactos de $y(t)$ para $t = nT$, primero observe que la solución exacta $y(t)$ a (2.56) con la condición inicial $y(0)$ y con entrada cero está dada por

$$y(t) = e^{-at} y(0), t \geq 0 \tag{2.63}$$

La solución dada por (2.63) puede generarse con la transformada de Laplace, como se muestra en el capítulo 6. Al establecer $t = nT$ en (2.63) obtenemos la siguiente expresión exacta para $y[n]$:

$$y[n] = e^{-anT} y[0], \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.64}$$

Ahora, ya que

$$e^{ab} = (e^a)^b \text{ para cualesquiera números reales } a \text{ y } b$$

(2.64) puede escribirse de la forma

$$y[n] = (e^{-aT})^n y[0], \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.65}$$

Posteriormente, al sustituir el desarrollo de la exponencial

$$e^{-aT} = 1 - aT + \frac{a^2T^2}{2} - \frac{a^3T^3}{6} + \cdots$$

en (2.65) se obtiene la siguiente expresión exacta para los valores de $y(t)$ en el tiempo $t = nT$:

$$y[n] = \left(1 - aT + \frac{a^2T^2}{2} - \frac{a^3T^3}{6} + \cdots\right)^n y[0], \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.66}$$

Si comparamos (2.62) con (2.66), se muestra que (2.62) es una aproximación exacta si $1 - aT$ es una buena aproximación a la exponencial $\exp(-aT)$. Éste será el caso si la magnitud de $aT$ es mucho menor que 1, en cuyo caso las magnitudes de las potencias de $aT$ serán mucho más pequeñas que la cantidad $1 - aT$.

---

### Ejemplo 2.11 Circuito *RC* en serie

Considere el circuito *RC* en serie de la figura 2.11. Como muestra el ejemplo 2.8 [vea (2.46)], el circuito tiene la ecuación diferencial de entrada/salida

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t) \tag{2.67}$$

donde $x(t)$ es el voltaje de entrada aplicado al circuito, y $y(t)$ es el voltaje a través del capacitor. Si escribimos (2.67) en la forma (2.56) se revela que en este caso $a = 1/RC$ y $b = 1/RC$. Así, la representación en tiempo discreto (2.61) para el circuito *RC* está dada por

$$y[n] = \left(1 - \frac{T}{RC}\right)y[n - 1] + \frac{T}{RC}x[n - 1] \tag{2.68}$$

La ecuación diferencial (2.68) puede resolverse de manera recursiva para que arroje valores aproximados $y[n]$ del voltaje sobre el capacitor, que resulta del voltaje inicial $y[0]$ y del voltaje de entrada $x(t)$ aplicado para $t \geq 0$. La recursividad puede realizarse con el archivo M de MATLAB `recur`, donde los coeficientes se identifican comparando (2.68) con (2.26). Esto arroja $a_1 = -(1 - T/RC)$, $b_0 = 0$, y $b_1 = T/RC$. Los comandos para el caso en que $R = C = 1$, $y[0] = 0$, $x(t) = 1$, $t \geq 0$, y $T = 0.2$ se definen para que sean

```
R = 1; C = 1; T = .2;
a = -(1-T/R/C); b = [0 T/R/C];
y0 = 0; x0 = 1;
n = 1:40;
x = ones(1, length(n));
y1 = recur(a, b, n, x, x0, y0);    % solución aproximada
```

El cálculo de la solución exacta puede realizarse con la transformada de Laplace, la cual arroja el resultado

$$y(t) = 1 - e^{-t}, t \geq 0$$

Los comandos de MATLAB utilizados para calcular la $y$ exacta para $t = 0$ a $t = 8$ y los comandos utilizados para graficar ambas soluciones son

```
t = 0:0.04:8;
y2 = 1 - exp(-t); % solución exacta
% aumenta la condición inicial en el vector
y1 = [y0 y1];
n = 0:40;   % redefine en consecuencia
plot(n*T,y1,'o',t,y2,'-');
```

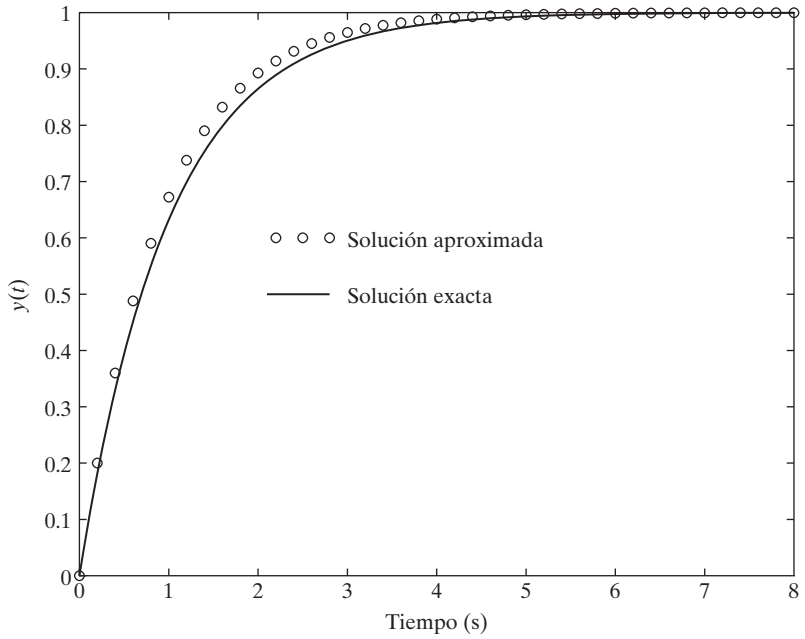



**FIGURA 2.16**
Respuesta exacta y aproximada al escalón del ejemplo 2.11.

La figura 2.16 muestra la gráfica de la salida resultante (la respuesta al escalón) para la aproximación junto con la respuesta al escalón exacta. Debido a que `y1` es una aproximación a una señal de tiempo continuo, la gráfica no se realizó mediante el uso del comando `stem` (el cual se utiliza para señales de tiempo discreto en el tiempo).

Observe que, debido a que el valor de $aT = T/RC = 0.2$ es pequeño comparado con 1, la respuesta aproximada al escalón es cercana a la respuesta exacta. Podemos obtener una mejor aproximación tomando un valor más pequeño para $T$ y después usando el programa anterior de MATLAB. Invitamos al lector a intentarlo.

---

La técnica de discretización para ecuaciones diferenciales de primer orden, que describimos antes, puede generalizarse a ecuaciones diferenciales de segundo o mayor orden. En el caso de las de segundo orden, es posible utilizar las siguientes aproximaciones:

$$\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=nT} = \frac{y(nT + T) - y(nT)}{T} \tag{2.69}$$

$$\left.\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right|_{t=nT} = \frac{dy(t)/dt|_{t=nT+T} - dy(t)/dt|_{t=nT}}{T} \tag{2.70}$$

Combinando (2.69) y (2.70) obtenemos la siguiente aproximación a la segunda derivada:

$$\left.\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right|_{t=nT} = \frac{y(nT + 2T) - 2y(nT + T) + y(nT)}{T^2} \tag{2.71}$$

La aproximación (2.71) es la aproximación de Euler a la segunda derivada. En las notas adicionales que se encuentran en el sitio Web de este libro proporcionamos detalles y un ejemplo sobre la aproximación de Euler para un sistema de segundo orden.

Para los sistemas de tiempo continuo dados por una ecuación diferencial de entrada/salida, existen diversas técnicas de solución numérica que son mucho más exactas (para un valor dado de $T$) que la técnica anterior, basada en la aproximación de derivadas de Euler. En el capítulo 10 describimos otros métodos de discretización. Además, MATLAB proporciona un solucionador ODE que contiene diversos métodos de aproximación para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales de primer orden. Un método de ejemplo es el de Runge-Kutta, el cual es accesible con el comando `ode45`. El solucionador ODE requiere que se defina una función de MATLAB, que contenga los cálculos numéricos necesarios para definir la primera derivada.

### Ejemplo 2.12 Circuito *RC* utilizando el solucionador ODE de MATLAB

Considere el circuito *RC* del ejemplo 2.11. El comando `ode45` devuelve un vector `t` y el vector solución correspondiente, `y`, cuando está dada una función que calcula $dy/dt$, el tiempo inicial y el final, y la condición inicial para $y(t)$. Los comandos específicos de MATLAB para el circuito *RC* son

```
tspan = [0 8];    %vector de tiempo inicial y final
y0 = 0;           % valor inicial para y(t)
[t,y] = ode45(@ex2_12_func,tspan,y0);
```

donde `ex2_12_func` es una función MATLAB definida por el usuario que calcula la primera derivada de $y(t)$. La ecuación diferencial para el circuito *RC* dado en la ecuación (2.67) se utiliza

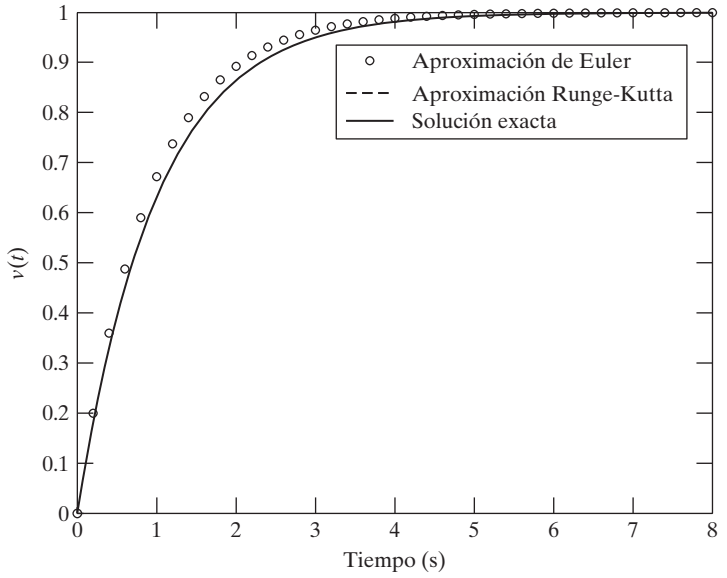



**FIGURA 2.17**
Comparación de las respuestas al escalón de Euler y Runge-Kutta con la respuesta exacta al escalón del ejemplo 2.12.

para obtener una expresión para $dy/dt$. La función de MATLAB correspondiente está almacenada en el archivo `ex2_12_func.m`, y contiene los siguientes comandos:

```
function dy = ex2_12_func(t,y);
R = 1; C = 1; x = 1;
dy = x/R/C - y/R/C;
```

La figura 2.17 muestra una comparación de las soluciones numéricas para la respuesta al escalón del circuito *RC*, utilizando las aproximaciones Runge-Kutta y Euler. A partir de las gráficas vemos que es indistinguible la solución Runge-Kutta de la solución exacta y, por lo tanto, vemos que ésta es una mejor aproximación que el método de Euler.

### 2.5.2 Solución matemática simbólica de MATLAB

Un manipulador simbólico es útil para encontrar soluciones aproximadas a ecuaciones algebraicas y diferenciales simples. El solucionador de ecuaciones diferenciales de MATLAB Symbolic Math Toolbox es `dsolve`, al cual se invoca con la expresión `dsolve('`*expresión*`')`, donde *expresión* es la ecuación diferencial a resolver.

#### Ejemplo 2.13 Circuito *RC* resuelto con Symbolic Math Toolbox

El circuito *RC* del ejemplo 2.11 es descrito por la ecuación diferencial dada por la ecuación (2.67). Para el caso en que $R = 1$ y $C = 1$, y $x(t) = 1$, para $t \geq 0$, `dsolve` puede utilizarse de la siguiente manera:

```
y = dsolve('Dy = 1 - y','y(0) = 0')
```

La expresión resultante de MATLAB es

```
y =
1-exp(-t)
```

Las ecuaciones diferenciales de mayor orden pueden resolverse fácilmente. Por ejemplo, la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 13y(t) = 0; \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0, \quad y(0) = 1$$

se resuelve con el comando

```
y = dsolve('D2y = -4*Dy - 13*y ','Dy(0) = 0','y(0) = 1')
```

el cual arroja la solución

```
y =
2/3*exp(-2*t)*sin(3*t)+exp(-2*t)*cos(3*t)
```

## 2.6 REPRESENTACIÓN DE LA CONVOLUCIÓN DE SISTEMAS DE TIEMPO CONTINUO

Dadas dos señales continuas $x(t)$ y $v(t)$, la convolución de $x(t)$ y $v(t)$ está definida por

$$x(t) * v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)v(t - \lambda)\, d\lambda \tag{2.72}$$

La integral del lado derecho de (2.72) se conoce como *integral de convolución*. Como en el caso de las señales de tiempo discreto, la operación de convolución $x(t)*v(t)$ es conmutativa, por lo que $x(t)*v(t) = v(t)*x(t)$, y así

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)v(t - \lambda)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda)x(t - \lambda)\, d\lambda$$

Si $x(t)$ y $v(t)$ son cero para toda $t < 0$, entonces $x(\lambda) = 0$ para toda $\lambda < 0$ y $v(t - \lambda) = 0$ para toda $t - \lambda < 0$ (o $t < \lambda$). En este caso, la integración de (2.72) puede tomarse desde $\lambda = 0$ hasta $\lambda = t$, y la operación de convolución está dada por

$$x(t) * v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \displaystyle\int_0^t x(\lambda)v(t - \lambda)\, d\lambda, & t \geq 0 \end{cases}$$

Ahora, considere un sistema de tiempo continuo lineal invariante en el tiempo y causal, con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$, donde $y(t)$ es la respuesta resultante de $x(t)$ con $x(t) = 0$, para $t < 0$. Entonces la salida $y(t)$ está dada por el modelo de convolución

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_0^t h(\lambda)x(t - \lambda)\, d\lambda, t \geq 0 \tag{2.73}$$

o por la propiedad conmutativa,

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_0^t x(\lambda)h(t - \lambda)\, d\lambda, t \geq 0 \tag{2.74}$$

donde $h(t)$ es la respuesta al impulso del sistema. La *respuesta al impulso* $h(t)$ de un sistema de tiempo continuo lineal invariante en el tiempo y causal es la respuesta de salida cuando la entrada $x(t)$ es el impulso unitario $\delta(t)$. Debido a que suponemos que el sistema es causal y $\delta(t) = 0$ para toda $t < 0$, la respuesta al impulso $h(t)$ es cero para toda $t < 0$.

Observe que (2.73) es una contraparte de tiempo continuo natural de la representación de convolución (2.10) en el caso de tiempo discreto. También observe que la principal diferencia entre (2.73) y (2.10) es que la suma de convolución en el caso de tiempo discreto se vuelve una integral de convolución en el caso de tiempo continuo.

Por los resultados anteriores, la relación de entrada/salida de un sistema de tiempo continuo lineal invariante en el tiempo es una operación de convolución entre la entrada $x(t)$ y la respuesta al impulso $h(t)$. Una consecuencia de esta relación es que el sistema está totalmente determinado por $h(t)$, en el sentido de que si se conoce $h(t)$, la respuesta a cualquier entrada puede calcularse. De nuevo, esto corresponde a la situación del caso de tiempo discreto, donde conocer la respuesta al pulso unitario $h[n]$ determina el sistema de manera única.

Si la entrada y la respuesta al impulso están definidas por una expresión matemática simple, podemos calcular la convolución $h(t)*x(t)$ sustituyendo las expresiones de $h(t)$ y $x(t)$ en (2.73) o (2.74). En el siguiente ejemplo ilustramos esto.

---

### Ejemplo 2.14 Respuesta de salida de un circuito *RC*

De nuevo considere el circuito *RC* de la figura 2.11. Recuerde que la entrada $x(t)$ es el voltaje aplicado a la conexión en serie, y la salida $y(t)$ es el voltaje $v_C(t)$ a través del capacitor. En el ejemplo 2.8 mostramos cómo la ecuación diferencial de entrada y salida del circuito *RC* está dado por

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t) \tag{2.75}$$

Para determinar el modelo de convolución para el circuito *RC*, primero es necesario calcular la respuesta al impulso $h(t)$ del circuito. Como veremos en el capítulo 6, esto es fácil de conseguir, si tomamos la transformada de Laplace de (2.75), con $x(t) = \delta(t)$. El resultado es

$$h(t) = \frac{1}{RC}e^{-(1/RC)t}, t \geq 0, \text{ y } h(t) = 0, t < 0 \tag{2.76}$$

Podemos verificar la expresión para $h(t)$ dada por (2.76), mostrando que (2.75) se satisface con $h(t)$ dada por (2.76) y con $x(t) = \delta(t)$. Invitamos al lector a revisar esto.

En el caso en que $R = C = 1$, la respuesta $y(t)$ del circuito *RC* será calculada cuando la entrada $x(t)$ sea igual al pulso $p(t) = 1$ para $0 \leq t \leq 1, p(t) = 0$ para cualquier otra $t$. Debido a la for-

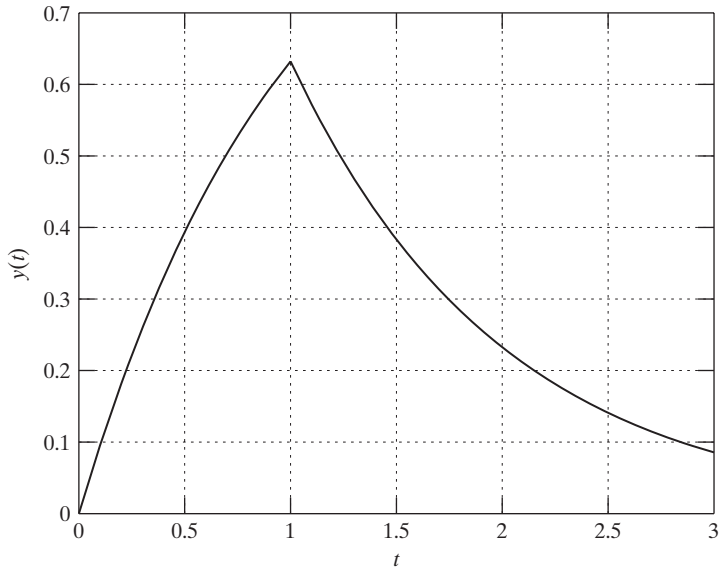



**FIGURA 2.18**
Respuesta de salida del circuito *RC* del ejemplo 2.14.

ma de $p(t)$, es más fácil calcular la respuesta $y(t)$ empleando (2.74), en lugar de hacerlo con (2.73) y, por lo tanto, utilizaremos (2.74): sustituyendo $h(t-\lambda)$ y $x(\lambda)$ en (2.74), obtenemos

$$y(t) = \int_0^t (1)e^{-(t-\lambda)}\,d\lambda = e^{-t}\int_0^t e^{\lambda} = e^{-t}(e^t - 1) = 1 - e^{-t}, 0 \le t \le 1 \tag{2.77}$$

$$y(t) = \int_0^1 (1)e^{-(t-\lambda)}\,d\lambda = e^{-t}\int_0^1 e^{\lambda}\,d\lambda = e^{-t}(e - 1), t \ge 1 \tag{2.78}$$

Así, la respuesta $y(t)$ es especificada por (2.77) y (2.78) para los dos intervalos de tiempo $0 \le t \le 1$ y $t \ge 1$. La figura 2.18 muestra una gráfica de $y(t)$. A partir de la gráfica vemos que la aplicación del voltaje de entrada al tiempo $t = 0$ ocasiona que el capacitor acumule voltaje, y después, cuando el voltaje de entrada se suspende (en $t = 1$), el capacitor comienza a descargarse.

### 2.6.1 Método gráfico de la convolución

Para calcular la convolución $x(t)*v(t)$, con frecuencia es útil graficar las funciones del integrando de la integral de convolución. Esto puede ayudar a determinar el integrando y los límites de integración de la integral de convolución, especialmente en los casos en los que $x(t)$ o $v(t)$ están parcialmente definidas. El procedimiento principal es graficar $x(\lambda)$ y $v(t-\lambda)$ como funciones de $\lambda$, determinar dónde se traslapan y cuál es la forma analítica de $x(\lambda)v(t-\lambda)$, e integrar el producto. Cuando $x(t)$ o $v(t)$ está parcialmente definida, la forma analítica del producto cambia, dependiendo del intervalo de tiempo $t$. Para determinar la forma funcional apropiada del producto y de los límites de integración correspondientes, desplace la gráfica de $v(t-\lambda)$ de izquierda a derecha, para ver cómo el traslape entre $v(t-\lambda)$ y $x(\lambda)$ se modifica. Los pasos de esta herramienta gráfica para calcular la integral de convolución se mencionan a continuación. Aquí suponemos que tanto $x(t)$ como $v(t)$ son cero para toda $t < 0$. Si $x(t)$ y $v(t)$ no son cero para toda $t < 0$, la propiedad de desplazamiento puede utilizarse para reducir el problema, al caso en que $x(t)$ y $v(t)$ son cero para toda $t < 0$.

Los pasos para desarrollar el método gráfico de la convolución son los siguientes:

**Paso 1.** Grafique $x(\lambda)$ y $v(-\lambda)$ como funciones de $\lambda$. La función $v(-\lambda)$ es igual a la función $v(\lambda)$ reflejada sobre el eje vertical.

**Paso 2.** Grafique $v(t-\lambda)$ para un valor cualquiera de $t$, tal como $t < 0$. Observe que $v(t-\lambda)$ es igual a $v(-\lambda)$ desplazada de tal forma que el origen de la gráfica de $v(-\lambda)$ se encuentra en $\lambda = t$. Debido a que $x(t)$ y $v(t)$ son cero para toda $t < 0$, no existe un traslape diferente de cero entre $v(t-\lambda)$ y $x(\lambda)$. El producto $x(\lambda)v(t-\lambda)$ se determina mediante la multiplicación de $x(\lambda)$ y $v(t-\lambda)$ punto por punto, respecto a $\lambda$; por lo tanto, cuando $t < 0$, el producto $x(\lambda)v(t-\lambda) = 0$, para toda $\lambda$.

**Paso 3.** Desplace $v(t-\lambda)$ hacia la derecha, hasta que no exista un traslape diferente de cero entre $v(t-\lambda)$ y $x(\lambda)$. Suponga que el primer valor de $t$, para el que esto ocurre, es $t = a$. Entonces $x(t)*v(t) = 0$, para $t < a$.

**Paso 4.** Continúe desplazando $v(t-\lambda)$ hacia la derecha, hasta pasar $t = a$. Determine el intervalo de tiempo $a \le t < b$, para el cual el producto $x(\lambda)v(t-\lambda)$ tenga la misma forma analítica. Integre el producto $x(\lambda)v(t-\lambda)$ como una función de $\lambda$, con los límites de integración de $\lambda = a$ hasta $\lambda = t$. El resultado es la expresión para $x(t)*v(t)$ para $a \le t < b$.

**Paso 5.** Desplace $v(t - \lambda)$ hacia la derecha hasta pasar $t = b$. Determine el siguiente intervalo de tiempo $b \leq t < c$, para el que el producto $x(\lambda)v(t - \lambda)$ tenga la misma forma analítica. Integre el producto $x(\lambda)v(t - \lambda)$ como una función de $\lambda$, con los límites de integración desde $\lambda = a$ hasta $\lambda = t$, donde $b \leq t < c$. La integral se calcula parcialmente.

$$x(t) * v(t) = \int_a^b x(\lambda)v(t - \lambda)\, d\lambda + \int_b^t x(\lambda)v(t - \lambda)\, d\lambda, \text{ para } b \leq t < c$$

Repita el patrón establecido en los pasos 4 y 5, tantas veces como sea necesario, hasta que $x(t)*v(t)$ sea calculado para toda $t > 0$.

En los siguientes dos ejemplos ilustramos este procedimiento:

---

### Ejemplo 2.15 Convolución de pulsos

Suponga que $x(t) = u(t) - 2u(t - 1) + u(t - 2)$, y que $v(t)$ es el pulso $v(t) = u(t) - u(t - 1)$. La convolución de $x(t)$ y $v(t)$ se realiza por medio de los pasos que describimos antes.

Convolución de señales de tiempo continuo

**Paso 1.** La función $x(\lambda)$ y $v(-\lambda)$ aparecen en la figura 2.19.

**Pasos 2-3.** No hay traslape de $x(\lambda)$ y $v(t - \lambda)$ para $t < 0$, por lo que $a = 0$ y $x(t)*v(t) = 0$ para $t < 0$.

**Paso 4.** Para $0 \leq \lambda < 1$, las gráficas de $x(\lambda)$, $v(t - \lambda)$ y el producto $x(\lambda)v(t - \lambda)$ aparecen en la figura 2.20. Para $1 \leq t < 2$, la forma del producto $x(\lambda)v(t - \lambda)$ cambia, como muestra la figura 2.21c. Entonces, el valor de $b$ es 1. Al integrar el producto $x(\lambda)v(t - \lambda)$ desplegado en la figura 2.20c para $0 \leq t \leq 1$, se obtiene

$$x(t) * v(t) = \int_0^t 1\, d\lambda = t$$

**Paso 5.** Para $2 \leq t < 3$, el producto $x(\lambda)v(t - \lambda)$ aparece en la figura 2.22c. A partir de las figuras 2.21c y 2.22c, vemos que la forma del producto $x(\lambda)v(t - \lambda)$ cambia del intervalo

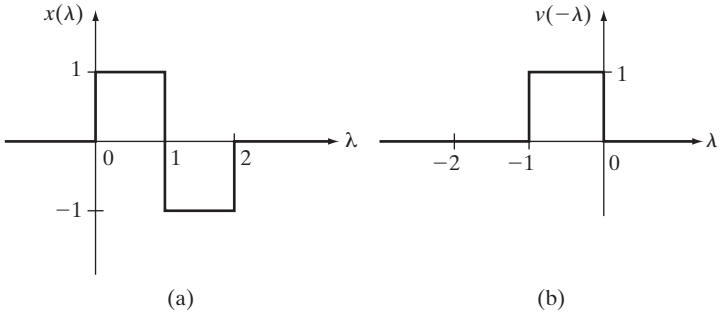



**FIGURA 2.19**
Gráficas de (a) $x(\lambda)$ y (b) $v(-\lambda)$.

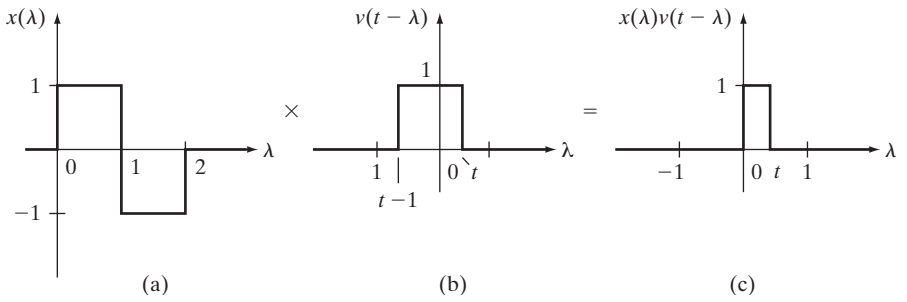



**FIGURA 2.20**
Gráficas de (a) $x(\lambda)$, (b) $v(t-\lambda)$ y (c) $x(\lambda)v(t-\lambda)$ para $0 \leq t < 1$.

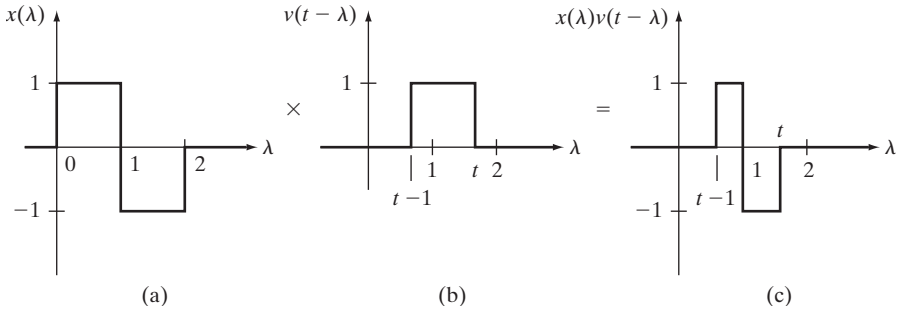



**FIGURA 2.21**
Gráficas de (a) $x(\lambda)$, (b) $v(t-\lambda)$ y (c) $x(\lambda)v(t-\lambda)$ para $1 \leq t < 2$.

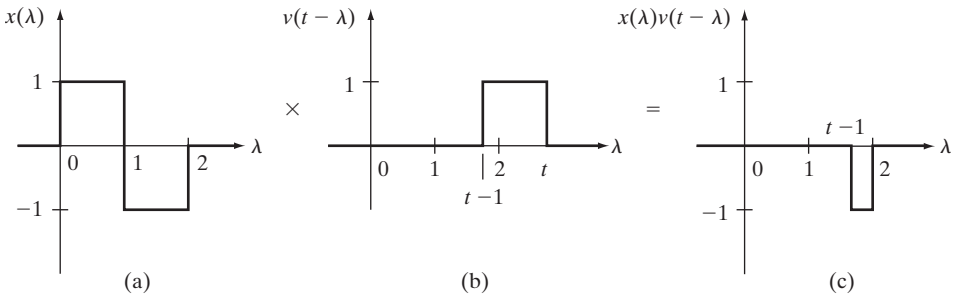



**FIGURA 2.22**
Gráficas de (a) $x(\lambda)$, (b) $v(t-\lambda)$ y (c) $x(\lambda)v(t-\lambda)$ para $2 \leq t < 3$.

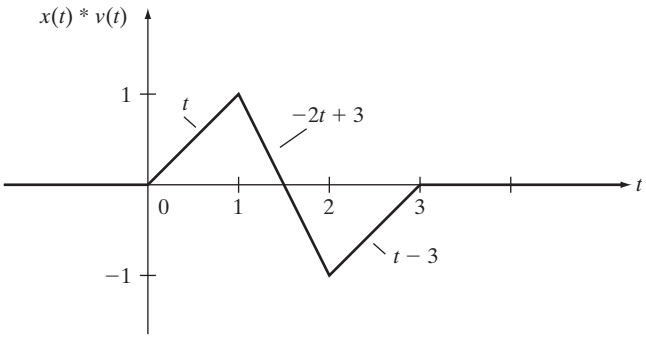



**FIGURA 2.23**
Bosquejo de $x(t)*v(t)$.

$1 \le t < 2$ al intervalo $2 \le t < 3$. Entonces, el valor de $c$ es 2. Al integrar el producto graficado en la figura 2.21c para $1 \le t \le 2$ se obtiene

$$x(t)*v(t) = \int_{t-1}^{1} (1)\, d\lambda + \int_{1}^{t} (-1)\, d\lambda$$
$$= 1 - (t-1) + (-1)(t-1) = -2t + 3, \text{ para } 1 \le t < 2$$

Al repetir el paso 5 para el intervalo $2 \le t < 3$, de la figura 2.22c,

$$x(t)*v(t) = \int_{t-1}^{2} (-1)\, d\lambda$$
$$= (-1)[2 - (t-1)] = t - 3, \text{ para } 2 \le t \le 3$$

Por último, para $t \ge 3$, el producto $x(\lambda)v(t-\lambda)$ es cero, debido a que no hay traslape entre $x(\lambda)$ y $v(t-\lambda)$. Entonces,

$$x(t)*v(t) = 0 \text{ para } t \ge 3$$

La figura 2.23 muestra un bosquejo de la convolución $x(t)*v(t)$.

---

### Ejemplo 2.16 Convolución de segmentos exponenciales

Considere las señales $x(t)$ y $v(t)$ definidas por

$$x(t) = \begin{cases} e^{t}, & 0 \le t < 1 \\ e^{2-t}, & 1 \le t < 2 \\ 0, & \text{cualquier otra } t \end{cases} \qquad v(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 \le t \le 4 \\ 0, & \text{cualquier otra } t \end{cases}$$

La figura 2.24 muestra las gráficas de las señales $x(t)$ y $v(t)$; la figura 2.25 muestra las funciones $x(\lambda)$ y $v(-\lambda)$; la figura 2.26 muestra las funciones $v(t-\lambda)$ y $x(\lambda)v(t-\lambda)$ para $0 \le t < 1$; y la figura

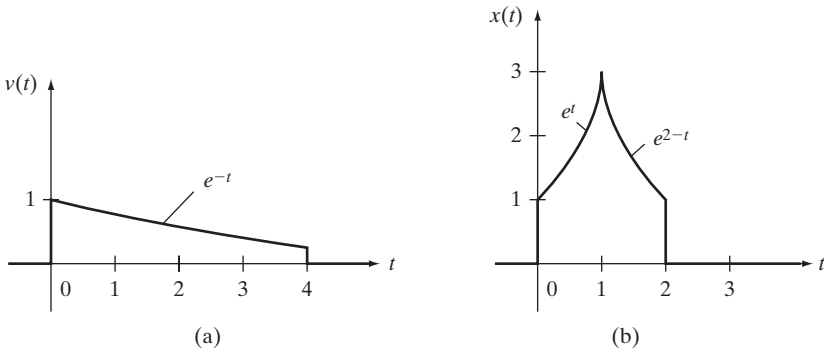



**FIGURA 2.24**
Gráficas de (a) $v(t)$ y (b) $x(t)$.

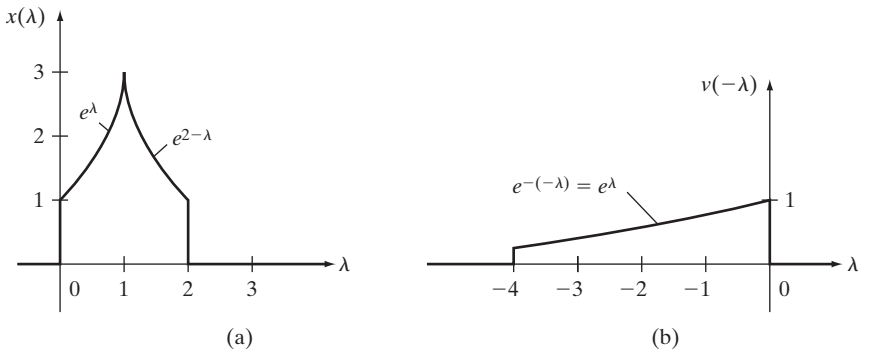



**FIGURA 2.25**
Funciones (a) $x(\lambda)$ y (b) $v(-\lambda)$.

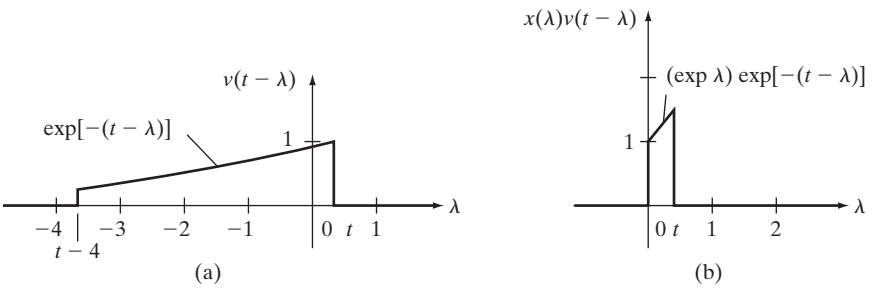



**FIGURA 2.26**
Funciones (a) $v(t-\lambda)$ y (b) $x(\lambda)v(t-\lambda)$ para $0 \leq t < 1$.

2.27 muestra las gráficas de estas funciones para $1 \leq t < 2$. Al integrar el producto $x(\lambda)v(t - \lambda)$, desplegado en la figura 2.26b para $0 \leq t < 1$, obtenemos

$$x(t) * v(t) = \int_0^t e^{\lambda} e^{-(t-\lambda)}\, d\lambda = e^{-t} \int_0^t e^{2\lambda}\, d\lambda$$

$$= \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$$

Al integrar el producto desplegado en la figura 2.27b, para $1 \leq t < 2$, se obtiene

$$x(t) * v(t) = \int_0^1 e^{\lambda} e^{-(t-\lambda)}\, d\lambda + \int_1^t e^{2-\lambda} e^{-(t-\lambda)}\, d\lambda$$

$$= \left[\frac{-e^2 - 1}{2} + e^2 t\right] e^{-t}$$

Si continuamos los pasos descritos anteriormente, para $2 \leq t < 4$,

$$x(t) * v(t) = \int_0^1 e^{\lambda} e^{-(t-\lambda)}\, d\lambda + \int_1^2 e^{2-\lambda} e^{-(t-\lambda)}\, d\lambda$$

$$= (3e^2 - 1)\frac{e^{-t}}{2}$$

Para $4 \leq t < 5$,

$$x(t) * v(t) = \int_{t-4}^1 e^{\lambda} e^{-(t-\lambda)}\, d\lambda + \int_1^2 e^{2-\lambda} e^{-(t-\lambda)}\, d\lambda$$

$$= \frac{1}{2}[3e^2 - e^{2(t-4)}]e^{-t}$$

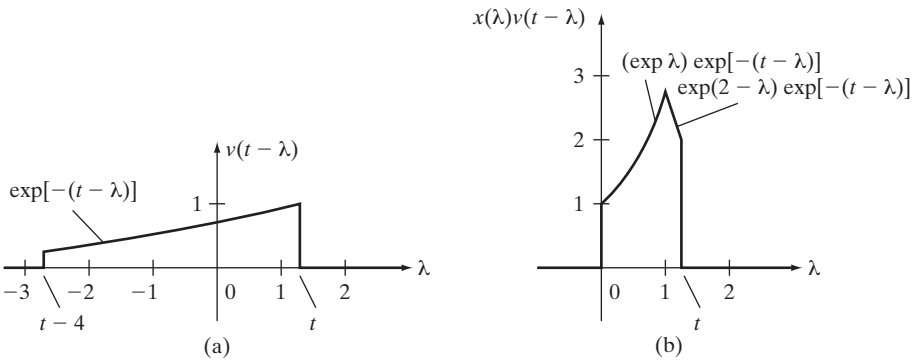



**FIGURA 2.27**
Funciones (a) $v(t - \lambda)$ y (b) $x(\lambda)v(t - \lambda)$ para $1 \leq t < 2$.

Para $5 \leq t < 6$,

$$x(t) * v(t) = \int_{t-4}^{2} e^{2-\lambda} e^{-(t-\lambda)}\, d\lambda$$
$$= e^{2}(6 - t)e^{-t}$$

Por último, para $t \geq 6$, $x(t)*v(t) = 0$, ya que las funciones $v(\lambda)$ y $x(t - \lambda)$ no se traslapan cuando $t \geq 6$.

Todas estas integrales pueden calcularse a mano, y MATLAB Symbolic Math Toolbox calcula las integrales fácilmente con los siguientes comandos:

```
syms t lambda y
y = int(exp(2*lambda-t),lambda,0,t);      %para 0<t<1
simplify(y)
y = int(exp(2*lambda-t),lambda,0,1)+int(exp(2-t),lambda,1,t); %para 1<t<2
simplify(y)
y = int(exp(2*lambda-t),lambda,0,1)+int(exp(2-t),lambda,1,2); %para 2<t<4
simplify(y)
y = int(exp(2*lambda-t),lambda,t-4,1)+int(exp(2-t),lambda,1,2); %para 4<t<5
simplify(y)
int(exp(2-t),lambda,t-4,2)  %para 5<t<6
```

El comando `syms t lambda y` construye objetos simbólicos `t`, `lambda`, y `y`. El comando `int` integra la expresión definida en el primer argumento respecto al segundo argumento `lambda`, con límites de integración dados por el tercer y cuarto argumentos. El comando `simplify` agrupa términos de una forma más sencilla.

---

**Sistemas no causales.** Si el sistema dado es no causal, $h(t)$ no será cero para $t < 0$ y, en este caso, el límite superior de la integral en la expresión de convolución (2.73) debe tomarse como $\infty$ (no $t$). Además, si $x(t)$ es diferente de cero para $t < 0$, el límite inferior de la integral (2.73) debe tomarse como $-\infty$. Entonces, para un sistema no causal con entrada $x(t) \neq 0$, para $t < 0$, la relación de convolución de entrada/salida está dada por

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t - \lambda)\, d\lambda$$

## 2.7 RESUMEN DEL CAPÍTULO

Este capítulo examina el análisis y modelado en el dominio del tiempo de los sistemas lineales invariantes en el tiempo. Aquí consideramos tanto los sistemas de tiempo continuo como de tiempo discreto. Un sistema de tiempo discreto puede representarse como una ecuación de diferencias, la cual puede resolverse con facilidad mediante la recursividad. De manera alterna, es posible utilizar la convolución para encontrar la respuesta a una entrada cualquiera, dada la respuesta al pulso unitario $h[n]$. La respuesta al pulso unitario es la respuesta de un sistema a una entrada pulso unitario cuando no hay energía almacenada en el sistema o, de modo equivalente, cuando hay condiciones iniciales nulas. Ejemplos comunes de sistemas de tiempo discreto son los filtros digitales, como los de promedio móvil.

Un sistema de tiempo continuo puede representarse como una ecuación diferencial, la cual en muchos casos podemos encontrar mediante las leyes de la física para determinar

las ecuaciones que rigen el comportamiento de un sistema. Ejemplos de sistemas físicos que tienen modelos de ecuaciones diferenciales son los circuitos eléctricos, sistemas mecánicos rotacionales y traslacionales, y sistemas electromecánicos como los motores. Los métodos de solución matemática clásicos para ecuaciones diferenciales no se tocan a profundidad en este libro. En su lugar, presentamos soluciones numéricas, así como un método de solución simbólica. En el capítulo 6 estudiaremos el método de solución mediante la transformada de Laplace, que con frecuencia es más sencillo de aplicar que los métodos clásicos de solución.

Como en el caso de los sistemas de tiempo discreto, la convolución es un método de solución en el dominio del tiempo, que se utiliza para determinar la respuesta de un sistema de tiempo continuo, a una entrada cualquiera. El sistema se caracteriza por su respuesta al impulso $h(t)$, la cual es la respuesta del sistema con condiciones iniciales nulas para una entrada de un impulso unitario. La respuesta al impulso se convoluciona con la entrada para obtener la salida correspondiente. Más aún, la integral de convolución puede verse como la representación de un sistema.

## PROBLEMAS

**2.1.** Considere el filtro PMPE de $N$ puntos dado por (2.4) y (2.5), donde $0 < b < 1$. Cuando la entrada $x[n]$ es igual a una constante $c$ para $n \geq 0$, muestre que la respuesta resultante $y[n] = c$, para toda $n \geq N$.

**2.2.** Genere una gráfica MATLAB de la respuesta de salida $y[n]$, para $5 \leq n \leq 40$ del filtro PMPE en el punto 5, con $b = 0.7$, cuando la entrada $x[n]$ es

**(a)** $x[n] = 1, 0 \leq n \leq 40$
**(b)** $x[n] = n, 0 \leq n \leq 40$
**(c)** $x[n] = \text{sen}(\pi n/10), 0 \leq n \leq 40$
**(d)** $x[n] = \text{sen}(.9\pi n), 0 \leq n \leq 40$
**(e)** Explique las diferencias en las respuestas obtenidas en los incisos ($c$) y ($d$).

**2.3.** Muestre que la relación de entrada/salida (2.4) del filtro PMPE en el punto $N$ se aproxima al filtro PM en el punto $N$, conforme $b$ se aproxima a 1.

**2.4.** Considere los precios de cierre de QQQQ para el periodo de 50 días hábiles del 1 de marzo de 2004 al 10 de mayo de 2004.

**(a)** Para el periodo de 40 días $11 \leq n \leq 50$, calcule la diferencia $D[n] = y1[n] - y2[n]$, donde $y1[n]$ es la respuesta del filtro PMPE en el día 11 con $b = 0.3$ y $y2[n]$ es la respuesta del filtro PMPE en el día 11 con $b = 0.7$. En la literatura de negocios, $D[n]$ en ocasiones se conoce como "señal MACD" (vea la sección 7.5).
**(b)** Suponga que las acciones se compran al cierre del Día $n$, cuando el valor de $D[n]$ crece por encima de cero, y luego las acciones se venden al cierre del Día $n$, cuando $D[n]$ cae por debajo de cero. Determine los días cuando hay una compra, y los días cuando hay una venta.
**(c)** Por cada señal de compra/venta del inciso (b), determine la pérdida o ganancia por acción.
**(d)** Utilizando su resultado del inciso (c), determine la ganancia o pérdida neta por acción durante el periodo de 40 días.

**2.5.** Calcule la respuesta al pulso unitario $h[n]$ para $n = 0, 1, 2, 3$, para cada uno de los siguientes sistemas de tiempo discreto:

**(a)** $y[n + 1] + y[n] = 2x[n]$
**(b)** $y[n + 1] + 1/2y[n] = x[n]$
**(c)** $y[n + 2] + 1.5y[n + 1] + 0.5y[n] = x[n]$
**(d)** $y[n + 2] + 1/2y[n + 1] + 1/4y[n] = x[n + 1] - x[n]$
**(e)** $y[n + 2] + 1/4y[n + 1] - 3/8y[n] = 2x[n + 2] - 3x[n]$

**2.6.** Calcule la respuesta al pulso unitario $h[n]$ para todos los enteros $n \geq 0$, para cada uno de los sistemas de tiempo discreto:

**(a)** $y[n+1] + y[n] = x[n]$
**(b)** $y[n+1] + 1/2y[n] = x[n+1]$
**(c)** $y[n+1] + 2y[n] = 2x[n+1] - 2x[n]$
**(d)** $y[n+1] - 1/2y[n] = x[n+1] + 1/2x[n]$
**(e)** $y[n+2] + 1/2y[n] = 2x[n+2] - x[n]$

**2.7.** Para las señales de tiempo discreto $x[n]$ y $v[n]$ que aparecen en la figura P2.7, haga lo siguiente:

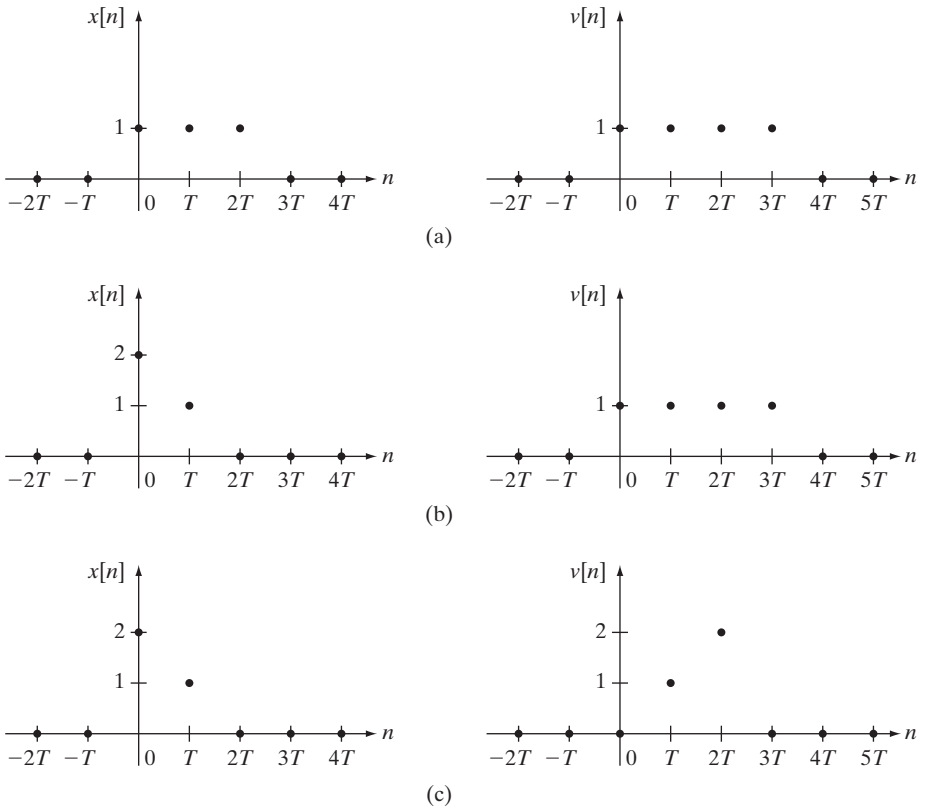



FIGURA P2.7

**(a)** Calcule la convolución $x[n]*v[n]$, para toda $n \geq 0$. Bosqueje los resultados.
**(b)** Repita el inciso (a), utilizando el archivo M `conv`.

**2.8.** Para las señales de tiempo discreto $x[n]$ y $v[n]$ dadas en cada uno de los siguientes incisos, calcule la convolución $x[n]*v[n]$, para toda $n \geq 0$ [calcule $x[n]*v[n]$, para $n \geq -2$, en el inciso (b)].

**(a)** $x[0] = 4$, $x[1] = 1$, $x[3] = -1$, $x[n] = 0$ para el resto de los enteros $n$; $v[0] = 1$, $v[1] = -2$, $v[2] = 3$, $v[3] = -4$, $v[n] = 0$ para el resto de los enteros $n$.
**(b)** $x[n] = 1$ para $-1 \leq n \leq 2$ y $x[n] = 0$ para el resto de los enteros $n$; $v[-1] = -1$; $v[0] = 0$, $v[1] = 8$, $v[2] = 2$, $v[3] = 3$ y $v[n] = 0$ para el resto de los enteros $n$.
**(c)** $x[n] = 2^n$ para $n \leq 3$ y $x[n] = 0$ para $n \geq 4$; $v[0] = 2$, $v[1] = -3$, $v[2] = 0$, $v[3] = 6$, $v[n] = 0$ para el resto de los enteros $n$.
**(d)** $x[n] = 1/n$ para $2 \leq n \leq 5$ y $x[n] = 0$ para el resto de los enteros $n$; $v[2] = -2$, $v[3] = -5$, $v[n] = 0$ para el resto de los enteros $n$.

**(e)** $x[n] = u[n]$, $v[n] = u[n]$, donde $u[n]$ es la función escalón unitario de tiempo discreto.
**(f)** $x[n] = u[n]$, $v[n] = \ln(n)$ para todos los enteros $n \geq 1$ y $v[n] = 0$ para todos los enteros $n < 1$.
**(g)** $x[n] = \delta[n] - \delta[n-2]$, donde $\delta[n]$ es el pulso unitario concentrado en $n = 0$; $v[n] = \cos(\pi n/3)$ para todos los enteros $n \geq 0$, $v[n] = 0$ para todos los enteros $n < 0$.

**2.9.** Convolucione $v[n]$ con $x[n]$ para cada uno de los incisos siguientes (a)-(c). Exprese su respuesta en forma cerrada.
**(a)** $v[n] = 2^n u[n]$ y $x[n] = u[n]$
**(b)** $v[n] = (0.25)^n u[n]$ y $x[n] = u[n]$
**(c)** $v[n] = 2^n u[n]$ y $x[n] = (0.5)^n u[n]$
**(d)** Utilice el archivo M `conv` para calcular la convolución de los incisos (a) a (c) para $0 \leq n \leq 20$; es decir, defina $x$ y $v$ para este rango de $n$, calcule la convolución y después guarde los valores de $x[n]*v[n]$ sólo para este rango de $n$. Grafique los resultados, utilizando una gráfica de tallo (vea los comentarios del problema 2.10, para más información sobre la convolución numérica de señales de duración infinita).

**2.10.** Usted debe tener cuidado cuando utilice una computadora para realizar convoluciones de señales de duración infinita (es decir, señales que no tienen valores cero en un número infinito de puntos). Debido a que usted puede almacenar sólo un número finito de valores para la señal, la convolución numérica devuelve una respuesta que es equivalente a la señal, siendo cero fuera del rango $n$ definido para los puntos almacenados. En MATLAB, si $x[n]$ se define para el rango $0 \leq n \leq q$ y $v[n]$ se define para el rango $0 \leq n \leq r$, el resultado $y[n] = x[n]*v[n]$ estará definido sobre el rango $0 \leq n \leq q + r$. Sin embargo, la respuesta será correcta sólo para el rango $0 \leq n \leq \min\{q,r\}$. Como un ejemplo, considere la convolución de dos funciones escalón, $u[n]*u[n]$.
**(a)** Calcule una expresión de forma cerrada para la convolución real [vea el problema 2.8(e)].
**(b)** Defina una señal que sea la versión truncada de un escalón $x[n] = u[n]$ para $n \leq q$ y $x[n] = 0$, para el resto de los enteros $n$. Calcule $x[n]*x[n]$ para $q = 5$. Compare este resultado con el encontrado en el inciso (a), para ver el efecto de corte.
**(c)** Ahora defina un vector en MATLAB que sea la versión truncada de la señal, es decir, que $x$ contenga sólo los elementos de $u[n]$ para $n \leq q$. Tome $q = 5$. Calcule la convolución numérica $x[n]*x[n]$ y grafique el resultado para $0 \leq n \leq 2q$. Compare este resultado con las respuestas encontradas en los incisos (a) y (b). ¿Para qué rango de $n$ el resultado representa exactamente la convolución de dos funciones escalón?
**(d)** Repita los incisos (b) y (c), para $q = 10$.

**2.11.** Utilice el archivo M `conv`, para obtener la convolución de las señales definidas en el problema 2.8, y compare sus respuestas con las encontradas en dicho problema. Utilice los comentarios de los problemas 2.9 y 2.10, cuando calcule las convoluciones de señales de duración infinita.

**2.12.** Un sistema de tiempo discreto tiene la siguiente respuesta al pulso unitario:

$$h[n] = 0.3(0.7)^n u[n]$$

**(a)** Utilice `conv` para calcular la respuesta de este sistema para $x[n] = u[n]$ y grafique la respuesta.
**(b)** Utilice `conv` para calcular la respuesta de este sistema para $x[n] = \text{sen}(n\pi/8)u[n]$ y grafique la respuesta.
**(c)** Utilice `conv` para calcular la respuesta de este sistema para $x[n] = u[n] + \text{sen}(n\pi/8)u[n]$ y grafique la respuesta.
**(d)** Encuentre la ecuación diferencial de primer orden que describe este sistema, donde $x$ es la entrada y $y$ la salida.
**(e)** Utilizando el resultado del inciso (d) y el archivo M `recur`, calcule la respuesta del sistema para $x[n] = u[n]$ y compárela con la respuesta obtenida en el inciso (a).

**2.13.** Un sistema de tiempo discreto tiene la siguiente respuesta al pulso unitario:

$$h[n] = ((0.5)^n - (0.25)^n)u[n]$$

**(a)** Utilice `conv` para calcular la respuesta de este sistema para $x[n] = u[n]$ y grafique la respuesta.
**(b)** Utilice `conv` para calcular la respuesta de este sistema para $x[n] = \text{sen}(n\pi/4)u[n]$ y grafique la respuesta.
**(c)** Utilice `conv` para calcular la respuesta de este sistema para $x[n] = u[n] + \text{sen}(n\pi/4)$ $u[n]$ y grafique la respuesta.
**(d)** Demuestre que la siguiente ecuación diferencial tiene la respuesta al pulso unitario dada en este problema:

$$y[n + 2] - 0.75y[n + 1] + 0.125y[n] = 0.25x[n + 1]$$

**(e)** Utilizando la ecuación diferencial del inciso (d) y el archivo M `recur`, calcule la respuesta del sistema $x[n] = u[n]$, y compárela con la respuesta obtenida en el inciso (a).

**2.14.** De nuevo considere el sistema de saldo de un préstamo con la ecuación diferencial de entrada/salida

$$y[n] - \left(1 + \frac{I}{12}\right)y[n - 1] = -x[n], n = 1, 2, \ldots$$

Recuerde que $y[0]$ es el monto del préstamo, $y[n]$ es el saldo del préstamo al final del mes $n$, $x[n]$ es el pago del préstamo en el mes $n$ e $I$ es la tasa de interés anual en forma decimal. Se supone que los pagos mensuales $x[n]$ para $n \geq 1$, son iguales a una constante $c$. Suponga que el número de meses en el periodo de reembolso es $N$. Deduzca una expresión para los pagos mensuales $c$, en términos de $y[0]$, $N$ e $I$.

**2.15.** Una cuenta de ahorros en el banco, con un interés que aumenta trimestralmente, puede modelarse mediante la ecuación diferencial de entrada/salida

$$y[n] - \left(1 + \frac{I}{4}\right)y[n - 1] = x[n], n = 1, 2, \ldots$$

donde $y[n]$ es el monto de la cuenta al final del trimestre $n$, $x[n]$ es el monto depositado en el trimestre $n$ e $I$ es la tasa de interés anual en forma decimal.
**(a)** Suponga que $I = 10\%$. Calcule $y[n]$ para $n = 1, 2, 3, 4$ cuando $y[0] = 1000$ y $x[n] = 1000$ para $n \geq 1$.
**(b)** Suponga que $x[n] = c$ para $n \geq 1$ y $y[0] = 0$. Dado un entero $N$, suponga que se desea tener un monto $y[N]$ en la cuenta de ahorros al final del trimestre $N$. Deduzca una expresión para $N$, en términos de $y[N]$, $c$, e $I$.
**(c)** Suponga que una CRI (cuenta de retiro individual) se establece con $y[0] = 2000$, I = 5%, y $x[n] = \$5{,}000$, $n \geq 1$ ($n$ = trimestre). ¿Cuántos años tomará juntar \$500,000 en la cuenta?
**(d)** Modifique el programa de saldo de préstamo dado en la figura 2.7, para calcular el monto del ahorro. Repita los incisos (a) y (c), utilizando su nuevo programa MATLAB.

**2.16.** Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales
**(i)** $y[n + 1] + 1.5y[n] = x[n]$
**(ii)** $y[n + 1] + 0.8y[n] = x[n]$
**(iii)** $y[n + 1] - 0.8y[n] = x[n]$
utilice el método de recursividad para resolver los siguientes problemas:
**(a)** Calcule $y[n]$ para $n = 0, 1, 2$, cuando $x[n] = 0$ para toda $n$ y $y[-1] = 2$.
**(b)** Calcule $y[n]$ para $n = 0, 1, 2$, cuando $x[n] = u[n]$ y $y[-1] = 0$.
**(c)** Calcule $y[n]$ para $n = 0, 1, 2$, cuando $x[n] = u[n]$ y $y[-1] = 2$.

**2.17.** Para las ecuaciones diferenciales dadas en el problema 2.16:
- **(a)** Encuentre una solución de forma cerrada para $y[n]$ cuando $x[n] = 0$ para toda $n$ y $y[0] = 2$.
- **(b)** Encuentre una solución de forma cerrada para $y[n]$ cuando $x[n] = u[n]$ y $y[0] = 0$.
- **(c)** Encuentre una solución de forma cerrada para $y[n]$ cuando $x[n] = u[n]$ y $y[0] = 2$.
- **(d)** Utilice el archivo M `recur` para resolver las ecuaciones diferenciales para los casos definidos en los incisos (a) a (c). Grafique las respuestas correspondientes a los incisos (a) a (c), junto con las respuestas encontradas con MATLAB.

**2.18.** Para las ecuaciones diferenciales dadas a continuación, resuelva la secuencia $y[n]$, utilizando el programa `recur` para $0 \leq n \leq 10$, y grafique y contra $n$ en una gráfica de tallo.
- **(a)** $y[n] = y[n-1] + u[n-1]$; $y[-1] = 0$
- **(b)** $y[n] = 0.5y[n-1]$; $y[-1] = 1$
- **(c)** $y[n] = 0.5y[n-1] + 0.1y[n-2] + u[n-1]$; $y[-2] = 1$, $y[-1] = 0$
- **(d)** $y[n] = 0.5y[n-2] + 0.1y[n-1] + (0.5)^n u[n]$; $y[-1] = y[-2] = 0$

**2.19.** Un sistema de tiempo discreto está dado por la siguiente ecuación diferencial de entrada/salida

$$y[n+2] + 0.75y[n+1] + 0.125y[n] = x[n]$$

- **(a)** Calcule $y[n]$ para $n = 0, 1, 2, 3$ cuando $y[-2] = -1, y[-1] = 2$, y $x[n] = 0$ para toda $n$.
- **(b)** Calcule $y[n]$ para $n = 0, 1, 2, 3$ cuando $y[-2] = y[-1] = 0$, y $x[n] = 1$ para $n \geq -2$.
- **(c)** Calcule $y[n]$ para $n = 0, 1, 2, 3$ cuando $y[-2] = -1, y[-1] = 2$, y $x[n] = 1$ para $n \geq -2$.
- **(d)** Calcule $y[n]$ para $n = 0, 1, 2, 3$ cuando $y[-2] = 2, y[-1] = 3$, y $x[n] = \text{sen}(\pi n/2)$ para $n \geq 0$.
- **(e)** Calcule $y[n]$ para $n = 0, 1, 2, 3$ cuando $y[-2] = -2, y[-1] = 4$, y $x[n] = (0.5)^{n-1}u[n-1]$ para toda $n$.

**2.20.** Para el circuito *RLC* de la figura P2.20, encuentre la ecuación diferencial de entrada/salida cuando las siguientes condiciones se alcanzaron:

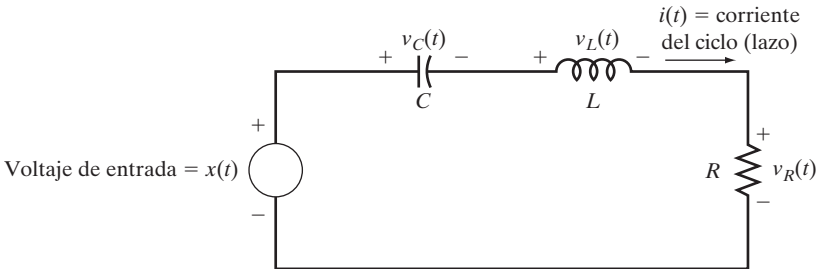



FIGURA P2.20

- **(a)** La salida es el voltaje $v_C(t)$ a través del capacitor.
- **(b)** La salida es la corriente $i(t)$ en el lazo.

**2.21.** Encuentre las ecuaciones diferenciales de entrada/salida para los circuitos de la figura P2.21.

**2.22.** Una masa $M$ se sitúa en la parte superior de un eliminador de vibraciones, como ilustra la figura P2.22. Como muestra la figura, una fuerza $x(t)$ (por ejemplo, una fuerza vibratoria) se aplica a la masa $M$, cuya base se ubica en la posición $y(t)$. Deduzca la ecuación diferencial de entrada/salida del sistema.

**2.23.** Considere el sistema que consta de dos masas y tres resortes, que aparece en la figura P.2.23. Las masas se encuentran sobre ruedas, las cuales se supone que no tienen fricción. La entrada $x(t)$ al sistema es la fuerza $x(t)$ aplicada a la primera masa. La posición de la

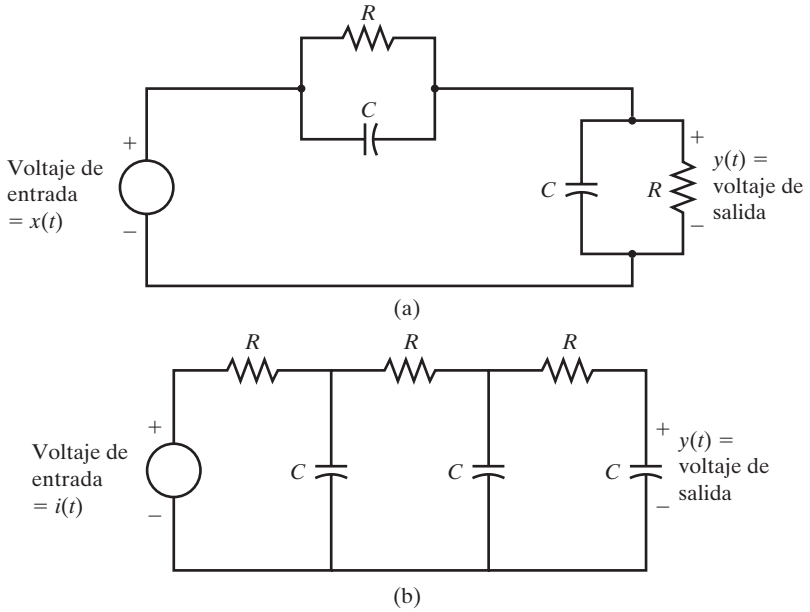



**FIGURA P2.21**

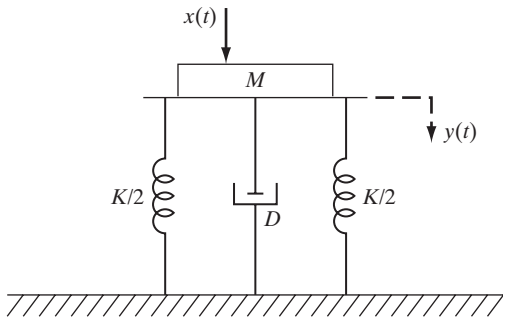



**FIGURA P2.22**

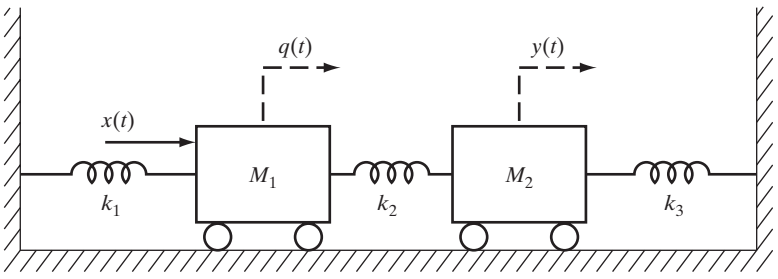



**FIGURA P2.23**

primera masa es $q(t)$ y la posición de la segunda masa es la salida $y(t)$, donde tanto $q(t)$ como $y(t)$ están definidas respecto a alguna posición de equilibrio. Determine la ecuación diferencial de entrada/salida del sistema.

**2.24.** Considere el circuito *RL* que aparece en la figura P2.24.

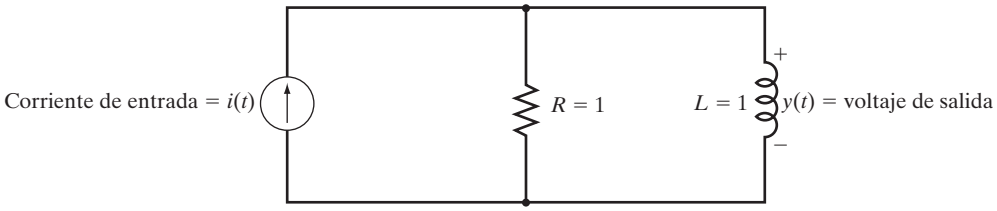



**FIGURA P2.24**

**(a)** Escriba una ecuación diferencial para este circuito, con la salida $y(t)$ y la entrada $i(t)$.
**(b)** Utilice MATLAB Symbolic Math Toolbox para resolver la expresión analítica del voltaje de salida $y(t)$, para toda $t > 0$, cuando $y(0) = 0$ e $i(t) = u(t) - u(t - 1)$, donde $u(t)$ es la función escalón.
**(c)** Utilizando la aproximación de Euler para derivadas, con $T$ y $x(t)$ cualesquiera, deduzca un modelo de ecuación diferencial para el circuito *RL*.
**(d)** Utilizando la respuesta del inciso (c) y el archivo M `recur`, con $T = 0.1$ e $i(t) = u(t) - u(t - 1)$, grafique la aproximación $y(t)$ para $t = 0$ hasta $t = 2$ segundos. Tome $y(-T) = 0$. Compare sus resultados con la solución exacta, graficada a partir de la respuesta obtenida en (a).
**(e)** Utilice el solucionador de MATLAB ODE `ode45` para resolver la salida cuando la entrada es la dada en el inciso (d). Compare esta solución con la exacta.

**2.25.** Considere la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + 4.25y(t) = 0, \quad y(0) = 2, \quad \dot{y}(0) = 1$$

**(a)** Muestre que la solución está dada por $y(t) = e^{-0.5t}(\text{sen } 2t + 2\cos 2t)$.
**(b)** Mediante la aproximación de Euler para derivadas, con $T$ y $x(t)$ cualesquiera, deduzca un modelo de ecuación diferencial.
**(c)** Utilizando la respuesta del inciso (b) y el archivo M `recur`, con $T = 0.1$, calcule la aproximación a $y(t)$.
**(d)** Repita el inciso (c) para $T = 0.05$.
**(e)** Grafique las respuestas obtenidas en los incisos (a), (c) y (d) para $0 \leq t \leq 10$ y compare los resultados.

**2.26.** Considere la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0$$

**(a)** Resuelva para $y(t)$, utilizando Symbolic Math Toolbox de MATLAB.
**(b)** Utilizando la aproximación de Euler, con $T$ y $x(t)$ cualesquiera, deduzca un modelo de ecuación diferencial. Por medio del archivo M `recur`, con $T = 0.4$, calcule la aproximación a $y(t)$.

**(c)** Repita la aproximación numérica del inciso (b) para $T = 0.1$.
**(d)** Encuentre la solución numérica a este problema, utilizando la aproximación de Runge-Kutta con el comando `ode45`.
**(e)** Grafique las respuestas obtenidas en los incisos (a), (b), (c) y (d), para $0 \leq t \leq 10$ y compare los resultados.

**2.27.** Considere la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0, \quad y(0) = 2, \quad \dot{y}(0) = -1$$

**(a)** Muestre que la solución está dada por $y(t) = 2e^{-t} + te^{-t}$.
**(b)** Utilizando la aproximación de Euler, con $T$ y $x(t)$ cualesquiera, deduzca un modelo de ecuación diferencial.
**(c)** Utilizando la respuesta del inciso (b) y el archivo M `recur`, con $T = 0.4$, calcule la aproximación a $y(t)$.
**(d)** Repita el inciso (c) para $T = 0.1$ segundos.
**(e)** Grafique la respuesta obtenida en los incisos (a), (c) y (d), para $0 \leq t \leq 10$ y compare los resultados.

Sistema masa-resorte-amortiguador

**2.28.** Considere el sistema masa-resorte-amortiguador descrito en el ejemplo 2.9 y en el demo en línea. La ecuación diferencial para el sistema, está dada por

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2} + D\frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = x(t)$$

**(a)** Utilice la aproximación Runge-Kutta con el comando `ode45` para simular la respuesta escalón unitario (es decir, la respuesta $y(t)$, cuando $x(t) = u(t)$) para $M = 10$, $D = 1$, y $K = 1$. Simule la respuesta lo suficiente grande para que $y(t)$ aparentemente logre un valor constante estable.
**(b)** Grafique su aproximación para $y(t)$ contra el tiempo.
**(c)** Calcule la respuesta para una entrada de $x(t) = 10\,\text{sen}(0.2\pi t)$ y grafique $y(t)$. Determine la amplitud de la sinusoide resultante.
**(d)** Utilice el demo en línea para verificar los resultados del inciso (b) y del (c). El botón "Show Input/Output Summary" puede utilizarse para ver los resultados.

**2.29.** Para las señales de tiempo continuo $x(t)$ y $v(t)$ que muestra la figura P2.29, calcule la convolución $x(t)*v(t)$, para $t \geq 0$ y grafique la señal resultante.

**2.30.** Calcule la convolución $x(t)*v(t)$ para $-\infty < t < \infty$, donde $x(t) = u(t) + u(t-1) - 2u(t-2)$ y $v(t) = 2u(t+1) - u(t) - u(t-1)$.

**2.31.** Un sistema de tiempo continuo tiene la relación de entrada y salida

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} (t - \lambda + 2)x(\lambda)\, d\lambda$$

**(a)** Determine la respuesta impulso $h(t)$ del sistema.
**(b)** Calcule la respuesta de salida $y(t)$ para $1 \leq t \leq 2$, cuando $x(t) = u(t) - u(t-1)$.

**2.32.** Un sistema lineal de tiempo continuo invariante en el tiempo y causal tiene la respuesta al impulso

$$h(t) = e^{-t} + \text{sen}\, t, t \geq 0$$

**(a)** Calcule la respuesta de salida para toda $t \geq 0$, cuando la entrada es la función escalón unitario $u(t)$.
**(b)** Calcule la respuesta de salida $y(t)$, para toda $t \geq 0$, resultante de la entrada $u(t) - u(t-2)$.

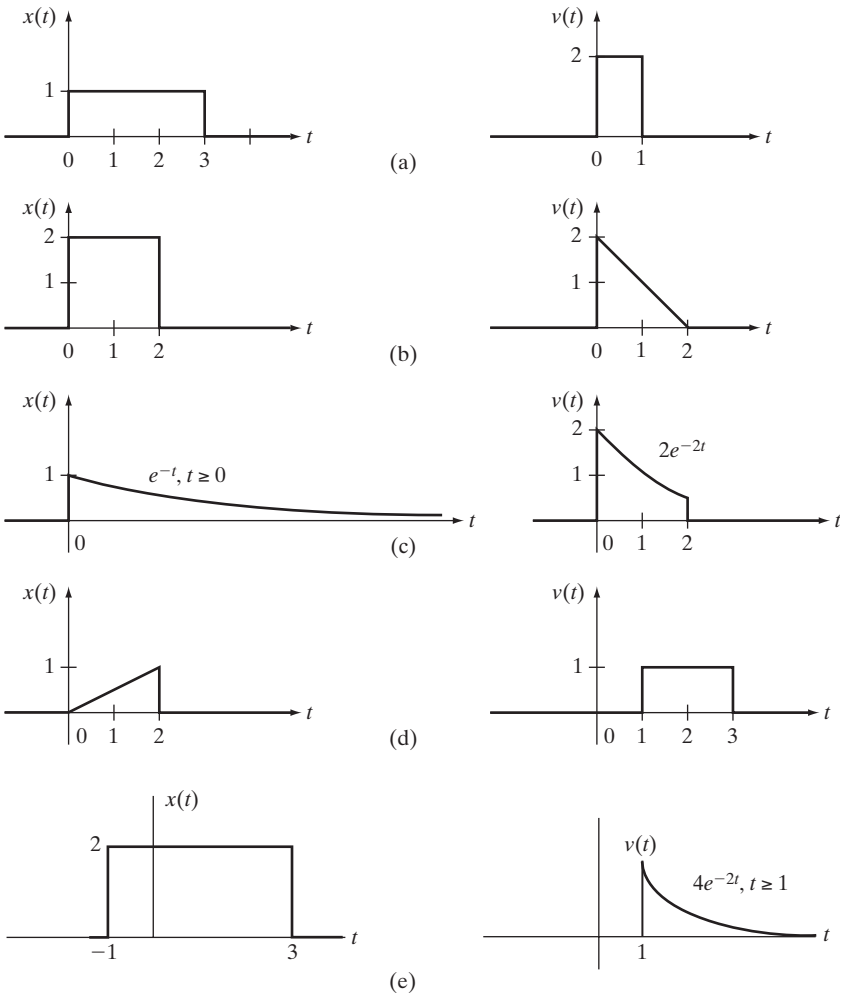



FIGURA P2.29

**2.33.** Un sistema lineal de tiempo continuo invariante en el tiempo y causal tiene la respuesta al impulso $h(t) = (\text{sen } t)\, u(t-2)$. Calcule la respuesta de salida $y(t)$ para toda $t \geq 0$, cuando $x(t) = u(t) - u(t-1)$.

**2.34.** Considere el circuito en serie *RLC* que aparece en la figura P2.34a. El circuito es equivalente a la conexión en cascada que aparece en la figura P2.34b, es decir, el sistema de la figura P2.34b tiene la misma ecuación diferencial de entrada/salida que el circuito *RLC*.

**(a)** Encuentre la respuesta al impulso de cada uno de los subsistemas de la figura P2.34b.

**(b)** Utilizando los resultados del inciso (a), calcule la respuesta al impulso del circuito *RLC*.

**(c)** Utilice la aproximación Runge-Kutta con el comando `ode45`, para determinar la respuesta de salida, cuando $x(t) = \text{sen}(t)u(t)$, y $y(0) = \dot{y}(0) = 0$.

**(d)** De nuevo suponga que $x(t) = \text{sen}(t)u(t)$. Utilice la aproximación de Euler y el archivo M `recur`, para calcular $y[n]$ para $0 \leq n \leq 100$, con $T = 0.1$. Tome $y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0$. Compare sus resultados con los obtenidos en el inciso (c).

**(e)** ¿Qué esquema de aproximación arroja mejores resultados?

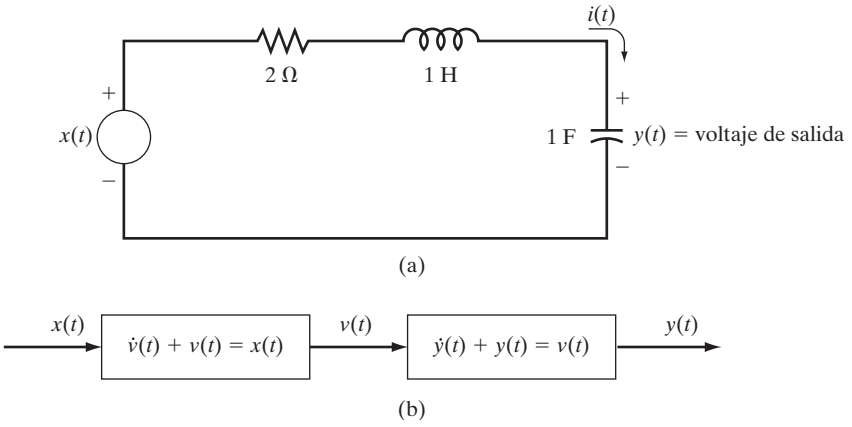



FIGURA P2.34

**2.35.** Considere el punto de visión más alto del ojo humano que aparece en la figura P2.35. La entrada $x(t)$ es la posición angular $\theta_T(t)$ del objetivo, y la salida $y(t)$ es la posición angular $\theta_E(t)$ del ojo, con ambas posiciones angulares definidas respecto a la posición de descanso. Un modelo ideal para el movimiento del ojo está dado por las ecuaciones

$$T_e \frac{d\theta_E(t)}{dt} + \theta_E(t) = R(t)$$

$$R(t) = b\theta_T(t - d) - b\theta_T(t - d - c) + \theta_T(t - d)$$

donde $R(t)$ es la razón de disparo de acciones potenciales del nervio óptico hacia el músculo del ojo, $d$ es el tiempo de retraso entre el sistema nervioso central, y $T_e$, $b$, y $c$ son constantes positivas.

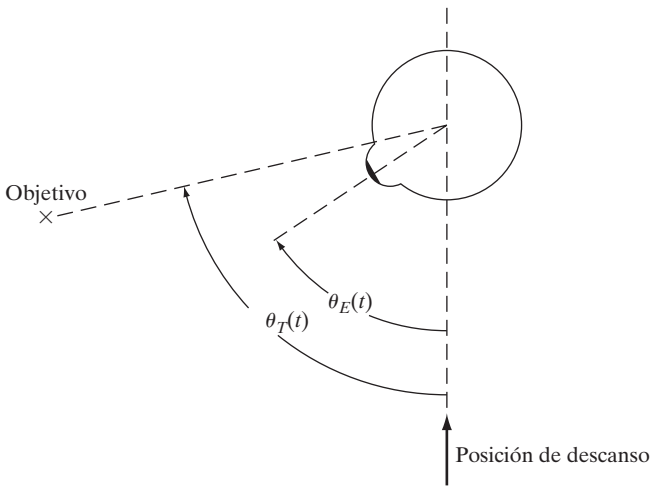



FIGURA P2.35

**(a)** Utilizando el manipulador simbólico, deduzca una expresión para $\theta_E(t)$, cuando el objetivo súbitamente se mueve de la posición de descanso hacia la posición $A$ en el tiempo $t = 0$; es decir, $\theta_T(t) = Au(t)$. Suponga que $\theta_E(0) = 0$.

**(b)** Utilizando el resultado del inciso (a), demuestre que existe un valor de $b$ para el que $\theta_E(t) = A$, para toda $t \geq d + c$; en otras palabras, el ojo voltea hacia el objetivo al tiempo $d + c$.

**2.36.** Para el sistema de un solo ojo del problema 2.35, suponga que $T_e = c = 0.1$, $d = 0.2$, y $\theta_T(t) = u(t)$. Para los valores de $b$ dados a continuación, simule el sistema mediante el método de Runge-Kutta, con el comando `ode45`, para calcular los valores aproximados $\theta_E(t)$ de la salida resultante (posición del ojo), para $0 \leq t \leq 2$.

**(i)** $b = 1$

**(ii)** $b = 0.2$

**(iii)** $b =$ valor encontrado en el inciso (b) del problema 2.35.

¿El ojo voltea hacia el objetivo con estos valores de $b$? Explique sus resultados.

CAPÍTULO

3

# Series y transformada de Fourier

En este capítulo explicamos el concepto fundamental del espectro de frecuencia de una señal de tiempo continuo. Como veremos más adelante, el espectro de frecuencia despliega las diversas componentes sinusoidales que forman una señal de tiempo continuo. Por lo general, el espectro de frecuencia es una función de la variable frecuencia valuada en complejos, y por lo tanto, se especifica en términos de un espectro de amplitud y un espectro de fase.

En este capítulo comenzaremos con el estudio de las señales que pueden expresarse como la suma de sinusoides, las cuales incluyen señales periódicas si se permite un número infinito de términos dentro de la suma. En el caso de una señal periódica, el espectro de frecuencia puede generarse mediante el cálculo de las *series de Fourier*. Las series de Fourier son llamadas así en honor al físico francés Jean Baptiste Fourier (1768-1830), quien fue el primero en proponer que las ondas de forma periódica podían representarse mediante la suma de ondas sinusoidales (exponenciales complejas). Es interesante observar que, además de sus contribuciones a la ciencia y a las matemáticas, Fourier fue un político muy activo de su tiempo. Por ejemplo, jugó un papel muy importante en las expediciones de Napoleón a Egipto durante la última parte de la década de 1790.

En la sección 3.1 presentamos un análisis en el dominio de frecuencia para señales de tiempo continuo que pueden expresarse como una suma finita de sinusoides. Después, esto nos lleva a la representación trigonométrica de la serie de Fourier de señales periódicas que presentamos en la sección 3.2. En la sección 3.3 consideramos la forma exponencial compleja de la serie de Fourier. En esta sección definimos el espectro de frecuencia de una señal periódica en términos de las magnitudes y ángulos de los coeficientes de las exponenciales complejas que comprenden las series de Fourier.

En la sección 3.4 definimos la transformada de Fourier de una señal no periódica. En contraste con una señal periódica, los espectros de amplitud y fase de una señal no periódica se componen por series continuas de frecuencia. En el capítulo 5 veremos que la representación de las señales de entrada en términos de su espectro de frecuencia es muy útil para determinar la forma en que un sistema lineal e invariante en el tiempo procesa las entradas.

En la sección 3.5 generamos el espectro de frecuencia para señales específicas mediante el manipulador simbólico de MATLAB, y en la sección 3.6 explicamos las propiedades de la transformada de Fourier. En la sección 3.7 damos una breve explicación de la transformada generalizada de Fourier, y luego en la sección 3.8 explicamos cómo aplicar la transformada de Fourier a la modulación y demodulación. En la sección 3.9 presentamos un resumen del capítulo.

## 3.1 REPRESENTACIÓN DE SEÑALES EN TÉRMINOS DE SUS COMPONENTES DE FRECUENCIA

Un concepto fundamental en el estudio de señales es el concepto de *contenido de frecuencia* de una señal. Podemos generar el contenido de frecuencia para una gran cantidad de señales si dividimos la señal en sus componentes de frecuencia, las cuales están dadas por

sinusoides. Por ejemplo, considere la señal de tiempo continuo *x(t),* definida por la suma finita de sinusoides

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(\omega_k t + \theta_k), \quad -\infty < t < \infty \tag{3.1}$$

En (3.1), $N$ es un entero positivo, las $A_k$ (las cuales asumimos como no negativas) representan las amplitudes de las funciones sinusoidales, las $\omega_k$ representan las frecuencias (en rad/s) de las sinusoides, y las $\theta_k$ representan las fases de las sinusoides.

En el caso de la señal dada por (3.1), las frecuencias "presentes en la señal" son las frecuencias $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$ de las sinusoides que constituyen la señal, y las componentes de frecuencia de la señal son las sinusoides $A_k \cos(\omega_k t + \theta_k)$ que constituyen la señal. Es importante observar que la señal dada por (3.1) se caracteriza por completo por las frecuencias $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$, las amplitudes $A_1, A_2, \ldots, A_N$, y las fases $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$, en la representación dada por la ecuación (3.1).

Podemos estudiar las características de una señal dada por (3.1) en función de las frecuencias, las amplitudes y las fases de los términos sinusoidales que componen la señal. En particular, las amplitudes $A_1, A_2, \ldots, A_N$ especifican los pesos relativos de las componentes de frecuencia que componen la señal, y estos pesos son un factor importante para determinar la "forma" de la señal. Explicamos esto mediante el siguiente ejemplo.

---

### Ejemplo 3.1 Suma de sinusoides

Suma de sinusoides

Considere la señal continua dada por

$$x(t) = A_1 \cos t + A_2 \cos(4t + \pi/3) + A_3 \cos(8t + \pi/2), -\infty < t < \infty \tag{3.2}$$

Resulta obvio que esta señal contiene tres componentes de frecuencia, con frecuencias de 1, 4, 8 rad/s, amplitudes $A_1, A_2, A_3$, y fases 0, $\pi/3$, $\pi/2$ rad. Aquí la meta es mostrar que la forma de la señal depende de las magnitudes relativas de las componentes de frecuencia que dan forma a la señal, las cuales se especifican en términos de las amplitudes $A_1, A_2, A_3$. Para este propósito, utilizamos los siguientes comandos de MATLAB para generar $x(t)$, para cualesquiera valores de $A_1, A_2$, y $A_3$:

```
t = 0:20/400:20;
w1 = 1; w2 = 4; w3 = 8;
A1 = input('Input the amplitude A1 for w1 = 1: ');
A2 = input('Input the amplitude A2 for w2 = 4: ');
A3 = input('Input the amplitude A3 for w3 = 8: ');
x = A1*cos(w1*t)+A2*cos(w2*t+pi/3)+A3*cos(w3*t+pi/2);
```

Mediante los comandos anteriores generamos las gráficas MATLAB de $x(t)$ para los tres casos $A_1 = 0.5, A_2 = 1, A_3 = 0$; $A_1 = 1, A_2 = 0.5, A_3 = 0$; y $A_1 = 1, A_2 = 1, A_3 = 0$. En la figura 3.1 aparecen las gráficas resultantes. En los tres casos, sólo están presentes las componentes de frecuencia de 1 rad/s y 4 rad/s. En el primer caso, la componente 4 rad/s es del doble que la componente 1 rad/s. El dominio de la componente 4 rad/s es obvia en la figura 3.1a. En el segundo caso domina la componente 1 rad/s, lo cual provoca la forma de una señal como la de la figura 3.1b. En el tercer caso, ambas componentes de frecuencia tienen la misma amplitud, lo cual provoca una forma de onda como la que muestra la figura 3.1c.

Ejecutamos de nuevo el programa de MATLAB para los casos $A_1 = 0.5, A_2 = 1, A_3 = 0.5$; $A_1 = 1, A_2 = 0.5, A_3 = 0.5$; y $A_1 = 1, A_2 = 1, A_3 = 1$. En estos tres casos, las tres componentes es-

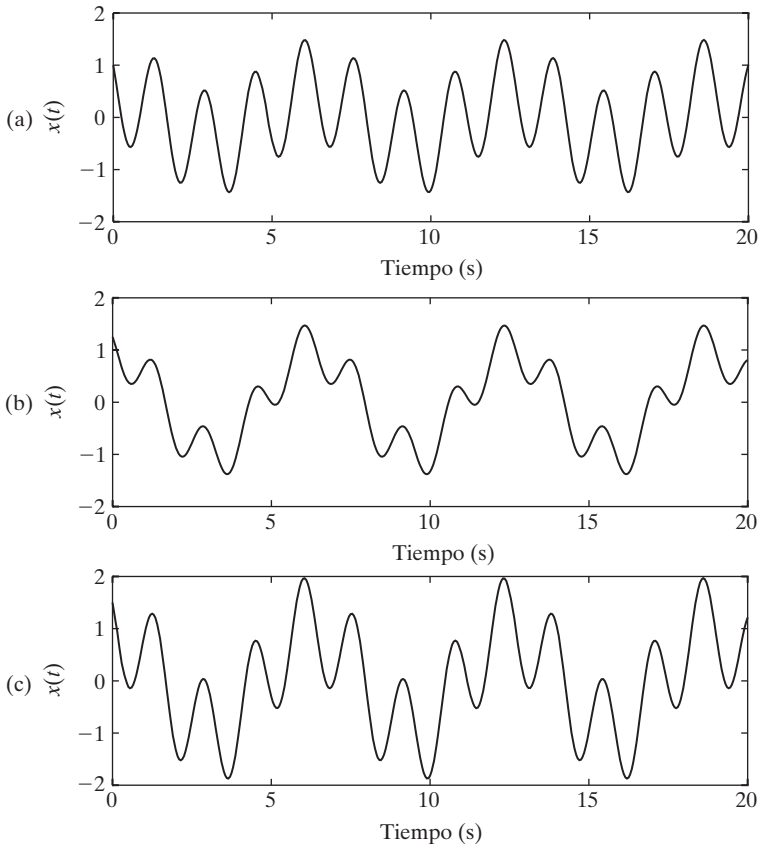



**FIGURA 3.1**
Gráficas de $x(t)$ para (a) $A_1 = 0.5, A_2 = 1, A_3 = 0$; (b) $A_1 = 1, A_2 = 0.5, A_3 = 0$; y (c) $A_1 = 1, A_2 = 1, A_3 = 0$.

tán presentes, donde la componente 4 rad/s domina en el primer caso, la componente 1 rad/s domina en el segundo caso, y con las tres componentes con la misma amplitud en el tercer caso. La figura 3.2 muestra las gráficas de $x(t)$ para estos tres casos. En cada una de las gráficas, usted será capaz de distinguir las tres componentes de frecuencia que componen la señal.

Considere de nuevo la señal dada por (3.1). Con $\omega$ igual a la *frecuencia variable* (una frecuencia real), las amplitudes $A_k$ pueden graficarse contra $\omega$. Dado que sólo existe un número finito de frecuencias presentes en $x(t)$, la gráfica de $A_k$ contra $\omega$ constará de un número finito de puntos graficados con las frecuencias $\omega_k$ presentes en $x(t)$. Por lo general, dibujamos las líneas verticales conectando los valores de $A_k$ con los puntos $\omega_k$. La gráfica que resulta es un ejemplo de un *espectro de línea* y se le conoce como *espectro de amplitud* de la señal $x(t)$. El espectro de amplitud muestra las magnitudes relativas de las distintas componentes de frecuencia que forman la señal. Por ejemplo, considere la señal del ejemplo 3.1 dada por (3.2). Para las distintas versiones de la señal graficada en la figura 3.2, la figura 3.3 muestra el espectro de amplitud. Observe la correspondencia directa entre las

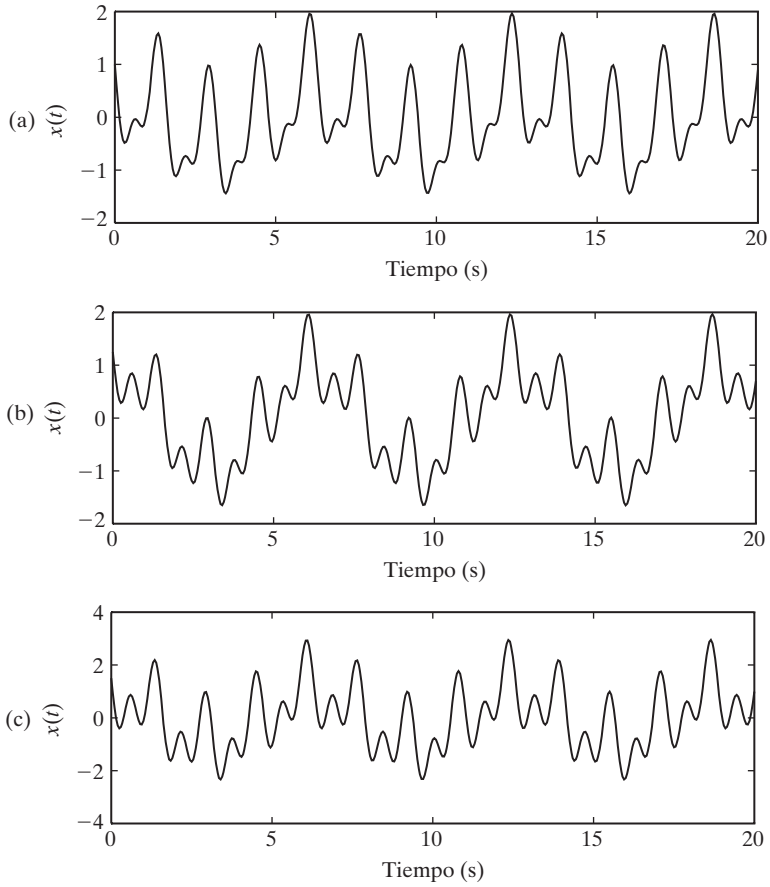



**FIGURA 3.2**
Gráficas de $x(t)$ para (a) $A_1 = 0.5, A_2 = 1, A_3 = 0.5$; (b) $A_1 = 1, A_2 = 0.5, A_3 = 0.5$; y (c) $A_1 = 1, A_2 = 1, A_3 = 1$.

magnitudes de las componentes espectrales que mostramos en la figura 3.3 y la forma de las señales de la figura 3.2.

Además del espectro de amplitud, la señal definida por (3.1) también contiene un *espectro de fase*, el cual es una gráfica de la fase $\theta_k$ en grados (o radianes) contra la variable frecuencia $\omega$. De nuevo, para generar esta gráfica, dibujamos las líneas verticales, conectando los valores de $\theta_k$ con los puntos de frecuencia $\omega_k$, de modo que el espectro de fase también resulta un espectro de línea. Por ejemplo, en la figura 3.4 graficamos el espectro de fase de la señal dada por (3.2). Como explicamos en la sección 3.3, los espectros de amplitud y de fase de una suma de funciones sinusoidales por lo general se generan respecto a la forma exponencial compleja de las sinusoides. Por lo tanto, los espectros que mostramos en las figuras 3.3 y 3.4 no tienen una forma estándar, pero el formato que consideramos en esta sección proporciona una sencilla introducción al concepto de espectros de línea, que veremos en la sección 3.3.

Suma de sinusoides

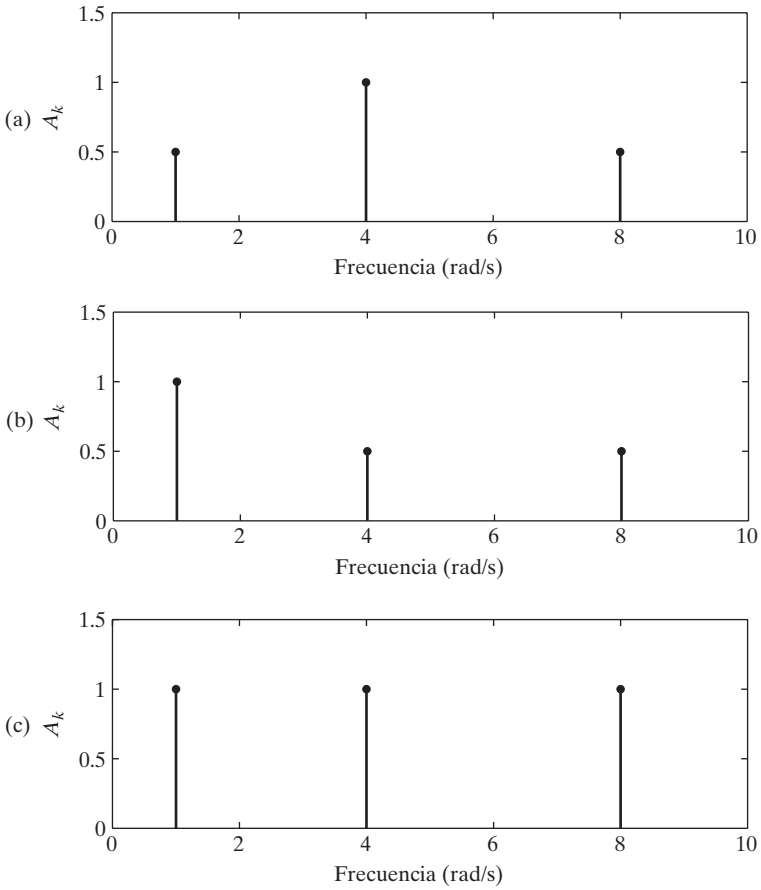



**FIGURA 3.3**
Espectros de amplitud de las versiones de $x(t)$ graficadas en la figura 3.2.

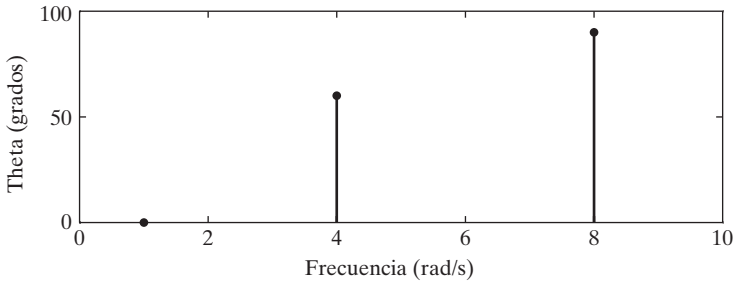



**FIGURA 3.4**
Espectro de fase de la señal $x(t)$ definida por (3.2).

## 3.2 SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER

Sea $T$ un número real positivo fijo. Como definimos en la sección 1.1, se dice que una señal de tiempo continuo $x(t)$ es periódica con un periodo $T$ si

$$x(t + T) = x(t), -\infty < t < \infty \tag{3.3}$$

Recuerde que el periodo fundamental $T$ es el número positivo más pequeño con el que se satisface (3.3). Por ejemplo, el tren de pulsos rectangulares que muestra la figura 3.5 es periódico, con un periodo fundamental $T = 2$.

Sea $x(t)$ una señal periódica con periodo fundamental $T$. Entonces, $x(t)$ puede expresarse como la suma de sinusoides (por lo general, infinita)

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \operatorname{sen}(k\omega_0 t)], -\infty < t < \infty \tag{3.4}$$

En la representación de (3.4), $a_0$, $a_k$ y $b_k$ son números reales, y $\omega_0$ es la *frecuencia fundamental* (en rad/s) dada por $\omega_0 = 2\pi/\mathrm{T}$, donde $T$ es el periodo fundamental. Los coeficientes $a_k$ y $b_k$ se calculan mediante las fórmulas

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t) \cos(k\omega_0 t)\, dt, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.5}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t) \operatorname{sen}(k\omega_0 t)\, dt, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.6}$$

Debemos destacar que $a_k$ y $b_k$, dadas por (3.5) y (3.6) pueden calcularse mediante la integración sobre cualquier periodo completo. Por ejemplo,

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(k\omega_0 t)\, dt, \quad k = 1, 2, \ldots$$

El término $a_0$ en (3.4) es la constante o componente de cd de $x(t)$ dada por

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, dt \tag{3.7}$$

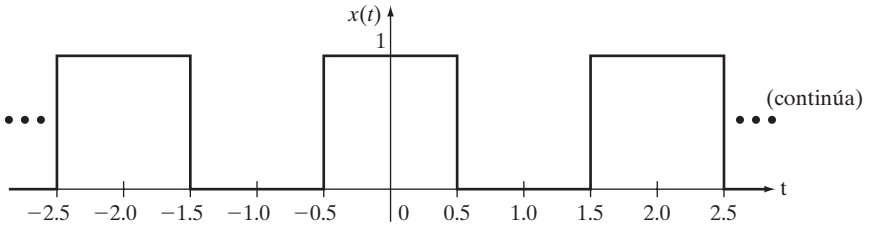



**FIGURA 3.5**
Señal periódica con periodo fundamental $T = 2$.

La representación (3.4) se conoce como *serie trigonométrica de Fourier* de la señal periódica $x(t)$. El primer armónico de $x(t)$ es el término $a_1 \cos(\omega_0 t) + b_1 \operatorname{sen}(\omega_0 t)$, el segundo armónico es el término $a_2 \cos(2\omega_0 t) + b_2 \operatorname{sen}(2\omega_0 t)$, y el $k$-ésimo armónico es el término $a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \operatorname{sen}(k\omega_0 t)$. Observe que las frecuencias de los armónicos que conforman $x(t)$ son múltiplos enteros $k\omega_0$ de la frecuencia fundamental $\omega_0$. Ésta es una propiedad fundamental de las señales periódicas.

La serie trigonométrica de Fourier dada por (3.4) puede escribirse en la *forma de cosenos con fase*

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k), \quad -\infty < t < \infty \tag{3.8}$$

donde

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, k = 1, 2, \ldots \tag{3.9}$$

y

$$\theta_k = \begin{cases} \tan^{-1}\left(-\dfrac{b_k}{a_k}\right), & k = 1, 2, \ldots, \text{cuando } a_k \geq 0 \\ \pi + \tan^{-1}\left(-\dfrac{b_k}{a_k}\right), & k = 1, 2, \ldots, \text{cuando } a_k < 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

Vale la pena observar que si se le agrega un término constante $a_0$ a la suma de (3.1), y se permite que la suma sea infinita (es decir, $N = \infty$), entonces la serie de Fourier (3.8) es un caso especial de (3.1), ya que todas las frecuencias presentes en la señal son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental $\omega_0$. Para decirlo de otra forma, con $N = \infty$ en (3.1), y con la adición del término constante $a_0$, la clase de señales que pueden expresarse de la forma (3.1) incluye a la clase de señales periódicas dadas por (3.8).

La representación de la serie de Fourier de una señal periódica es un resultado notable. En particular, muestra que una señal periódica, como la onda con "esquinas" de la figura 3.5, puede expresarse como una suma de sinusoides. Debido a que las sinusoides son funciones infinitamente suaves (es decir, tienen derivadas ordinarias de cualquier orden), es difícil creer que señales con esquinas puedan expresarse como suma de sinusoides. Por supuesto, la clave es que la suma es infinita. No es sorprendente que Fourier haya tenido un periodo difícil para convencer a sus colegas (en este caso, a los miembros de la Academia Francesa de Ciencia) de que su teorema era verdadero.

Fourier creía que cualquier señal periódica podía expresarse como la suma de sinusoides. Sin embargo, esto resultó no ser el caso, aunque casi todas las señales periódicas que surgen en ingeniería tienen representación con las series de Fourier. En particular, una señal periódica $x(t)$ tiene una serie de Fourier si satisface las siguientes *condiciones de Dirichlet*:

**1.** $x(t)$ es totalmente integrable sobre cualquier periodo; es decir,

$$\int_a^{a+T} |x(t)|\, dt < \infty \quad \text{para cualquier } a$$

**2.** $x(t)$ sólo tiene un número finito de máximos y mínimos sobre cualquier periodo.

**3.** $x(t)$ sólo tiene un número finito de discontinuidades sobre cualquier periodo.

### Ejemplo 3.2 Tren de pulsos rectangulares

Considere el tren de pulsos rectangulares que aparece en la figura 3.5. Esta señal es periódica con periodo fundamental $T = 2$, por lo tanto, la frecuencia fundamental es $\omega_0 = 2\pi/2 = \pi$ rad/s. La señal obviamente satisface las condiciones de Dirichlet, por lo tanto, tiene una representación con una serie de Fourier. Si partimos de (3.7), la componente constante de $x(t)$ es

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 x(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{0.5}(1)\,dt + \frac{1}{2}\int_{1.5}^2(1)\,dt = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Si evaluamos (3.5) obtenemos

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{2}\int_0^2 x(t)\cos(k\pi t)\,dt \\
&= \int_0^{0.5}\cos(k\pi t)\,dt + \int_{1.5}^2\cos(k\pi t)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi k}\operatorname{sen}(k\pi t)\Big|_{t=0}^{t=0.5} + \frac{1}{\pi k}\operatorname{sen}(k\pi t)\Big|_{t=1.5}^{t=2} \\
&= \frac{1}{\pi k}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{3k\pi}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\pi k}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2} + k\pi\right)\right] \\
&= \frac{1}{\pi k}\left[2\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right], k = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

Si evaluamos (3.6) obtenemos

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{2}\int_0^2 x(t)\operatorname{sen}(k\pi t)\,dt \\
&= \int_0^{0.5}\operatorname{sen}(k\pi t)\,dt + \int_{1.5}^2\operatorname{sen}(k\pi t)\,dt \\
&= -\frac{1}{\pi k}\cos(k\pi t)\Big|_{t=0}^{t=0.5} - \frac{1}{\pi k}\cos(k\pi t)\Big|_{t=1.5}^{t=2} \\
&= -\frac{1}{\pi k}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right] \\
&= 0, k = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

Después, si sustituimos los valores para $a_0, a_k$ y $b_k$ en (3.4), obtenemos como resultado la siguiente serie de Fourier para el tren de pulsos que aparece en la figura 3.5:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right)\cos(k\pi t), -\infty < t < \infty \tag{3.11}$$

Observe que, debido a que $\text{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 0$ para $k = 2, 4, 6, \ldots$, la señal $x(t)$ contiene sólo armónicos impares y, entonces, (3.11) puede escribirse de la forma

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impares}}}^{\infty} \frac{1}{k} \text{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right) \cos(k\pi t), \; -\infty < t < \infty \tag{3.12}$$

### 3.2.1 Simetría par o impar

Se dice que una señal $x(t)$ es una *función par* de $t$ si $x(t) = x(-t)$ para $-\infty < t < \infty$, y $x(t)$ es una *función impar* de $t$ si $x(t) = -x(-t)$ para $-\infty < t < \infty$. Ejemplos de señales pares son $A\cos(\rho t)$ para cualesquiera números reales $A$ y $\rho$, y el tren de pulsos que muestra la figura 3.5. Para cualesquiera números reales $A$ y $\rho$, la señal $A\,\text{sen}(\rho t)$ es una función impar de $t$.

Si $x(t)$ y $v(t)$ son dos funciones pares de $t$ (o impares) cualesquiera, entonces para cualquier constante $\eta > 0$,

$$\int_{-\eta}^{\eta} x(t)v(t)\,dt = 2\int_{0}^{\eta} x(t)v(t)dt \tag{3.13}$$

Si $x(t)$ es par y $v(t)$ es impar, entonces

$$\int_{-\eta}^{\eta} x(t)v(t)\,dt = 0 \tag{3.14}$$

Invitamos al lector a que pruebe estos resultados en el problema 3.5.

Entonces, ya que $\cos(k\pi t)$ es una función par de $t$, y $\text{sen}(k\pi t)$ es una función impar de $t$, si $x(t)$ es una señal periódica par con periodo $T$, (3.5) y (3.6) se reducen a

$$a_k = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} x(t)\cos(k\omega_0 t)\,dt, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.15}$$

$$b_k = 0, k = 1, 2, \ldots \tag{3.16}$$

Si $x(t)$ es una señal periódica impar con periodo $T$, (3.5) y (3.6) se reducen a

$$a_k = 0, k = 1, 2, \ldots \tag{3.17}$$

$$b_k = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} x(t)\,\text{sen}(k\omega_0 t)\,dt, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.18}$$

Las expresiones dadas por (3.15)-(3.16) y (3.17)-(3.18) simplifican en gran medida el cálculo de los coeficientes de las series de Fourier, en los casos en que $x(t)$ es par o impar. Para ilustrar esto, mediante la simetría, recalculamos los coeficientes de la serie de Fourier del tren de pulsos de la figura 3.5.

### Ejemplo 3.3 Cómo utilizar la simetría

De nuevo considere el tren de pulsos de la figura 3.5. Como vimos, esta señal es una función par de $t$ y, por lo tanto, (3.15) y (3.16) pueden utilizarse para calcular los coeficientes de la serie de Fourier $a_k$ y $b_k$, de la siguiente manera. Primero, ya que $x(t)$ es par, por (3.16) $b_k = 0, k = 1, 2, \ldots$. Después, si utilizamos (3.15) obtenemos

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{4}{2}\int_0^1 x(t)\cos(k\pi t)\,dt \\ &= 2\int_0^{.5} \cos(k\pi t)\,dt \\ &= \frac{2}{k\pi}\text{sen}(k\pi t)\Big|_{t=0}^{t=.5} \\ &= \frac{2}{k\pi}\text{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right), k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Estos valores para $a_k$ y $b_k$ son los mismos que los encontrados en el ejemplo 3.2, por lo que vemos que el uso de la simetría arroja el mismo resultado.

## 3.2.2 Fenómeno de Gibbs

De nuevo, considere el tren de pulsos $x(t)$ con la representación trigonométrica de la serie de Fourier (3.12). Dado un entero positivo impar $N$, sea $x_N(t)$ quien denote la suma finita

$$x_N(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impar}}}^{N} \frac{1}{k}\text{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right)\cos(k\pi t), \infty < t < \infty$$

Convergencia de las series de Fourier

Por el teorema de Fourier, $x_N(t)$ debe converger en $x(t)$ cuando $N \to \infty$. En otras palabras, $|x_N(t) - x(t)|$ debe acercarse a cero para toda $t$ conforme $N$ se incrementa. Entonces, para un valor suficientemente grande de $N$, $x_N(t)$ debe ser una aproximación cercana a $x(t)$. Para ver si éste es el caso, $x_N(t)$ puede simplemente graficarse para diversos valores de $N$. Los comandos de MATLAB para generar $x_N(t)$ son

```
t = -3:6/1000:3;
N = input('Number of harmonics =  ');
a0 = 0.5;
w0 = pi;
 xN = a0*ones(1, length(t)); % componente cd
for k = 1:2:N, % los armónicos pares son cero
xN = xN + 2/k/pi*sin(k*pi/2)*cos(k*w0*t);
end
```

Para la señal $x_N(t)$ dada anteriormente, los armónicos pares son cero y, por lo tanto, estos términos se excluyen del ciclo para hacer el programa de MATLAB más eficiente.

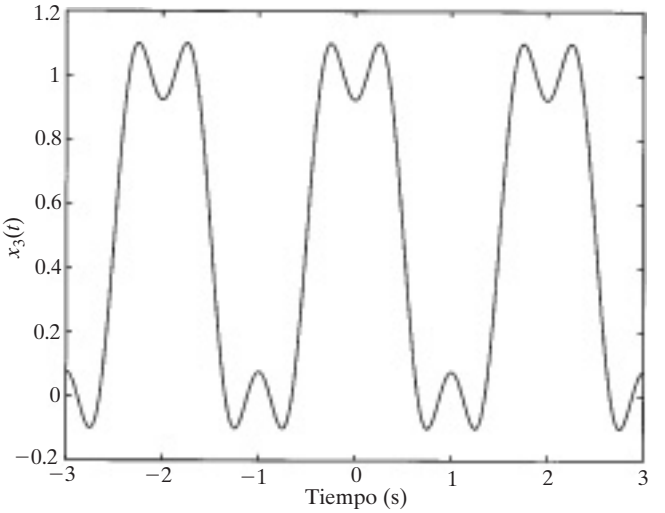



**FIGURA 3.6**
Gráfica de $x_N(t)$ cuando $N = 3$.

Ahora, con $N = 3$, $x_N(t)$ se vuelve

$$x_3(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(\pi t) - \frac{2}{3\pi}\cos(3\pi t), \quad -\infty < t < \infty$$

Establecer $N = 3$ en el programa anterior da como resultado la gráfica de $x_3(t)$ que aparece en la figura 3.6. Observe que, aun cuando $x_3(t)$ consta de una componente constante y sólo dos armónicas (la primera y la tercera), $x_3(t)$ aún se asemeja al tren de pulsos de la figura 3.5.

Si incrementamos $N$ a 9 se produce el resultado que muestra la figura 3.7. Al comparar las figuras 3.6 y 3.7 se revela que $x_9(t)$ es una aproximación mucho más cercana al tren de pulsos $x(t)$ que $x_3(t)$. Por supuesto, $x_9(t)$ contiene la componente constante y la primera, tercera, quinta, séptima y novena armónicas de $x(t)$, y por lo tanto se esperaría que fuera una aproximación más cercana que $x_3(t)$.

Establecer $N = 21$ produce el resultado de la figura 3.8. Excepto por los picos que presentan las esquinas del pulso, la forma de onda de la figura 3.8 es una aproximación mucho mejor a $x(t)$ que $x_9(t)$; a partir de una cuidadosa revisión de la gráfica que aparece en la figura 3.8, podemos ver que la magnitud de dichos picos es de cerca de 9 por ciento.

Si consideramos $N = 45$ obtenemos el resultado que despliega la figura 3.9. Observe que el 9 por ciento de los picos de las esquinas, aún está presente; de hecho, ese 9 por ciento está presente incluso cuando el límite de $N$ tiende a $\infty$. Esta característica la descubrió Josiah Willard Gibbs (1839-1903), por lo que estos picos se conocen como *fenómeno de Gibbs*. Él demostró la existencia de los picos partiendo de propiedades matemáticas, en lugar de hacerlo mediante cálculos directos.

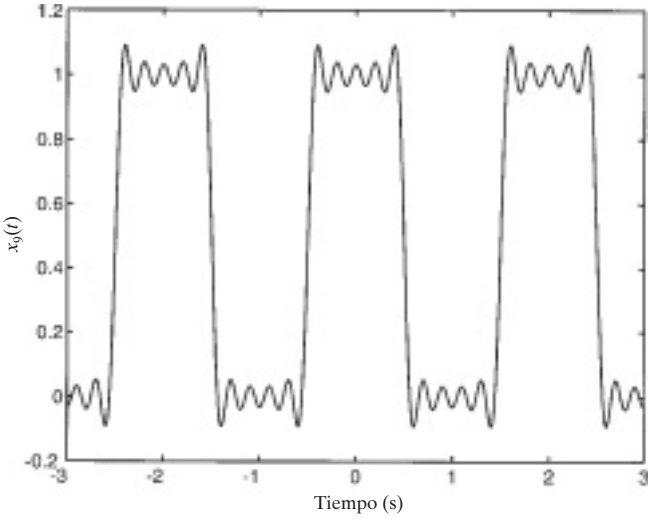



**FIGURA 3.7**
Aproximación $x_9(t)$.

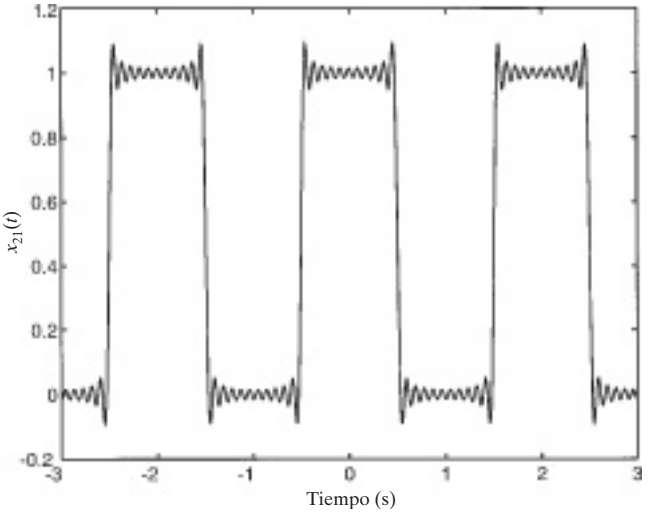



**FIGURA 3.8**
Aproximación $x_{21}(t)$.

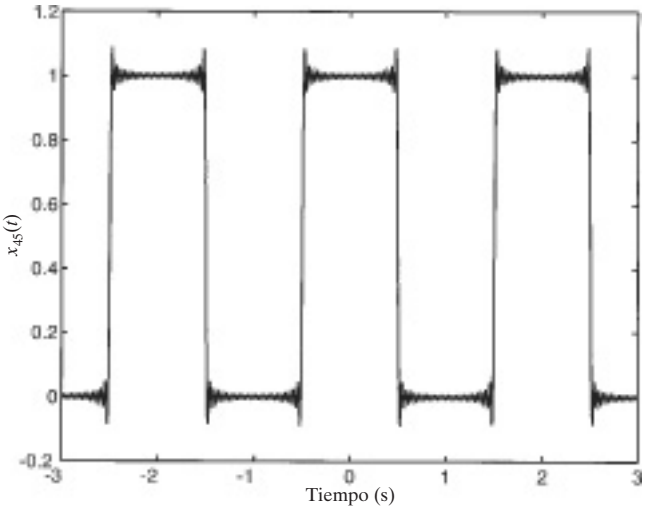



**FIGURA 3.9**
La señal $x_{45}(t)$.

Ahora, sea $x(t)$ una señal periódica cualquiera. Como consecuencia del fenómeno de Gibbs, la representación de $x(t)$ con la serie de Fourier, en realidad no es igual al verdadero valor de $x(t)$ en cualquiera de los puntos en que $x(t)$ es discontinua. Si $x(t)$ es discontinua en $t = t_1$, la representación de la serie de Fourier es errónea aproximadamente un 9 por ciento en $t_1^-$ y $t_1^+$.

## 3.3 SERIE EXPONENCIAL COMPLEJA

La serie trigonométrica de Fourier dada por (3.4) o (3.8) puede expresarse de una manera exponencial compleja, mediante

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad -\infty < t < \infty \tag{3.19}$$

En la representación (3.19), $c_0$ es un número real y los $c_k$ para $k \neq 0$ son, en general, números complejos. Como en (3.4) o (3.8), $\omega_0$ es la frecuencia fundamental (en rad/s), dada por $\omega_0 = 2\pi/T$, donde $T$ es el periodo fundamental. Observe que, en contraste con la serie trigonométrica de Fourier dada por (3.4) o (3.8), la forma exponencial compleja es, en general, una suma dos veces infinita; es decir, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Los coeficientes $c_k$ de las exponenciales complejas de (3.19) pueden calcularse a partir de los coeficientes de la serie de Fourier, dada por (3.4), mediante las fórmulas

$$c_0 = a_0, \text{ y } c_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k), c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + jb_k), k = 1, 2, \ldots \tag{3.20}$$

Además, la $c_k$ puede calcularse directamente de la señal $x(t)$, mediante la fórmula

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{3.21}$$

Debemos destacar que la $c_k$ dada por (3.21) puede calcularse integrando sobre cualquier periodo completo. Por ejemplo,

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

En el problema 3.8 pedimos al lector que derive las relaciones (3.20) y (3.21).

Si una señal periódica $x(t)$ está dada por la forma exponencial compleja (3.19), es posible expresar $x(t)$ en la forma trigonométrica (3.4) por las relaciones

$$a_0 = c_0, \text{ y } a_k = c_k + c_{-k} = 2\text{Re}(c_k), b_k = j(c_k - c_{-k}) = -2\text{Im}(c_k), \tag{3.22}$$
$$k = 1, 2, \ldots$$

Las relaciones de (3.22) se deducen fácilmente de (3.20). La comprobación se la dejamos al lector.

Observe que si $x(t)$ es una función par de $t$, los coeficientes de la forma exponencial completa son números reales dados por

$$c_0 = a_0 \text{ y } c_k = \frac{1}{2}a_k, c_{-k} = \frac{1}{2}a_k, k = 1, 2, \ldots \tag{3.23}$$

Si $x(t)$ es una función impar de $t$, los coeficientes de la forma exponencial compleja son números totalmente imaginarios (excepto por el valor $c_0$) dados por

$$c_0 = a_0 \text{ y } c_k = -j\frac{1}{2}b_k, c_{-k} = j\frac{1}{2}b_k, k = 1, 2, \ldots \tag{3.24}$$

---

### Ejemplo 3.4 Tren de pulsos rectangulares

De nuevo considere el tren de pulsos rectangulares de la figura 3.5. A partir del resultado del ejemplo 3.2 y (3.23), los coeficientes de la serie compleja de Fourier son

$$c_0 = \frac{1}{2}, \text{ y } c_k = \frac{1}{\pi k}\text{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right), k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$$

Entonces, la forma exponencial compleja de la serie de Fourier para el tren de pulsos de la figura 3.5 está dada por

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ impar}}}^{\infty}\frac{1}{k}\text{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right)e^{jk\pi t}, -\infty < t < \infty \tag{3.25}$$

---

Resolver los coeficientes de Fourier puede resultar muy tedioso para todas las formas de $x(t)$ menos para las más sencillas, como en el caso del tren de pulsos rectangulares. Para realizar las integraciones y simplificar las expresiones, puede utilizar Symbolic Math Tool-

box de MATLAB. Para ilustrar esto, los coeficientes $c_k$ de Fourier para el tren de pulsos rectangulares de la figura 3.5 pueden calcularse para $k = 1{:}5$, mediante los siguientes comandos:

```
k = 1:5;
syms ck t
ck = 0.5*int(exp(-j*k*pi*t),t,-0.5,0.5)
```

El comando `syms ck t` construye objetos simbólicos `ck` y `t`. El comando `int` integra, desde −0.5 hasta 0.5, la expresión definida en el primer argumento, respecto al segundo argumento `t`. El resultado es un vector de `ck` correspondiente a los valores definidos de `k`.

```
ck =
[    1/pi,        0, -1/3/pi,        0,  1/5/pi]
```

### 3.3.1 Espectro de línea

Dada una señal periódica $x(t)$ con periodo $T$, considere la serie trigonométrica de Fourier dada por la forma de cosenos con fase

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k), \quad -\infty < t < \infty \tag{3.26}$$

Como vimos en la sección 3.1, las componentes de la frecuencia que constituye esta señal pueden expresarse en términos de la amplitud y el espectro de fase especificado por las gráficas de $A_k$ (con $A_0 = a_0$) y $\theta_k$ (con $\theta_0 = 0$) contra $\omega = k\omega_0, k = 0,1,2,\ldots$. Esto resulta en el espectro de línea definido sólo para frecuencias no negativas. Sin embargo, el espectro de línea para una señal $x(t)$ que consiste en la suma de sinusoides, por lo general está definido en la forma exponencial compleja (3.19). En este caso, el espectro de amplitud es la gráfica de las magnitudes $|c_k|$ contra $\omega = k\omega_0, k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$, y el espectro de fase es una gráfica de los ángulos $\angle c_k$ contra $\omega = k\omega_0, k = 0, \pm1,\pm2,\ldots$. Esto resulta en el espectro de línea definido para frecuencias positivas y negativas. Es importante resaltar que las frecuencias negativas son el resultado de la forma exponencial compleja (que consiste en una componente de frecuencia positiva y una negativa), y no tienen significado físico.

De (3.20) podemos ver que

$$|c_k| = |c_{-k}| \text{ para } k = 1, 2, \ldots$$

y entonces el espectro de amplitud es simétrico alrededor de $\omega = 0$. Es decir, los valores del espectro de amplitud para frecuencias positivas son iguales a los valores del espectro de amplitud para las frecuencias negativas correspondientes. En otras palabras, el espectro de amplitud es una función par de la variable de frecuencia $\omega$. También, a partir de (3.20) vemos que

$$\angle(c_{-k}) = -\angle c_k \quad k = 1, 2, \ldots$$

lo cual implica que el espectro de fase es una función impar de la variable de frecuencia $\omega$.

Para determinar el espectro de línea para una señal periódica $x(t)$ dada por (3.26), primero es necesario determinar las magnitudes $|c_k|$ y los ángulos $\angle c_k$ para $k = 1,2, \ldots$ a partir de (3.20)

$$|c_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, k = 1, 2, \ldots$$

y

$$\angle c_k = \begin{cases} \tan^{-1}\left(-\dfrac{b_k}{a_k}\right), & k = 1, 2, \ldots, \text{cuando } a_k \geq 0 \\ \pi + \tan^{-1}\left(-\dfrac{b_k}{a_k}\right), & k = 1, 2, \ldots, \text{cuando } a_k < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, si utilizamos (3.9) y (3.10) obtenemos

$$|c_k| = \frac{1}{2}A_k, k = 1, 2, \ldots \text{ y } \angle c_k = \theta_k, k = 1, 2, \ldots \tag{3.27}$$

**Ejemplo 3.5 Espectro de línea**

Considere la señal

$$x(t) = \cos t + 0.5\cos(4t + \pi/3) + \cos(8t + \pi/2)$$

Si utilizamos (3.27), obtenemos

$$c_1 = \frac{1}{2} = 0.5, c_4 = \frac{0.5}{2}e^{j\pi/3} = 0.25\angle 60°, c_8 = \frac{1}{2}e^{j\pi/2} = 0.5\angle 90°$$

$$c_{-1} = \frac{1}{2} = 0.5, c_{-4} = \frac{0.5}{2}e^{-j\pi/3} = 0.25\angle -60°, c_{-8} = \frac{1}{2}e^{-j\pi/2} = 0.5\angle -90°$$

La figura 3.10 muestra las gráficas de los espectros de amplitud y fase.

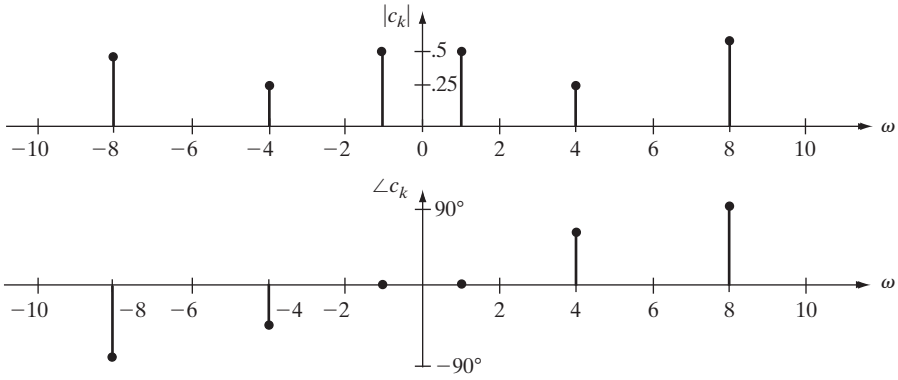



**FIGURA 3.10**
Espectro de línea para la señal del ejemplo 3.5.

### Ejemplo 3.6 Espectro de línea para un tren de pulsos rectangulares

Recuerde que la forma exponencial compleja de la serie de Fourier para el tren de pulsos de la figura 3.5 está dado por

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{k} \text{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right) e^{jk\pi t}, \quad -\infty < t < \infty$$

Para calcular los espectros de amplitud y de fase para el tren de pulsos rectangulares, primero observe que

$$|c_k| = \begin{cases} 0, & k = 2, 4, \ldots \\ \dfrac{1}{k\pi}, & k = 1, 3, \ldots \end{cases}$$

$$\angle c_k = \begin{cases} 0, & k = 2, 4, \ldots \\ [(-1)^{(k-1)/2} - 1]\dfrac{\pi}{2}, & k = 1, 3, \ldots \end{cases}$$

El espectro de frecuencia (amplitud y fase) aparece en la figura 3.11.

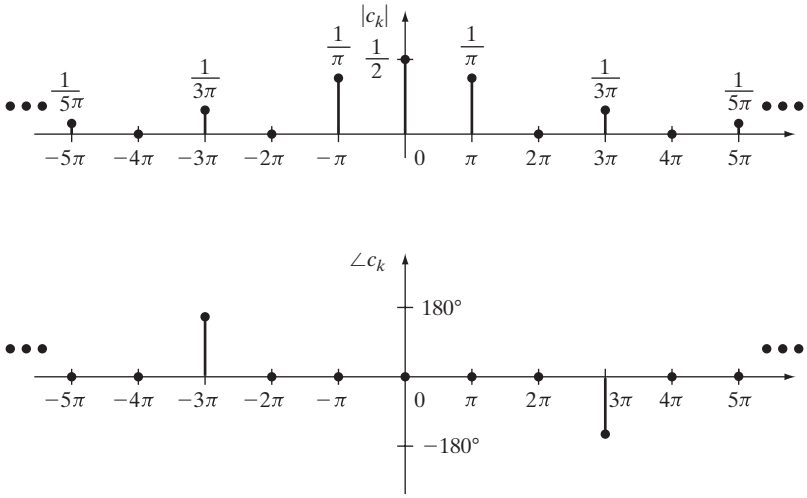



**FIGURA 3.11**
Espectro de línea para el tren de pulsos rectangulares.

### 3.3.2 Serie de Fourier compleja y truncada

Es importante observar que la suma finita $x_N(t)$ que resulta de truncar la serie trigonométrica de Fourier del tren de pulsos rectangulares de la figura 3.5 también puede calcularse si truncamos la forma exponencial de la serie de Fourier de la siguiente forma:

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

Los comandos de MATLAB para calcular la serie de Fourier exponencial y truncada para el tren de pulsos son

```
t = -3:6/1000:3;
N = input ('Number of harmonics = ');
c0 = 0.5;
w0 = pi;
xN = c0*ones (1, length(t));   % componente de cd
for k = 1:N,
  ck = 1/k/pi*sin(k*pi/2);
  c_k = ck;
   xN = xN + ck*exp(j*k*w0*t) + c_k*exp(-j*k*w0*t);
end
```

La expresión para $c_k$ aparece en el ejemplo 3.4, donde por inspección vemos que $c_{-k} = c_k$. Al ejecutar el programa anterior para $N = 3, 9, 21$ y 45, obtenemos las mismas gráficas que las que aparecen en las figuras 3.6 a 3.9.

### 3.3.3 Teorema de Parseval

Sea $x(t)$ una señal periódica con periodo $T$. La potencia promedio $P$ de la señal está definida por

$$P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\, dt \tag{3.28}$$

Si $x(t)$ es el voltaje o la corriente a través de un resistor de 1 ohm, la potencia promedio está dada por (3.28). Entonces, la expresión (3.28) es la idea generalizada de la potencia promedio para cualquier señal.

De nuevo, sea $x(t)$ una señal periódica cualquiera con periodo $T$, y considere la serie de Fourier de $x(t)$ dada por (3.19). Por el teorema de Parseval, la potencia promedio $P$ de la señal $x(t)$ está dada por

$$P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \tag{3.29}$$

La relación (3.29) es útil, ya que relaciona la potencia promedio de una señal periódica con los coeficientes de la serie de Fourier para la señal. La demostración del teorema de Parseval está fuera del alcance de este libro.

## 3.4 TRANSFORMADA DE FOURIER

Una característica importante de la representación de la serie de Fourier de una señal periódica es la descripción de dicha señal en términos del contenido de frecuencia dado por las componentes sinusoidales. Es entonces cuando surge la pregunta de si las señales no periódicas, también conocidas como *señales sin periodo*, pueden describirse en términos de contenidos de frecuencia. La respuesta es sí, y la construcción analítica para hacerlo es la transformada de Fourier. Como veremos, las componentes de frecuencia de señales no periódicas están definidas para todos los valores reales de la variable de frecuencia $\omega$, y no sólo para los valores discretos de $\omega$ como en el caso de una señal periódica. En otras palabras, el espectro para una señal no periódica, no es el espectro de línea (a menos que la señal sea igual a la suma de sinusoides).

Dada una señal $x(t)$, la transformada de Fourier $X(\omega)$ de $x(t)$ está definida para que sea la función de frecuencia

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt, \quad -\infty < \omega < \infty \tag{3.30}$$

donde $\omega$ es la variable continua de frecuencia. En este libro, la transformada de Fourier siempre estará denotada por una letra mayúscula o un símbolo, mientras que las señales generalmente estarán denotadas por letras minúsculas o símbolos.

Observe que, debido a la presencia de la exponencial compleja $\exp(-j\omega t)$ en el integrando de la integral (3.30), los valores de $X(\omega)$ pueden ser complejos. Por lo tanto, en general, la transformada de Fourier $X(\omega)$ es una función valuada en complejos de la variable de frecuencia $\omega$, y para especificar $X(\omega)$, en general es necesario desplegar la función magnitud $|X(\omega)|$ y la función ángulo $\angle X(\omega)$. El espectro de amplitud de una señal $x(t)$ está definido para que sea la función magnitud $|X(\omega)|$ de la transformada de Fourier $X(\omega)$, y el espectro de fase de $x(t)$ está definido para que sea la función ángulo $\angle X(\omega)$. Los espectros de amplitud y fase de una señal $x(t)$ son generalizaciones del espectro de línea de señales periódicas.

Se dice que una señal $x(t)$ tiene transformada de Fourier, en el sentido ordinario, si la integral (3.30) converge (es decir, existe). La integral converge si $x(t)$ "se comporta bien", y si $x(t)$ es completamente integrable; esta última condición significa que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,dt < \infty \tag{3.31}$$

Un *buen comportamiento* significa que la señal tiene un número finito de discontinuidades, máximas y mínimas, dentro de un intervalo finito de tiempo. Todas las señales reales (es decir, señales que pueden generarse físicamente) se comportan bien, y se satisface (3.31).

Debido a que una señal con buen comportamiento de duración finita en el tiempo es completamente integrable, cualquier señal de éstas tiene transformada de Fourier, en el sentido ordinario. El siguiente es un ejemplo de una señal que no tiene transformada de Fourier en el sentido ordinario.

---

### Ejemplo 3.7 Señal constante

Considere la señal de cd o constante

$$x(t) = 1, -\infty < t < \infty$$

Es claro que la señal constante no es una señal real, ya que ninguna señal que es diferente de cero todo el tiempo puede generarse físicamente. Sin embargo, la señal constante juega un papel muy importante en la teoría de las señales y los sistemas. La transformada de Fourier de la señal constante es

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (1)e^{-j\omega t}\,dt \tag{3.32}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} -\frac{1}{j\omega}[e^{-j\omega t}]_{t=-T/2}^{t=T/2}$$

$$X(\omega) = \lim_{T\to\infty} -\frac{1}{j\omega}\left[\exp\left(-\frac{j\omega T}{2}\right) - \exp\left(\frac{j\omega T}{2}\right)\right]$$

Pero $\exp(j\omega T/2)$ no tiene un límite cuando $T \to \infty$ y, por lo tanto, la integral (3.32) no converge. Entonces, una señal constante no tiene transformada de Fourier en el sentido ordinario. Esto puede verse, revisando (3.31): el área bajo la señal constante es infinita, por lo que la integral en (3.31) no es finita. En la sección 3.7 mostraremos que una señal constante tiene transformada de Fourier en un sentido generalizado.

---

**Ejemplo 3.8 Señal exponencial**

Transformada de Fourier de una señal exponencial

Ahora considere la señal

$$x(t) = e^{-bt}u(t)$$

donde $b$ es una constante real, y $u(t)$ es la función escalón unitario. Observe que $x(t)$ es igual a $u(t)$ cuando $b = 0$. Para un valor cualquiera de $b$, la transformada de Fourier $X(\omega)$ de $x(t)$ está dada por

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bt}u(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

y debido a que $u(t) = 0$ para $t < 0, u(t) = 1$ para $t \geq 1$,

$$X(\omega) = \int_{0}^{\infty} e^{-bt}e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(b+j\omega)t}\,dt$$

Al evaluar la integral obtenemos

$$X(\omega) = -\frac{1}{b + j\omega}\left[e^{-(b+j\omega)t}\Big|_{t=0}^{t=\infty}\right]$$

El límite superior $t = \infty$ no puede evaluarse cuando $b \leq 0$ y, por lo tanto, para este intervalo de valores de $b$, $x(T)$ no tiene transformada de Fourier ordinaria. Debido a que $x(t) = u(t)$ cuando $b = 0$, es evidente que la función escalón unitario no tiene transformada de Fourier en el sentido ordinario (pero como veremos en la sección 3.7, $u(t)$ sí tiene transformada de Fourier generalizada).

Cuando $b > 0$, $\exp(-bt) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ y, entonces

$$\lim_{t\to\infty} e^{-(b+j\omega)t} = \lim_{t\to\infty} e^{-bt}e^{-j\omega t} = 0$$

Entonces, para $b > 0$, $x(t)$ tiene transformada de Fourier dada por

$$X(\omega) = -\frac{1}{b + j\omega}(0 - 1) = \frac{1}{b + j\omega}$$

y los espectros de amplitud y fase están dados por

$$|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{b^2 + \omega^2}}$$

$$\angle X(\omega) = -\tan^{-1}\frac{\omega}{b}$$

Las gráficas del espectro de amplitud $|X(\omega)|$ y de fase $\angle X(\omega)$ pueden generarse para el caso $b = 10$, mediante los siguientes comandos de MATLAB:

```
w = 0:0.2:50;
b = 10;
X = 1./(b+j*w);
subplot(211), plot(w, abs (X));  % gráfica de la magnitud de X
subplot(212), plot(w, angle (X));  % gráfica del ángulo de X
```

Observe que las expresiones explícitas para $|X(\omega)|$ y $\angle X(\omega)$ de las ecuaciones anteriores no necesitan generar gráficas de MATLAB para los espectros de amplitud y fase. Para el caso $b = 10$, el programa anterior de MATLAB se ejecutó y se obtuvieron los resultados que muestra la figura 3.12. En la figura 3.12a vemos que la mayor parte del contenido espectral de la señal se concentra en el intervalo bajo de frecuencias con un espectro de amplitud que decae hacia cero conforme $\omega \rightarrow \infty$.

### 3.4.1 Formas polar y rectangular de la transformada de Fourier

Considere la señal $x(t)$ con la transformada de Fourier

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

Como vimos antes, $X(\omega)$ es una función valuada en complejos de la variable real $\omega$. En otras palabras, si un valor específico de $\omega$ se sustituye en $X(\omega)$, entonces, en general, el resultado será un número complejo. Debido a que los números complejos pueden expresarse en forma polar o rectangular, la transformada de Fourier $X(\omega)$ puede expresarse en cualquiera de estas formas; a continuación las definimos.

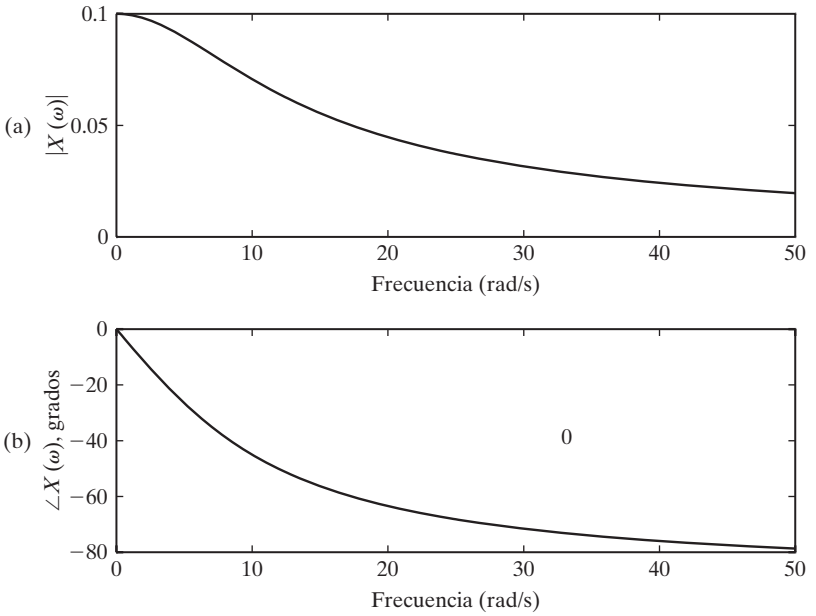



**FIGURA 3.12**
Gráficas de los espectros de (a) amplitud y (b) fase, de $x(t) = \exp(-10t)u(t)$.

Por la fórmula de Euler, $X(\omega)$ puede escribirse en la forma

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t \, dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \operatorname{sen} \omega t \, dt$$

Ahora, sean $R(\omega)$ e $I(\omega)$ las funciones valuadas en reales de $\omega$, definidas por

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t \, dt$$

$$I(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \operatorname{sen} \omega t \, dt$$

Entonces la forma rectangular de $X(\omega)$ es

$$X(\omega) = R(\omega) + jI(\omega) \tag{3.33}$$

La función $R(\omega)$ es la parte real de $X(\omega)$, y la función $I(\omega)$ es la parte imaginaria. Observe que $R(\omega)$ e $I(\omega)$ podrían calcularse primero, y después, mediante la ecuación (3.33), encontrar $X(\omega)$.

Ahora, la forma polar de la transformada de Fourier $X(\omega)$ está dada por

$$X(\omega) = |X(\omega)| \exp[j\angle X(\omega)] \tag{3.34}$$

donde $|X(\omega)|$ es la magnitud de $X(\omega)$ y $\angle X(\omega)$ es el ángulo de $X(\omega)$. Es posible pasar de la forma rectangular a la polar mediante las relaciones

$$|X(\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)}$$

$$\angle X(\omega) = \begin{cases} \tan^{-1}\dfrac{I(\omega)}{R(\omega)}, & R(\omega) \geq 0 \\ \pi + \tan^{-1}\dfrac{I(\omega)}{R(\omega)}, & R(\omega) < 0 \end{cases}$$

Observe que si $x(t)$ es valuada en reales, por (3.30)

$$X(-\omega) = \overline{X(\omega)} = \text{complejo conjugado de } X(\omega)$$

Después, tomando el complejo conjugado de la forma polar (3.34), obtenemos

$$\overline{X(\omega)} = |X(\omega)| \exp[-j\angle X(\omega)]$$

Por lo tanto,

$$X(-\omega) = |X(\omega)| \exp[-j\angle X(\omega)]$$

lo cual implica que

$$|X(-\omega)| = |X(\omega)|$$

$$\angle X(-\omega) = -\angle X(\omega)$$

Este resultado muestra que $|X(\omega)|$ es una función par de $\omega$, y por lo tanto es simétrica alrededor de $\omega = 0$, y que $\angle X(\omega)$ es una función impar de $\omega$.

### 3.4.2 Señales con simetría par o impar

De nuevo, suponga que $x(t)$ tiene transformada de Fourier $X(\omega)$, con $X(\omega)$ dada en la forma rectangular (3.33). Como vimos en la sección 3.2, se dice que una señal $x(t)$ es par si $x(t) = x(-t)$, y se dice que la señal es impar si $x(-t) = -x(t)$. Si la señal $x(t)$ es par, se desprende que la parte imaginaria $I(\omega)$ de la transformada de Fourier es cero, y la parte real $R(\omega)$ puede rescribirse como

$$R(\omega) = 2\int_0^\infty x(t) \cos \omega t \, dt$$

Por lo tanto, la transformada de Fourier de una señal par $x(t)$ es una función de $\omega$ valuada en reales, dada por

$$X(\omega) = 2\int_0^\infty x(t)\cos \omega t\, dt \tag{3.35}$$

Si la señal $x(t)$ es impar, es decir, $x(t) = -x(-t)$ para toda $t > 0$, la transformada de Fourier de $x(t)$ es una función de $\omega$ totalmente imaginaria, dada por

$$X(\omega) = -j2\int_0^\infty x(t)\,\text{sen}\,\omega t\, dt \tag{3.36}$$

La expresión (3.35) puede utilizarse para calcular la transformada de Fourier de una señal par, y la expresión (3.36) puede utilizarse para calcular la transformada de Fourier de una señal impar.

---

### Ejemplo 3.9 Pulso rectangular

Dado un número fijo positivo $\tau$, sea que $p_\tau(t)$ denote el pulso rectangular de duración $\tau$ segundos definido por

$$p_\tau(t) = \begin{cases} 1, & -\dfrac{\tau}{2} \le t \le \dfrac{\tau}{2} \\ 0, & \text{todas las demás } t \end{cases}$$

El pulso rectangular $p_\tau(t)$, cuya gráfica aparece en la figura 3.13, es claramente una señal par y, por lo tanto, podemos utilizar (3.35) para calcular la transformada de Fourier. Al establecer $x(t) = p_\tau(t)$ en (3.35) obtenemos

$$X(\omega) = 2\int_0^{\tau/2} (1)\cos \omega t\, dt$$

$$= \frac{2}{\omega}\left[\text{sen}(\omega t)\Big|_{t=0}^{t=\tau/2}\right]$$

$$= \frac{2}{\omega}\text{sen}\frac{\omega\tau}{2}$$

La transformada de Fourier $X(\omega)$ puede expresarse en términos de la función senc, definida por

$$\text{arcsen}(a\omega) = \frac{\text{sen}(a\pi\omega)}{a\pi\omega} \text{ para cualquier número real } a \tag{3.37}$$

Si establecemos $a = \dfrac{\tau}{2\pi}$ en (3.37), obtenemos

$$\text{arcsen}\left(\frac{\tau\omega}{2\pi}\right) = \frac{2}{\tau\omega}\text{sen}\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)$$

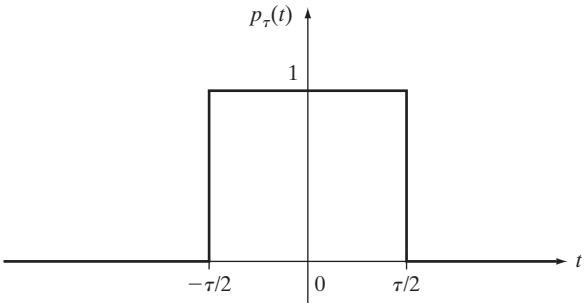



**FIGURA 3.13**
Pulso rectangular de $\tau$ segundos.

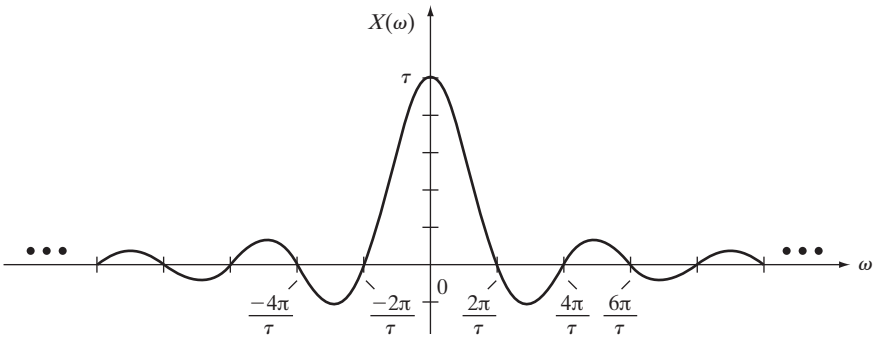



**FIGURA 3.14**
Transformada de Fourier del pulso rectangular de $\tau$ segundos.

y entonces

$$X(\omega) = \tau \operatorname{arcsen}\left(\frac{\tau\omega}{2\pi}\right)$$

Observe que, ya que la transformada de Fourier $X(\omega)$ de este ejemplo está valuada en reales, $X(\omega)$ puede graficarse contra $\omega$. El resultado aparece en la figura 3.14.

### 3.4.3 Señales de banda limitada

Se dice que una señal $x(t)$ es de *banda limitada* si su transformada de Fourier $X(\omega)$ es cero para toda $\omega > B$, donde $B$ es algún número positivo, conocido como *ancho de banda de la señal*. Si una señal $x(t)$ es de banda limitada con un ancho de banda $B$, dicha señal no contiene componente espectral alguno en una frecuencia más alta que $B$, lo cual justifica el uso del término de *banda limitada*. De aquí se desprende que cualquier señal de banda limitada debe ser de duración infinita en el tiempo; es decir, las señales de banda limitada no pueden limitarse por el tiempo (una señal $x(t)$ se limita por el tiempo si existe un número positivo $T$, tal que $x(t) = 0$, para toda $t < -T$ y $t > T$).

Si una señal $x(t)$ no es de banda limitada, se dice que tiene un *ancho de banda infinito* o un *espectro infinito*. Ya que las señales de banda limitada no pueden ser limitadas en el tiempo, las señales limitadas en el tiempo no pueden ser de banda limitada y, por lo tanto, todas las señales limitadas en el tiempo tienen anchos de banda infinitos. Además, ya que todas las señales (físicas) son limitadas en el tiempo, cualquiera de dichas señales debe tener un ancho de banda infinito. Sin embargo, para cualquier señal $x(t)$ con buen comportamiento y limitada en el tiempo se puede demostrar que la transformada de Fourier $X(\omega)$ converge hacia cero cuando $\omega \to \infty$. Por lo tanto, para cualquier señal limitada por el tiempo que surja en la práctica, siempre es posible suponer que $|X(\omega)| \approx 0$, para toda $\omega > B$, donde $B$ se elige convenientemente grande.

---

### Ejemplo 3.10 Espectro de frecuencia

De nuevo considere la función pulso rectangular $x(t) = p_\tau(t)$. En el ejemplo 3.9 mostramos que la transformada de Fourier $X(\omega)$ es

$$X(\omega) = \tau \operatorname{arcsen}\left(\frac{\tau\omega}{2\pi}\right)$$

La figura 3.15 muestra las gráficas de los espectros de amplitud y de fase para este ejemplo. De la figura 3.15a resulta claro que el espectro de un pulso rectangular es infinito; sin embargo, ya que

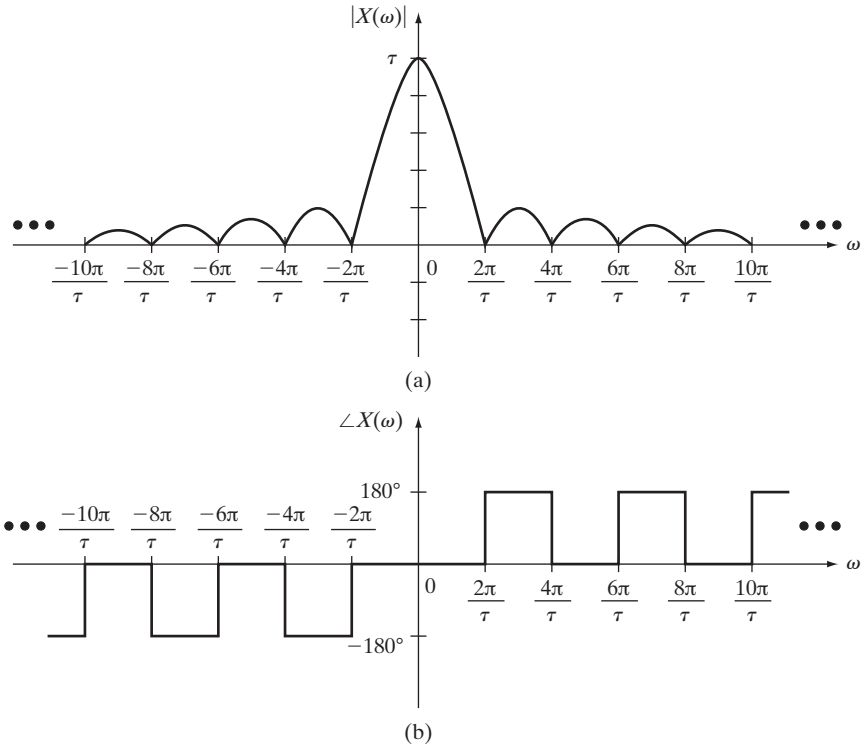



**FIGURA 3.15**
Espectros de (a) amplitud y (b) fase del pulso rectangular.

la magnitud de los *lóbulos laterales* que muestra la figura 3.15a disminuye conforme aumenta la frecuencia $\omega$, es claro que para cualquier $c > 0$, existe una $B$ (en general, dependiente de $c$) tal que $|X(\omega)| < c$ para toda $\omega > B$. Entonces, si elegimos $B$ lo suficientemente grande, el pulso rectangular puede considerarse como "aproximadamente de banda limitada" con un ancho de banda $B$. También observe que si la duración $\tau$ del pulso rectangular se reduce, el espectro de amplitud se "expande". Este resultado muestra que mientras más corta sea la duración de las señales (por ejemplo un pulso de poca duración), éstas tendrán un mayor contenido espectral en altas frecuencias, que las señales de larga duración.

### 3.4.4 Transformada inversa de Fourier

Dada una señal $x(t)$ con transformada de Fourier $X(\omega)$, $x(t)$ puede recalcularse a partir de $X(\omega)$ si se aplica la transformada inversa de Fourier dada por

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\, d\omega \tag{3.38}$$

Para denotar el hecho de que $X(\omega)$ es la transformada de Fourier de $x(t)$, o que $x(t)$ es la transformada inversa de Fourier de $X(\omega)$, en ocasiones utilizaremos la notación par de la transformada

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$$

Uno de los pares de transformadas básicos en la teoría de Fourier es el siguiente

$$p_\tau(t) \leftrightarrow \tau \operatorname{arcsen}\frac{\tau\omega}{2\pi} \tag{3.39}$$

El par de transformadas (3.39) se desprende del resultado del ejemplo 3.9. Observe que por (3.39), una función rectangular en el tiempo corresponde a una función arcsen en frecuencia, e inversamente, una función senc en frecuencia corresponde a una función rectangular en el tiempo.

En ocasiones es posible calcular la transformada o la transformada inversa de Fourier, sin tener que evaluar las integrales (3.30) y (3.38). En particular, es posible deducir nuevos pares de transformadas a partir de un par dado [tal como la (3.39)], mediante las propiedades de la transformada de Fourier. En la sección 3.6 daremos a conocer estas propiedades.

## 3.5 CONTENIDO ESPECTRAL DE SEÑALES COMUNES

Como dijimos en el ejemplo 3.10, la transformada de Fourier puede utilizarse para determinar el contenido espectral de una señal. Sin embargo, calcular la transformada de Fourier con frecuencia resulta tedioso para todas las funciones, menos para las más sencillas. Esta sección utiliza Symbolic Math Toolbox de MATLAB para calcular la transformada de Fourier de diversas señales comunes, para poder comparar sus contenidos espectrales. Existen comandos de MATLAB para calcular tanto la transformada como la transformada inversa de Fourier, `fourier(f)` e `ifourier(F)`, donde tanto `f` como `F` son objetos simbólicos que se han definido. Estos comandos en realidad utilizan el comando `int`. Por ejemplo, `fourier` utiliza el comando `int(f*exp(-i*w*x),-inf,inf),-inf,inf),` donde los límites de integración son $-\infty$ e $\infty$, y la transformada de Fourier de `f` está definida con respecto a la va-

riable independiente `x`. Para las funciones de este texto, en general es más sencillo utilizar directamente `int`.

### Ejemplo 3.11 Pulso triangular

Considere la función pulso triangular de la figura 3.16a dada por la expresión

$$x(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{2|t|}{\tau} & -\dfrac{\tau}{2} \le t \le \dfrac{\tau}{2} \\ \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

donde $\tau = 1$. La transformada de Fourier se calcula mediante los siguientes comandos:

```
syms x t w X
tau = 1;
X = int((1-2*abs(t)/tau)*exp(-i*w*t),t,-tau/2,tau/2);
X = simplify(X)
```

Esto da como resultado

```
X = -4*(cos(1/2*w)-1)/w^2
```

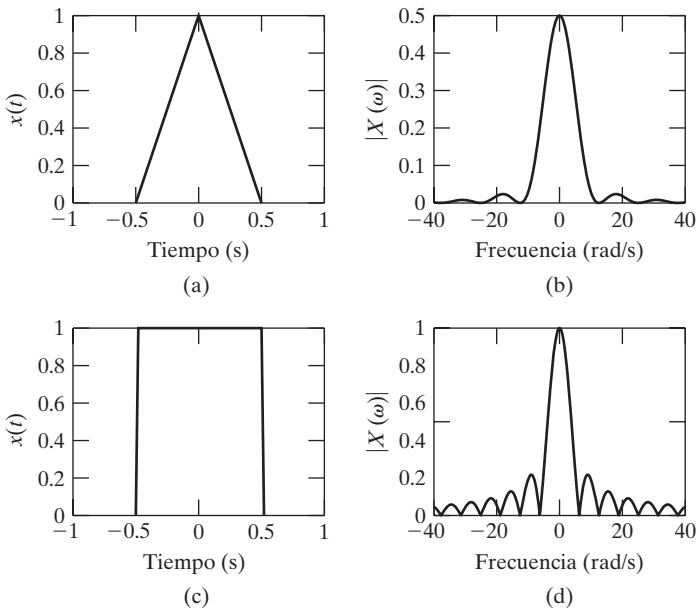



**FIGURA 3.16**
(a) Pulso triangular y su correspondiente magnitud de la transformada de Fourier en (b); (c) pulso rectangular y su correspondiente magnitud de la transformada de Fourier en (d).

La magnitud de la transformada de Fourier para el pulso triangular aparece en la figura 3.16b. Para realizar una comparación, el pulso rectangular de duración de 1 segundo aparece en la figura 3.16c, con su correspondiente espectro en la figura 3.16d. En el dominio de tiempo, el contenido de alta frecuencia se caracteriza porque la señal cambia rápidamente, como la discontinuidad en el pulso rectangular. Debido a que existen lóbulos laterales tanto en el espectro del pulso triangular como en el del rectangular, es importante observar que los lóbulos laterales del pulso rectangular tienen una amplitud más alta, lo que indica un contenido de frecuencia más alto. Asimismo, el lóbulo principal del pulso triangular es más amplio, lo que indica que en la parte de baja frecuencia del espectro se concentra más energía.

---

A partir del ejemplo 3.11 vemos que las transiciones más rápidas en el dominio de tiempo indican un contenido alto de frecuencia. En el ejemplo 3.10 explicamos este mismo concepto, y observamos que si la duración $\tau$ del pulso rectangular se hace más pequeña, el espectro de amplitud se "expande". Esto es consistente con la idea de una transición más rápida entre las discontinuidades superior e inferior, lo que indica un contenido más alto de frecuencia. En el límite, conforme la duración del pulso se vuelve infinitesimal, el espectro de amplitud se vuelve constante sobre todas las frecuencias, lo que indica tanto alto contenido de frecuencia en la señal como baja frecuencia.

El decaimiento exponencial que vimos en el ejemplo 3.8 también puede verse desde una perspectiva de contenido de frecuencia. La constante $b > 0$ en la expresión para $x(t)$, $x(t) = e^{-bt}u(t)$, es la velocidad de decaimiento. Entre más grande es el valor de $b$, mayor resulta el decaimiento de la señal, lo que indica transiciones rápidas en el dominio de tiempo. El espectro de amplitud es la gráfica de

$$|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{b^2 + \omega^2}}$$

Conforme $b$ crece, el espectro se expande, lo que indica un contenido más alto de frecuencia en la señal.

---

### Ejemplo 3.12 Decaimiento sinusoidal

Considere un decaimiento sinusoidal de la forma

$$x(t) = e^{-at}\,\text{sen}(b\pi t)u(t)$$

La figura 3.17a despliega $x(t)$ para el caso $a = 2$ y $b = 2$. Los siguientes comandos se utilizan para determinar la transformada de Fourier de $x(t)$ para este caso:

```
syms x t X omega
a = 2; b = 2;
x = exp(-a*t)*sin(b*pi*t);
X = simplify(int(x*exp(-j*omega*t),t,0,inf));
```

Esto arroja el resultado

```
X =
2*pi/(4-w^2+4*pi^2+4*i*w)
```

La forma de la ecuación de $X(\omega)$ es

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{4 - \omega^2 + 4\pi^2 + 4j\omega}$$

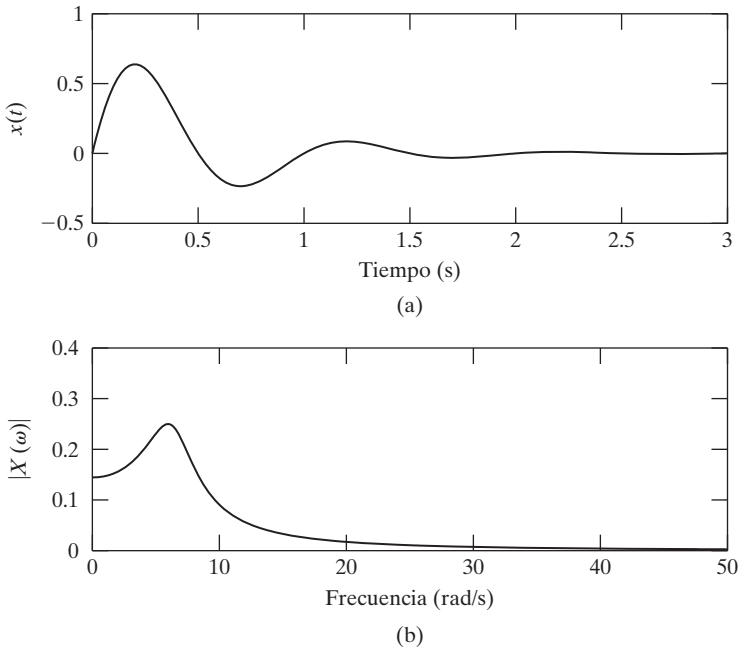



**FIGURA 3.17**
(a) Gráfica de $x(t) = e^{-2t}\text{sen}(2\pi t)u(t)$, y (b) su correspondiente espectro de amplitud.

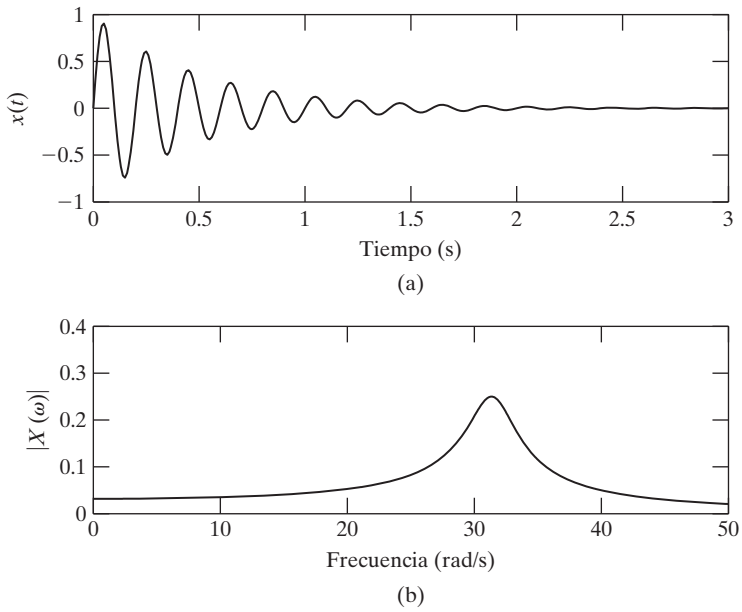



**FIGURA 3.18**
(a) Gráfica de $x(t) = e^{-2t}\text{sen}(10\pi t)u(t)$, y (b) su correspondiente espectro de amplitud.

El correspondiente espectro de amplitud aparece en la figura 3.17b. Las componentes dominantes de frecuencia en $x(t)$ se encuentran en el intervalo de frecuencias que rodea al pico del espectro. Este pico corresponde a la frecuencia de la sinusoide, el cual es igual a $2\pi$.

El programa se vuelve ejecutar con los valores $a = 2$ y $b = 10$, y arroja una expresión para $X(\omega)$ dada por

$$X(\omega) = \frac{10\pi}{4 - \omega^2 + 100\pi^2 + 4j\omega}$$

La señal $x(t)$ de dominio en el tiempo aparece en la figura 3.18a, y el correspondiente espectro de amplitud en la 3.18b. Si comparamos las gráficas de la figura 3.17a y 3.18a, el contenido de frecuencia más alto, cuando $b = 10$, es evidente en las transiciones más rápidas de la señal de dominio en el tiempo. El espectro para el caso de $b = 10$, también muestra que el pico se movió a un intervalo de frecuencia más alto, centrado cerca de la frecuencia sinusoidal de $10\pi$.

## 3.6 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

La transformada de Fourier satisface una serie de propiedades que son útiles en una amplia gama de aplicaciones. En esta sección damos a conocer dichas propiedades. En la sección 3.8 aplicamos algunas de ellas al estudio de la modulación.

### 3.6.1 Linealidad

La transformada de Fourier es una operación lineal; es decir, si $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$ y $v(t) \leftrightarrow V(\omega)$, entonces para cualesquiera escalares reales o complejos $a, b$,

$$ax(t) + bv(t) \leftrightarrow aX(\omega) + bV(\omega) \tag{3.40}$$

La propiedad de linealidad puede demostrarse, calculando la transformada de Fourier de $ax(t) + bv(t)$: por definición de la transformada de Fourier,

$$ax(t) + bv(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} [ax(t) + bv(t)]e^{-j\omega t}\, dt$$

Por linealidad de la integración,

$$\int_{-\infty}^{\infty} [ax(t) + bv(t)]e^{-j\omega t}\, dt = a\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\, dt + b\int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{-j\omega t}\, dt$$

y por lo tanto,

$$ax(t) + bv(t) \leftrightarrow aX(\omega) + bV(\omega)$$

### Ejemplo 3.13 Suma de pulsos rectangulares

Considere la señal que aparece en la figura 3.19. Como ilustra la figura, esta señal es igual a la suma de dos funciones pulso rectangular. De forma más precisa,

$$x(t) = p_4(t) + p_2(t)$$

Después, si utilizamos la linealidad y el par de transformadas (3.39), se desprende que la transformada de Fourier de $x(t)$ es

$$X(\omega) = 4 \operatorname{arcsen}\frac{2\omega}{\pi} + 2 \operatorname{arcsen}\frac{\omega}{\pi}$$

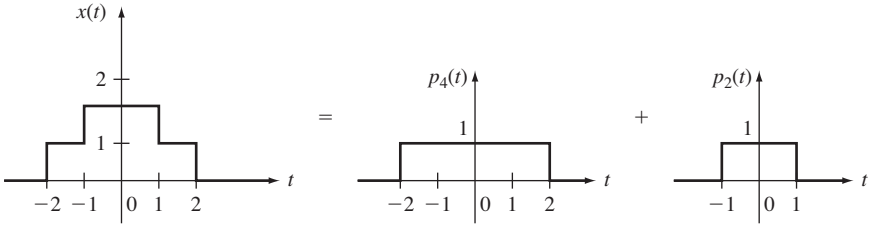



**FIGURA 3.19**
Señal del ejemplo 3.13.

## 3.6.2 Desplazamientos en el tiempo por la izquierda o por la derecha

Si $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$, entonces para cualquier número real positivo o negativo $c$,

$$x(t - c) \leftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega c} \tag{3.41}$$

Observe que si $c > 0$, entonces $x(t - c)$ es un desplazamiento por la derecha de $c$ segundos de $x(t)$; y si $c < 0$, entonces $x(t - c)$ es un desplazamiento por la izquierda de $(-c)$ segundos de $x(t)$. Por lo tanto, el par de transformadas (3.41) es válido para desplazamientos de $x(t)$ tanto por la izquierda como por la derecha.

Para comprobar la validez del par de transformadas (3.41), primero aplique la definición de la transformada de Fourier a la señal desplazada $x(t - c)$, lo cual arroja

$$x(t - c) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(t - c)e^{-j\omega t}\, dt \tag{3.42}$$

En la integral (3.42), considere el cambio de variable $\bar{t} = t - c$. Después, $t = \bar{t} + c$, $dt = d\bar{t}$, y (3.42) se vuelve

$$\begin{aligned} x(t - c) &\leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\bar{t})e^{-j\omega(\bar{t} + c)}\, d\bar{t} \\ &\leftrightarrow \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\bar{t})e^{-j\omega\bar{t}}\, d\bar{t}\right]e^{-j\omega c} \\ &\leftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega c} \end{aligned}$$

Por lo tanto, obtenemos (3.41).

### Ejemplo 3.14 Desplazamiento por la derecha de un pulso

La señal $x(t)$ que aparece en la figura 3.20 es igual a un desplazamiento por la derecha de un segundo de la función pulso rectangular $p_2(t)$; es decir,

$$x(t) = p_2(t - 1)$$

La transformada de Fourier $X(\omega)$ de $x(t)$ puede calcularse con la propiedad (3.41) de desplazamiento en el tiempo, y el par de transformadas (3.39). El resultado es

$$X(\omega) = 2\left(\text{arcsen}\frac{\omega}{\pi}\right)e^{-j\omega}$$

Observe que, debido a que

$$|e^{-j\omega}| = 1 \quad \text{para toda } \omega$$

el espectro de amplitud $|X(\omega)|$ de $x(t) = p_2(t - 1)$ es el mismo que el espectro de amplitud de $p_2(t)$.

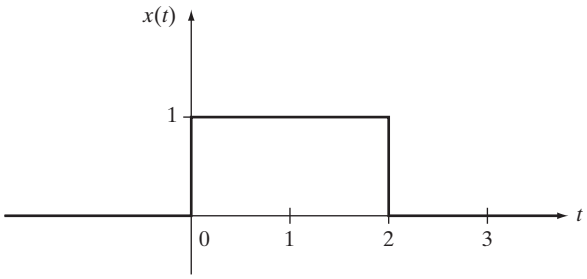



**FIGURA 3.20**
Señal del ejemplo 3.14.

### 3.6.3 Escalamiento en el tiempo

Si $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$, para cualquier número real positivo $a$,

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a}X\left(\frac{\omega}{a}\right) \tag{3.43}$$

Para demostrar (3.43), primero aplique la definición de la transformada de Fourier a $x(at)$, lo cual arroja

$$x(at) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j\omega t}\,dt \tag{3.44}$$

En la integral (3.44), considere el cambio de variable $\bar{t} = at$. Entonces $t = \bar{t}/a$, $d\bar{t} = a(dt)$, y (3.44) se vuelve

$$x(at) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\bar{t}) \exp\left[-j\left(\frac{\omega}{a}\right)\bar{t}\right]\frac{1}{a}d\bar{t}$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(\bar{t}) \exp\left[-j\left(\frac{\omega}{a}\right)\bar{t}\right] d\bar{t}$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{a}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Por lo tanto (3.43) queda demostrada.

Dada una señal cualquiera $x(t)$, si $a > 1$, $x(at)$ es una *compresión de tiempo* de $x(t)$. Por ejemplo suponga que $x(t)$ es un pulso rectangular de 2 segundos $p_2(t)$, y $a = 2$. Las señales $p_2(t)$ y $p_2(2t)$ aparecen en la figura 3.21. Claramente, $p_2(2t)$ es una compresión de tiempo de $p_2(t)$.

Ahora, por (3.39), la transformada de Fourier de $p_2(t)$ es igual a 2 senc$(\omega/\pi)$, y por (3.43) la transformada de Fourier de $p_2(2t)$ es igual a senc$(\omega/2\pi)$. Estas transformadas aparecen en la figura 3.22. Como muestra esta figura, la transformada de Fourier de $p_2(2t)$ es una *expansión de frecuencia* de la transformada de Fourier de $p_2(t)$. Por lo tanto, el pulso

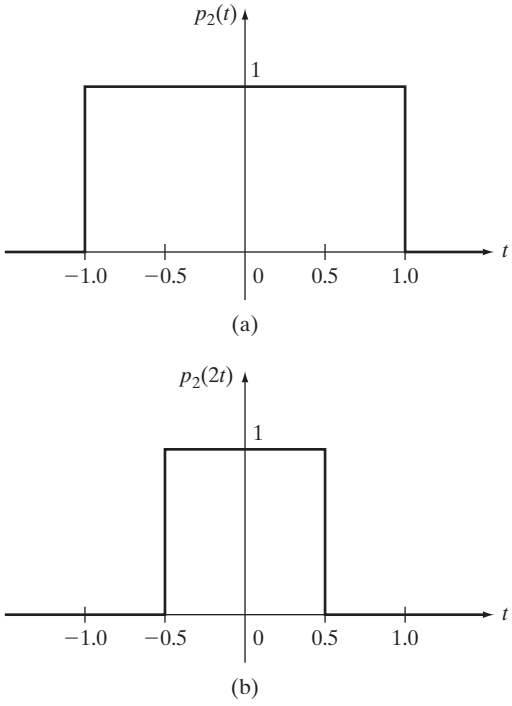



**FIGURA 3.21**
Señales (a) $p_2(t)$, y (b) $p_2(2t)$.

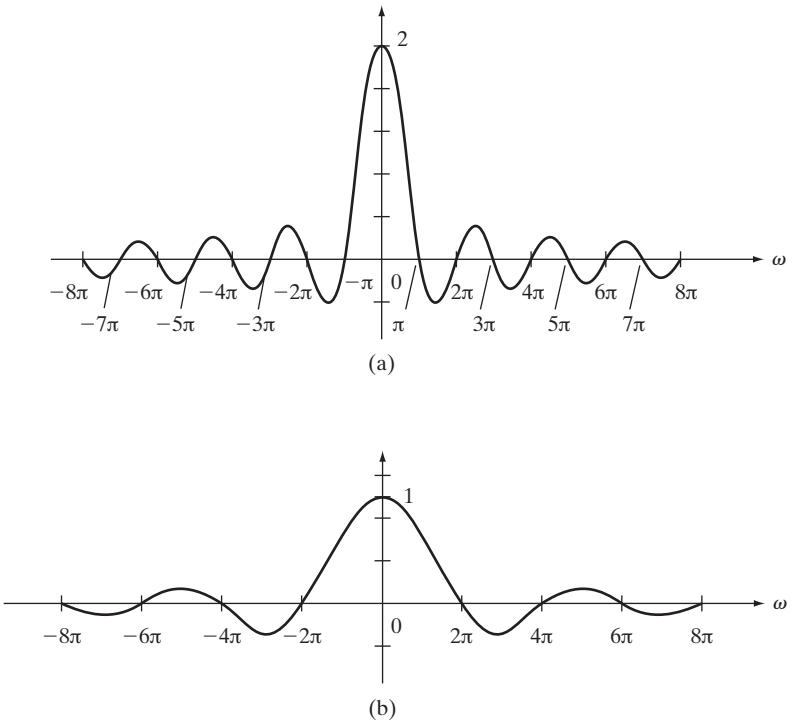



**FIGURA 3.22**
Transformadas de Fourier de (a) $p_2(t)$, y (b) $p_2(2t)$.

con menor duración $p_2(2t)$ tiene un ancho de banda más amplio que el pulso de mayor duración $p_2(t)$.

Para una señal cualquiera $x(t)$ con transformada de Fourier $X(\omega)$, si $a > 1$, $X(\omega/a)$ es una expansión de frecuencia de $X(\omega)$. Por lo tanto, por (3.43) vemos que una compresión de tiempo de una señal $x(t)$ corresponde a una expansión de frecuencia de la transformada de Fourier $X(\omega)$ de la señal. Esto nuevamente muestra que las señales con más corta duración tienen anchos de banda más amplios que aquellas señales de más larga duración en el tiempo.

Nuevamente, sea $x(t)$ una señal cualquiera con transformada de Fourier $X(\omega)$. Si $0 < a < 1$, $x(at)$ es una *expansión de tiempo* de $x(t)$, y $X(\omega/a)$ es una *compresión de frecuencia* de $X(\omega)$. En este caso, de (3.43) se desprende que una expansión de tiempo de $x(t)$ corresponde a una compresión de frecuencia de $X(\omega)$. Por lo tanto, las señales de más larga duración tienen anchos de banda más pequeños.

### 3.6.4 Inversión en el tiempo

Dada una señal $x(t)$, considere la señal invertida en el tiempo $x(-t)$. La señal $x(-t)$ es igual a $x(t)$ doblada sobre el eje vertical. Ahora, si $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$, entonces

$$x(-t) \leftrightarrow X(-\omega) \tag{3.45}$$

Para demostrar (3.45), simplemente sustituya $t$ por $-t$ en la definición de la transformada de Fourier de $x(t)$.

Si la señal $x(t)$ está valuada en reales, de la definición (3.30) de la transformada de Fourier se desprende que

$$X(-\omega) = \overline{X(\omega)}$$

donde $\overline{X(\omega)}$ es el complejo conjugado de $X(\omega)$. Por lo tanto, el par de transformadas (3.45) puede rescribirse como

$$x(-t) \leftrightarrow \overline{X(\omega)} \tag{3.46}$$

Por (3.46), una inversión de tiempo en el dominio de tiempo corresponde a la conjugación en el dominio de frecuencia.

---

**Ejemplo 3.15 Señal exponencial invertida en el tiempo**

Dado un número real $b > 0$, considere la señal

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t > 0 \\ e^{bt}, & t \leq 0 \end{cases}$$

Observe que

$$x(-t) = e^{-bt}u(t)$$

y del resultado en el ejemplo 3.8, la transformada de Fourier de $x(-t)$ es $1/(b+j\omega)$. Por lo tanto, la transformada de Fourier de $x(t)$ es

$$X(\omega) = \frac{1}{\overline{b + j\omega}} = \frac{1}{b - j\omega}$$

---

### 3.6.5 Multiplicación por una potencia de *t*

Si $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$, para cualquier entero positivo $n$,

$$t^n x(t) \leftrightarrow (j)^n \frac{d^n}{d\omega^n} X(\omega) \tag{3.47}$$

Al establecer $n = 1$ en (3.47), obtenemos que la multiplicación por $t$ en el dominio de tiempo corresponde a la diferenciación respecto a $\omega$, en el dominio de frecuencia (más la multiplicación por $j$).

Para demostrar (3.47) para el caso $n = 1$, comience con la siguiente definición de la transformada de Fourier:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\, dt \tag{3.48}$$

Al derivar ambos lados de (3.48) respecto a $\omega$, y multiplicándolos por $j$, obtenemos

$$j\frac{dX(\omega)}{d\omega} = j\int_{-\infty}^{\infty}(-jt)x(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

$$j\frac{dX(\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty}tx(t)e^{-j\omega t}\,dt \tag{3.49}$$

El lado derecho de (3.49) es igual a la transformada de Fourier de $tx(t)$ y, por lo tanto, (3.47) queda demostrada para el caso $n = 1$. La demostración para $n \geq 2$ se obtiene mediante la segunda y posteriores derivadas de $X(\omega)$ respecto a $\omega$. Aquí omitimos los detalles.

---

### Ejemplo 3.16 Producto de *t* y un pulso

Sea $x(t) = tp_2(t)$, cuya gráfica aparece en la figura 3.23. La transformada de Fourier $X(\omega)$ de $x(t)$ puede calcularse utilizando la propiedad (3.47) y el par de transformadas (3.39). Esto arroja

$$X(\omega) = j\frac{d}{d\omega}\left(2\,\text{arcsen}\frac{\omega}{\pi}\right)$$

$$= j2\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\text{sen}\,\omega}{\omega}\right)$$

$$= j2\frac{\omega\cos\omega - \text{sen}\,\omega}{\omega^2}$$

La gráfica del espectro de amplitud $|X(\omega)|$ aparece en la figura 3.24.

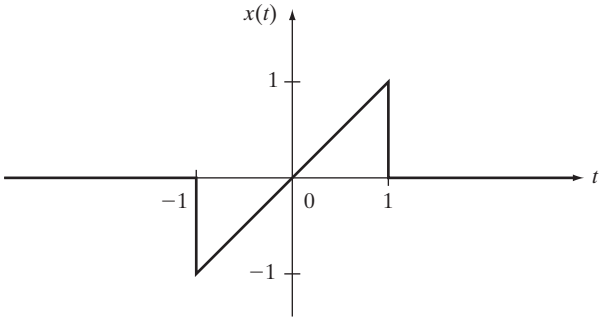



**FIGURA 3.23**
La señal $x(t) = tp_2(t)$.

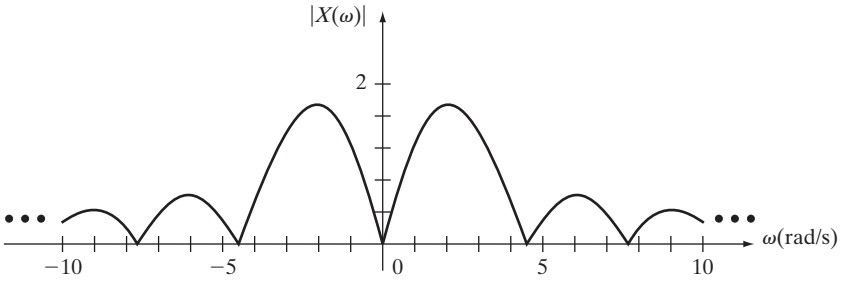



**FIGURA 3.24**
Espectro de amplitud de la señal del ejemplo 3.16.

### 3.6.6 Multiplicación por una exponencial compleja

Si $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$, entonces para cualquier número real $\omega_0$,

$$x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega - \omega_0) \tag{3.50}$$

Entonces, multiplicar por una exponencial compleja en el dominio de tiempo, corresponde a un desplazamiento de frecuencia en el dominio de frecuencia. La demostración de (3.50) se desprende directamente de la definición de la transformada de Fourier. Dejamos dicha prueba al lector.

### 3.6.7 Multiplicación por una sinusoide

Si $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$, entonces para cualquier número real $\omega_0$,

$$x(t)\ \text{sen}(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{j}{2}[X(\omega + \omega_0) - X(\omega - \omega_0)] \tag{3.51}$$

$$x(t)\ \cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2}[X(\omega + \omega_0) + X(\omega - \omega_0)] \tag{3.52}$$

Las demostraciones de (3.51) y (3.52) se desprenden de (3.50) y de la identidad de Euler. Aquí omitimos los detalles.

Como explicamos en la sección 3.8, las señales $x(t)$ sen$(\omega_0 t)$ y $x(t)$ cos$(\omega_0 t)$ pueden considerarse señales de amplitud modulada. De manera más precisa, al formar la señal $x(t)$ sen$(\omega_0 t)$, la portadora sen $\omega_0 t$ es modulada por la señal $x(t)$. Como resultado de esta caracterización de $x(t)$ sen$(\omega_0 t)$ [y $x(t)$ cos$(\omega_0 t)$], las relaciones (3.51) y (3.52) se conocen como *teoremas de modulación* de la transformada de Fourier. Las relaciones (3.51) y (3.52) muestran que la modulación de una portadora mediante una señal, da como resultado la traslación de frecuencias $X(\omega + \omega_0)$, $X(\omega - \omega_0)$ de la transformada de Fourier $X(\omega)$.

#### Ejemplo 3.17 Ráfaga sinusoidal

Considere la señal $x(t) = p_\tau(t)\cos(\omega_0 t)$, la cual puede interpretarse como una ráfaga sinusoidal. Para el caso en que $\tau = 0.5$ y $\omega_0 = 60$ rad/s, la gráfica de la señal aparece en la figura 3.25. Por la

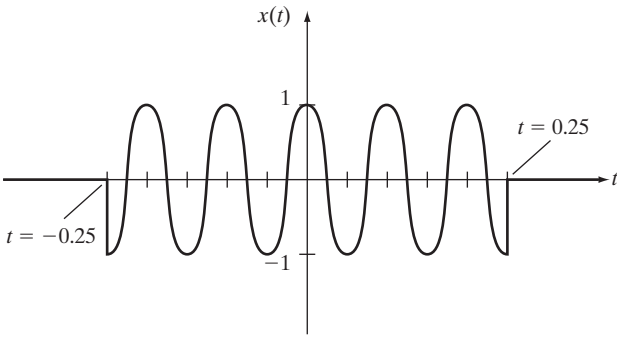



**FIGURA 3.25**
Ráfaga sinusoidal.

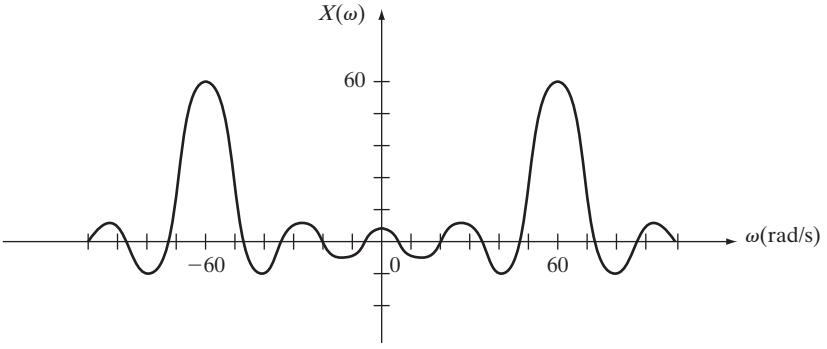



**FIGURA 3.26**
Transformada de Fourier de la ráfaga sinusoidal $x(t) = p_{0.5}(t)\cos(60t)$.

propiedad de modulación (3.52) y el par de transformadas (3.39), la transformada de Fourier para una ráfaga sinusoidal es igual a

$$\frac{1}{2}\left[\tau \operatorname{arcsen}\left(\frac{\tau(\omega + \omega_0)}{2\pi}\right) + \tau \operatorname{arcsen}\left(\frac{\tau(\omega - \omega_0)}{2\pi}\right)\right]$$

Para el caso $\tau = 0.5$ y $\omega_0 = 60$ rad/s, la gráfica de la transformada de la ráfaga sinusoidal aparece en la figura 3.26.

### 3.6.8 Derivación en el dominio de tiempo

Si $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$, entonces para cualquier entero positivo $n$,

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t) \leftrightarrow (j\omega)^n X(\omega) \tag{3.53}$$

Para el caso $n = 1$, de (3.53) se desprende que la derivación en el dominio de tiempo corresponde a multiplicar por $j\omega$ en el dominio de frecuencia. Para demostrar (3.53) para el caso $n = 1$, primero observe que la transformada de Fourier de $dx(t)/dt$ es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-j\omega t}\, dt \tag{3.54}$$

La integral (3.54) puede calcularse "por partes" de la siguiente manera: con $v = e^{-j\omega t}$ y $w = x(t)$, $dv = -j\omega e^{-j\omega} dt$ y $dw = [dx(t)/dt]dt$. Entonces,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-j\omega t}\, dt &= vw|_{t=-\infty}^{t=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} w\, dv \\ &= e^{-j\omega t} x(t)|_{t=-\infty}^{t=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} x(t)(-j\omega) e^{-j\omega t}\, dt\end{aligned}$$

Después, si $x(t) \to 0$ cuando $t \to \pm\infty$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-j\omega t}\, dt = (j\omega) X(\omega)$$

y por lo tanto (3.53) es válida para el caso $n = 1$. La demostración de (3.53) para $n \geq 2$ se obtiene aplicando repetidamente la integración por partes.

### 3.6.9 Integración en el dominio de tiempo

Dada una señal $x(t)$, la integral de $x(t)$ es la función

$$\int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\, d\lambda$$

Suponga que $x(t)$ tiene la transformada de Fourier $X(\omega)$. En general, la integral de $x(t)$ no tiene transformada de Fourier en el sentido ordinario, pero sí tiene la transformada generalizada

$$\frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

donde $\delta(\omega)$ es la función impulso en el dominio de frecuencia. Esto da como resultado el par de transformadas

$$\int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\, d\lambda \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega) \tag{3.55}$$

Observe que si la señal $x(t)$ no tiene componente de cd (por ejemplo, $X(0) = 0$), entonces (3.55) se reduce a

$$\int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\, d\lambda \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} X(\omega)$$

Por tanto, el segundo término del lado derecho del par de transformadas (3.55) se debe a una posible componente de cd en $x(t)$.

---

### Ejemplo 3.18 Transformada de un pulso triangular

Considere el pulso triangular $v(t)$ que aparece en la figura 3.27. Como vimos en el capítulo 1, el pulso triangular puede expresarse de manera matemática mediante

$$v(t) = \left(1 - \frac{2|t|}{\tau}\right) p_\tau(t)$$

donde nuevamente $p_\tau(t)$ es el pulso de duración $\tau$ segundos. Para calcular la transformada de Fourier $V(\omega)$ de $v(t)$, primero calcularemos la transformada de la derivada de $v(t)$. Entonces, mediante la propiedad de integración (3.55), será posible determinar $V(\omega)$.

La derivada de $v(t)$, la cual se denota mediante $x(t)$, aparece en la figura 3.28. A partir de la gráfica, es claro que la derivada puede expresarse de manera matemática como

$$x(t) = \frac{2}{\tau} p_{\tau/2}\left(t + \frac{\tau}{4}\right) - \frac{2}{\tau} p_{\tau/2}\left(t - \frac{\tau}{4}\right)$$

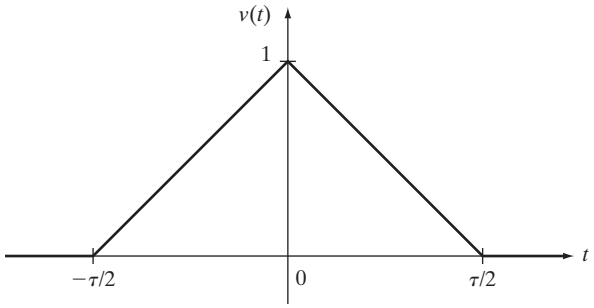



**FIGURA 3.27**
Pulso triangular.

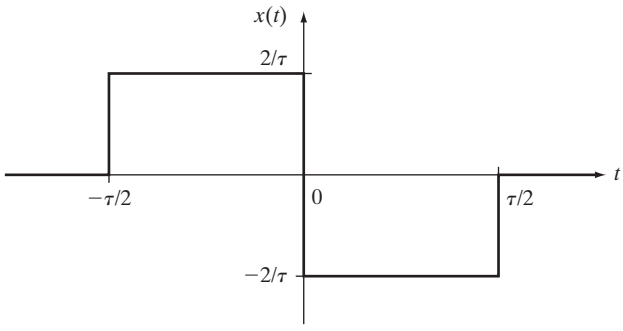



**FIGURA 3.28**
Derivada del pulso triangular.

La transformada de Fourier $X(\omega)$ de $x(t)$ puede calcularse mediante el par de transformadas (3.39) y la propiedad de desplazamiento (3.41). Esto arroja

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \left(\operatorname{arcsen}\frac{\tau\omega}{4\pi}\right)\left[\exp\left(\frac{j\tau\omega}{4}\right) - \exp\left(-\frac{j\tau\omega}{4}\right)\right] \\ &= \left(\operatorname{arcsen}\frac{\tau\omega}{4\pi}\right)\left(j2\,\operatorname{sen}\frac{\tau\omega}{4}\right) \end{aligned}$$

Ahora, debido a que $v(t)$ es la integral de $x(t)$, por la propiedad de integración (3.55), la transformada de Fourier $V(\omega)$ de $v(t)$ es

$$\begin{aligned} V(\omega) &= \frac{1}{j\omega}\left(\operatorname{arcsen}\frac{\tau\omega}{4\pi}\right)\left(j2\,\operatorname{sen}\frac{\tau\omega}{4}\right) + \pi X(0)\delta(\omega) \\ &= \frac{2}{\omega}\left[\frac{\operatorname{sen}(\tau\omega/4)}{\tau\omega/4}\right]\operatorname{sen}\frac{\tau\omega}{4} \\ &= \frac{\tau}{2}\frac{\operatorname{sen}^2(\tau\omega/4)}{(\tau\omega/4)^2} \\ &= \frac{\tau}{2}\operatorname{arcsen}^2\frac{\tau\omega}{4\pi} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el resultado final es el par de transformadas

$$\left(1 - \frac{2|t|}{\tau}\right)p_\tau(t) \leftrightarrow \frac{\tau}{2}\operatorname{arcsen}^2\frac{\tau\omega}{4\pi} \tag{3.56}$$

Por (3.56), vemos que el pulso triangular en el dominio de tiempo corresponde a la función senc al cuadrado en el dominio de la transformada de Fourier. Para el caso $\tau = 1$, la gráfica de la transformada de Fourier del pulso triangular, aparece en la figura 3.29.

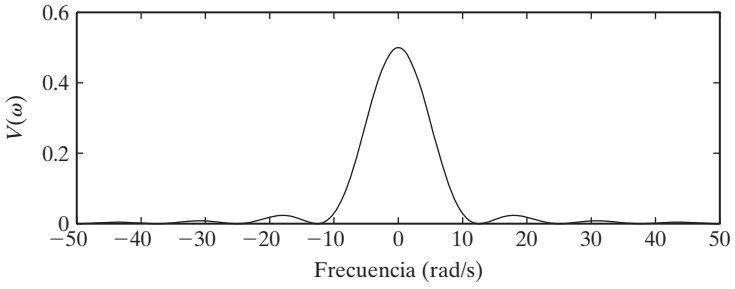



**FIGURA 3.29**
Transformada de Fourier del pulso triangular de 1 segundo.

### 3.6.10 Convolución en el dominio de tiempo

Dadas dos señales $x(t)$ y $v(t)$, con transformadas de Fourier $X(\omega)$ y $V(\omega)$, la transformada de la convolución $x(t)*v(t)$ es igual al producto $X(\omega)V(\omega)$, lo cual da como resultado el par de transformadas

$$x(t) * v(t) \leftrightarrow X(\omega)V(\omega) \tag{3.57}$$

Observe que por (3.57), la convolución en el dominio de tiempo corresponde a la multiplicación en el dominio de frecuencia. En el capítulo 5 veremos que esta propiedad es muy útil al determinar la relación entre la entrada y la salida de un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo.

Para demostrar (3.57), primero recuerde que por definición de convolución,

$$x(t) * v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)v(t - \lambda)\, d\lambda$$

Por lo tanto, la transformada de Fourier de $x(t)*v(t)$ está dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)v(t - \lambda)\, d\lambda\right]e^{-j\omega t}\, dt$$

Esto puede rescribirse de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\left[\int_{-\infty}^{\infty} v(t - \lambda)e^{-j\omega t}\, dt\right] d\lambda$$

Si utilizamos un cambio de variable $\bar{t} = t - \lambda$ en la segunda integral, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\left[\int_{-\infty}^{\infty} v(\bar{t})e^{-j\omega(\bar{t} + \lambda)}\, d\bar{t}\right] d\lambda$$

Esta expresión puede rescribirse de la forma

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)e^{-j\omega\lambda}\, d\lambda\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} v(\bar{t})e^{-j\omega\bar{t}}\, d\bar{t}\right]$$

Resulta claro que la expresión anterior es igual a $X(\omega)V(\omega)$ y, por lo tanto, (3.57) queda demostrada.

### 3.6.11 Multiplicación en el dominio de tiempo

Si $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$ y $v(t) \leftrightarrow V(\omega)$, entonces

$$x(t)v(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}[X(\omega) * V(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda)V(\omega - \lambda)\, d\lambda \tag{3.58}$$

De (3.58) vemos que la multiplicación en el dominio de tiempo corresponde a la convolución en el dominio de la transformada de Fourier. La demostración de (3.58) se desprende de la definición de la transformada de Fourier y de la manipulación de integrales. Aquí omitimos los detalles.

### 3.6.12 Teorema de Parseval

De nuevo, suponga que $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$ y $v(t) \leftrightarrow V(\omega)$. Entonces,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)v(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{X(\omega)}V(\omega)\,d\omega \tag{3.59}$$

donde $\overline{X(\omega)}$ es el complejo conjugado de $X(\omega)$. La relación (3.59), la cual se conoce como *teorema de Parseval*, se desprende directamente del par de transformadas (3.58). Para ver esto, primero observe que la transformada de Fourier del producto $x(t)v(t)$ es igual a

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)v(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

Pero, por el par de transformadas (3.58), la transformada de Fourier de $x(t)v(t)$ es igual a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - \lambda)V(\lambda)\,d\lambda$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)v(t)e^{-j\omega t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - \lambda)V(\lambda)\,d\lambda \tag{3.60}$$

La relación (3.60) debe mantenerse para todos los valores reales de $\omega$. Si consideramos $\omega = 0$, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)v(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(-\lambda)V(\lambda)\,d\lambda \tag{3.61}$$

Si $x(t)$ está valuada en reales, $X(-\omega) = \overline{X(\omega)}$ y, por lo tanto, si cambiamos la variable de integración de $\lambda$ a $\omega$, del lado derecho de (3.61), obtenemos (3.59).

Observe que si $v(t) = x(t)$, el teorema de Parseval se vuelve

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{X(\omega)}X(\omega)\,d\omega \tag{3.62}$$

A partir de las propiedades de los números complejos,

$$\overline{X(\omega)}X(\omega) = |X(\omega)|^2$$

y por lo tanto, (3.62) puede rescribirse de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\,d\omega \tag{3.63}$$

El lado izquierdo de (3.63) puede interpretarse como la energía de la señal $x(t)$. Entonces, (3.63) relaciona la energía de la señal y la integral del cuadrado de la magnitud de la transformada de Fourier de la señal.

### 3.6.13 Dualidad

Suponga que $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$. Podemos definir una nueva señal de tiempo continuo si establecemos $\omega = t$ en $X(\omega)$. Esto resulta en la señal de tiempo continuo $X(t)$. La propiedad de dualidad establece que la transformada de Fourier de $X(t)$ es igual a $2\pi x(-\omega)$; es decir,

$$X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega) \tag{3.64}$$

En (3.64), $x(-\omega)$ es la función en frecuencia construida con $t = -\omega$ en la expresión para $x(t)$.

Para cualquier par de transformadas $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$, por medio de la propiedad de dualidad, el nuevo par de transformadas (3.64) puede generarse. Por ejemplo, si le aplicamos esta propiedad al par (3.39), obtenemos el par de transformadas

$$\tau \operatorname{arcsen}\frac{\tau t}{2\pi} \leftrightarrow 2\pi p_\tau(-\omega) \tag{3.65}$$

Ya que $p_\tau(\omega)$ es una función par de $\omega$, $p_\tau(-\omega) = p_\tau(\omega)$, y (3.65) puede rescribirse como

$$\tau \operatorname{arcsen}\frac{\tau t}{2\pi} \leftrightarrow 2\pi p_\tau(\omega) \tag{3.66}$$

De (3.66) vemos que la función arcsen en el tiempo corresponde a una función pulso rectangular en frecuencia.

Si aplicamos la propiedad de dualidad al par de transformadas (3.56) tenemos

$$\frac{\tau}{2}\operatorname{arcsen}^2\frac{\tau t}{4\pi} \leftrightarrow 2\pi\left(1 - \frac{2|\omega|}{\tau}\right)p_\tau(\omega) \tag{3.67}$$

Por tanto, la función arcsen elevada al cuadrado tiene transformada de Fourier igual a la función pulso triangular en frecuencia.

Es fácil demostrar la propiedad de dualidad: primero, por definición de la transformada de Fourier

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt \tag{3.68}$$

Al establecer $\omega = t$ y $t = -\omega$ en (3.68), obtenemos

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi x(-\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

Entonces, $X(t)$ es la transformada inversa de Fourier de la función frecuencia $2\pi x(-\omega)$, lo cual demuestra (3.64).

Para conveniencia del lector, estas propiedades de Fourier se encuentran resumidas en la tabla 3.1.

**TABLA 3.1** Propiedades de la transformada de Fourier

| Propiedad | Par de transformadas/Propiedad |
|---|---|
| Linealidad | $ax(t) + bv(t) \leftrightarrow aX(\omega) + bV(\omega)$ |
| Desplazamiento en el tiempo por la izquierda o por la derecha | $x(t - c) \leftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega c}$ |
| Escalamiento en el tiempo | $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a}X\left(\frac{\omega}{a}\right)\ a > 0$ |
| Inversión en el tiempo | $x(-t) \leftrightarrow X(-\omega) = \overline{X(\omega)}$ |
| Multiplicación por una potencia de $t$ | $t^n x(t) \leftrightarrow j^n \frac{d^n}{d\omega^n}X(\omega)\ n = 1, 2, \ldots$ |
| Multiplicación por una exponencial compleja | $x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega - \omega_0)\ \ \omega_0$ real |
| Multiplicación por $\text{sen}(\omega_0 t)$ | $x(t)\,\text{sen}(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{j}{2}[X(\omega + \omega_0) - X(\omega - \omega_0)]$ |
| Multiplicación por $\cos(\omega_0 t)$ | $x(t)\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2}[X(\omega + \omega_0) + X(\omega - \omega_0)]$ |
| Derivación en el dominio del tiempo | $\frac{d^n}{dt^n}x(t) \leftrightarrow (j\omega)^n X(\omega)\ n = 1, 2, \ldots$ |
| Integración en el dominio del tiempo | $\int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\,d\lambda \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$ |
| Convolución en el dominio del tiempo | $x(t) * v(t) \leftrightarrow X(\omega)V(\omega)$ |
| Multiplicación en el dominio del tiempo | $x(t)v(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}X(\omega) * V(\omega)$ |
| Teorema de Parseval | $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)v(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{X(\omega)}V(\omega)\,d\omega$ |
| Caso especial del teorema de Parseval | $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert X(\omega)\rvert^2\,d\omega$ |
| Dualidad | $X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$ |

## 3.7 TRANSFORMADA GENERALIZADA DE FOURIER

En el ejemplo 3.8 vimos que la función escalón unitario $u(t)$ no tiene transformada de Fourier, en el sentido ordinario. También es fácil ver que $\cos(\omega_0 t)$ y $\text{sen}(\omega_0 t)$ no tienen una transformada de Fourier en el sentido ordinario. Debido a que la función escalón y las funciones sinusoidales con frecuencia surgen en el estudio de sistemas y señales, resulta deseable poder definir la transformada de Fourier de estas señales. Podemos hacer esto, si definimos la idea de la transformada generalizada de Fourier, lo cual consideraremos en esta sección.

Primero, calcularemos la transformada de Fourier del impulso unitario $\delta(t)$. Recuerde que $\delta(t)$ se define como

$$\delta(t) = 0, t \neq 0$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(\lambda)\,d\lambda = 1, \text{toda } \varepsilon > 0 \tag{3.69}$$

La transformada de Fourier de $\delta(t)$ está dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

Ya que $\delta(t) = 0$ para toda $t \neq 0$,

$$\delta(t) e^{-j\omega t} = \delta(t)$$

y la integral de la transformada de Fourier se reduce a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt$$

Por (3.69) esta integral es igual a 1, lo que da como resultado el par de transformadas

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \tag{3.70}$$

Este resultado muestra que el espectro de frecuencia de $\delta(t)$ contiene todas las frecuencias con amplitud 1.

Ahora, si aplicamos la propiedad de dualidad a (3.70), obtenemos el par

$$x(t) = 1, -\infty < t < \infty \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \tag{3.71}$$

Por lo tanto, la transformada de Fourier de una señal constante de amplitud 1 es igual a un impulso en frecuencia, con área $2\pi$. Pero, a partir de los resultados del ejemplo 3.7, vimos que una señal constante no tiene transformada de Fourier en el sentido ordinario. La función en frecuencia $2\pi\delta(\omega)$ se conoce como la *transformada generalizada de Fourier* de la señal constante $x(t) = 1, -\infty < t < \infty$.

Ahora considere la señal $x(t) = \cos(\omega_0 t), -\infty < t < \infty$, donde $\omega_0$ es un número real fijo cualquiera. Si utilizamos el par de transformadas (3.71) y la propiedad de modulación, se revela que $x(t)$ tiene la transformada generalizada de Fourier

$$\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

Por lo tanto,

$$\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \tag{3.72}$$

De manera similar, podemos mostrar que $\text{sen}(\omega_0 t)$ tiene la transformada generalizada

$$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

y entonces,

$$\text{sen}\ \omega_0 t \leftrightarrow j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] \tag{3.73}$$

La gráfica de la transformada de $\cos(\omega_0 t)$ aparece en la figura 3.30. Observe que el espectro consiste en dos impulsos ubicados en $+-\omega_0$, y cada impulso tiene un área de $\pi$.

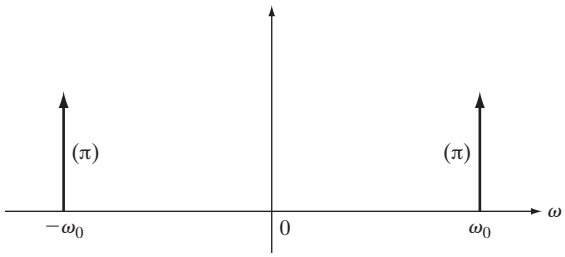



**FIGURA 3.30**
Transformada de Fourier de $\cos(\omega_0 t)$.

### 3.7.1 Transformada de Fourier de una señal periódica

Al utilizar el par (3.71) y la propiedad (3.50), obtenemos el par de transformadas

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \tag{3.74}$$

El par (3.74) puede utilizarse para calcular la transformada generalizada de Fourier de una señal periódica: sea $x(t)$ periódica para $-\infty < t < \infty$, con periodo $T$. Entonces, $x(t)$ tiene la serie exponencial compleja de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \tag{3.75}$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T$. La transformada de Fourier del lado derecho de (3.75) puede obtenerse mediante linealidad y el par de transformadas (3.74). Esto arroja

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

Entonces, la transformada de Fourier de una señal periódica es un tren de funciones impulso, ubicadas en $\omega = k\omega_0$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

### 3.7.2 Transformada de la función escalón unitario

La transformada (generalizada) de Fourier del escalón unitario $u(t)$, puede calcularse con la propiedad de integración dada por el par de transformadas (3.55). Debido a que $u(t)$ es igual a la integral del impulso $\delta(t)$, y la transformada de $\delta(t)$ es la función constante unitaria, a partir de (3.55) vemos que la transformada de $u(t)$ está dada por

$$\frac{1}{j\omega}(1) + \pi(1)\delta(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

por lo tanto, el par de transformadas resultante es

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \tag{3.76}$$

**TABLA 3.2** Pares de transformadas de Fourier comunes

$1, -\infty < t < \infty \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

$-0.5 + u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{j\omega}$

$u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \dfrac{1}{j\omega}$

$\delta(t) \leftrightarrow 1$

$\delta(t - c) \leftrightarrow e^{-j\omega c}$, $c$ cualquier número real

$e^{-bt}u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{j\omega + b}, b > 0$

$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$, $\omega_0$ cualquier número real

$p_\tau(t) \leftrightarrow \tau \operatorname{arcsen}\dfrac{\tau\omega}{2\pi}$

$\tau \operatorname{arcsen}\dfrac{\tau t}{2\pi} \leftrightarrow 2\pi p_\tau(\omega)$

$\left(1 - \dfrac{2|t|}{\tau}\right)p_\tau(t) \leftrightarrow \dfrac{\tau}{2}\operatorname{arcsen}^2\left(\dfrac{\tau\omega}{4\pi}\right)$

$\dfrac{\tau}{2}\operatorname{arcsen}^2\left(\dfrac{\tau t}{4\pi}\right) \leftrightarrow 2\pi\left(1 - \dfrac{2|\omega|}{\tau}\right)p_\tau(\omega)$

$\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$

$\cos(\omega_0 t + \theta) \leftrightarrow \pi[e^{-j\theta}\delta(\omega + \omega_0) + e^{j\theta}\delta(\omega - \omega_0)]$

$\operatorname{sen}(\omega_0 t) \leftrightarrow j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$

$\operatorname{sen}(\omega_0 t + \theta) \leftrightarrow j\pi[e^{-j\theta}\delta(\omega + \omega_0) - e^{j\theta}\delta(\omega - \omega_0)]$

En la tabla 3.2 aparece una lista de los pares de transformadas de Fourier más comunes, la cual incluye pares que dedujimos en este capítulo.

## 3.8 APLICACIÓN A MODULACIÓN Y DEMODULACIÓN DE SEÑALES

Para ilustrar el uso de la transformada de Fourier, en esta sección daremos una introducción a la transmisión de información (en forma de una señal generada por una fuente) sobre un canal, y a la recepción de información por un usuario. El canal puede consistir en espacio libre o en cable. Un componente importante del proceso de transmisión es el uso de la modulación para convertir la fuente de la señal en una forma adecuada de transmisión sobre el canal. En el proceso de modulación, algunos parámetros de la señal portadora varían de acuerdo con la señal transmitida. Existen dos tipos básicos de modulación: la analógica y la digital. En la modulación analógica el parámetro que varía puede tomar un intervalo continuo de valores, mientras que en la modulación digital, el parámetro toma sólo un número finito de diferentes valores posibles. Después de la transmisión sobre un canal, la

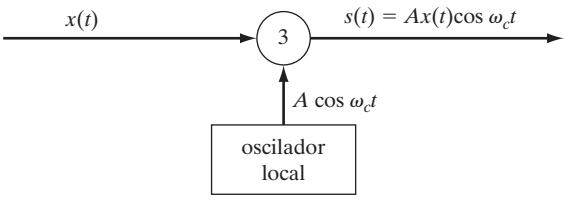



**FIGURA 3.31**
Amplitud modulada.

señal transmitida es reconstruida por un receptor que utiliza un proceso de demodulación para extraer la señal original. En esta sección consideraremos la modulación y la demodulación analógicas. En este libro no abarcamos la modulación y demodulación digitales. (Vea Proakis [2000]).

### 3.8.1 Modulación analógica

Sea $x(t)$ una señal de tiempo continuo, como una señal de audio que va a transmitirse sobre un canal que consiste en el espacio libre o en un cable. Como vimos antes, la señal se transmite mediante la modulación de una portadora. El tipo más común de portadoras es una sinusoide, dada por $A\cos(\omega_c t)$, donde $A$ es la amplitud y $\omega_c$ es la frecuencia en rad/s. En la *amplitud modulada* (AM), la amplitud de la portadora sinusoidal se modula con la señal $x(t)$. En una forma de transmisión AM, la señal $x(t)$ y la portadora $A\cos(\omega_c t)$ son simplemente multiplicadas para producir la portadora modulada $s(t) = Ax(t)\cos(\omega_c t)$. El proceso aparece en la figura 3.31. El *oscilador local* de la figura es un dispositivo que produce una señal sinusoidal $A\cos(\omega_c t)$. El multiplicador de señales puede realizarse utilizando un elemento no lineal, como un diodo.

---

**Ejemplo 3.19 Amplitud modulada**

Suponga que $x(t)$ es la señal que aparece en la figura 3.32a, y que la portadora es igual a $\cos(5\pi t)$. La gráfica correspondiente a la portadora modulada $s(t) = x(t)\cos(5\pi t)$ aparece en la figura 3.32b.

---

El espectro de frecuencia de la portadora modulada $s(t) = Ax(t)\cos(\omega_c t)$ puede determinarse a través de la propiedad de modulación de la transformada de Fourier. Primero, suponemos que la señal $x(t)$ es de banda limitada, con un ancho de banda $B$, es decir,

$$|X(\omega)| = 0, \text{ para toda } \omega > B$$

donde $X(\omega)$ es la transformada de Fourier de $x(t)$. También suponemos que $\omega_c > B$; es decir, la frecuencia $\omega_c$ de la portadora es mayor que el ancho de banda $B$ de la señal. Si $x(t)$ es una señal de audio, como una onda musical, el ancho de banda $B$ puede considerarse de 20 KHz, ya que es poco probable que una señal de audio contenga componentes importantes de frecuencia por arriba de los 20 KHz.

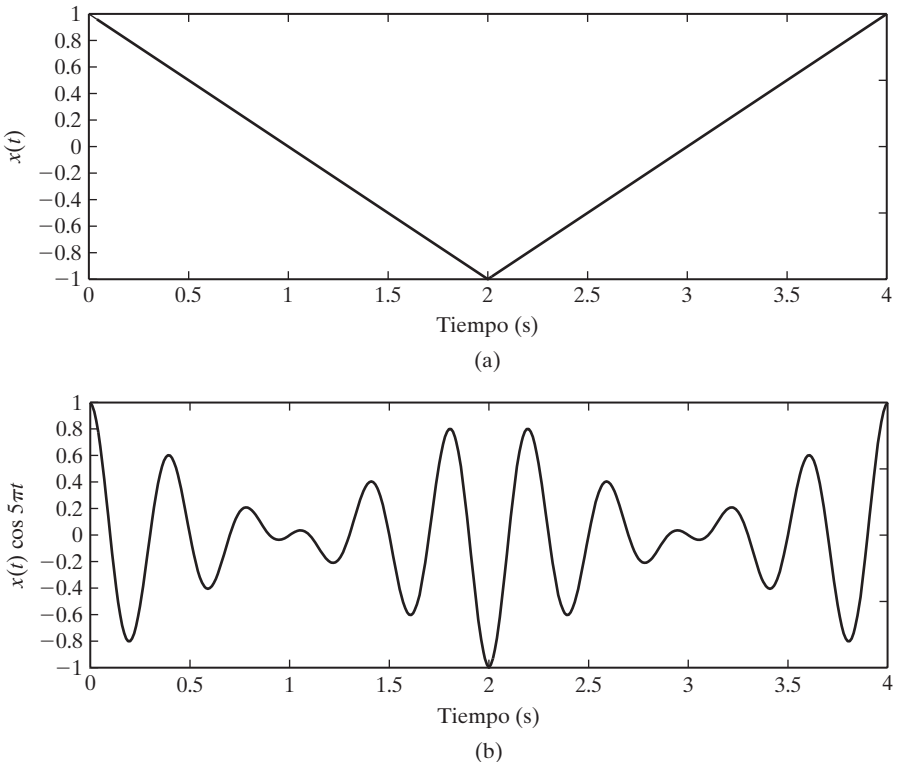



**FIGURA 3.32**
(a) Señal y (b) portadora modulada $Ax(t)\cos(\omega_c t)$ del ejemplo 3.19.

Ahora, por la propiedad de modulación, la transformada de Fourier $S(\omega)$ de la portadora modulada $s(t) = Ax(t)\cos(\omega_c t)$ está dada por

$$S(\omega) = \frac{A}{2}[X(\omega + \omega_c) + X(\omega - \omega_c)]$$

Este resultado muestra que el proceso de modulación lleva a la transformada de Fourier $X(\omega)$ de $x(t)$ hacia el siguiente intervalo de frecuencia, desde $\omega_c - B$ hasta $\omega_c + B$ (y hacia el intervalo negativo de frecuencia desde $-\omega_c - B$ hasta $-\omega_c + B$). Por ejemplo, si la transformada $X(\omega)$ tiene la forma que muestra la figura 3.33a, entonces la transformada de la portadora modulada tiene la forma que aparece en la figura 3.33b. Como se ilustra, la parte de $X(\omega - \omega_c)$ desde $\omega_c - B$ hasta $\omega_c$, se conoce como *banda lateral* inferior, y la parte de $X(\omega - \omega_c)$ desde $\omega_c$ hasta $\omega_c + B$ se conoce como *banda lateral* superior. Cada banda lateral contiene todos los componentes espectrales de la señal $x(t)$.

Una propiedad importante de la amplitud modulada en la transmisión de una señal $x(t)$, es la elevación en frecuencia del espectro de $x(t)$. El intervalo superior de frecuencias de la portadora modulada hace posible que se logren buenas propiedades de propagación, en la transmisión a través de cable o del espacio libre. Por ejemplo, en comunicaciones óp-

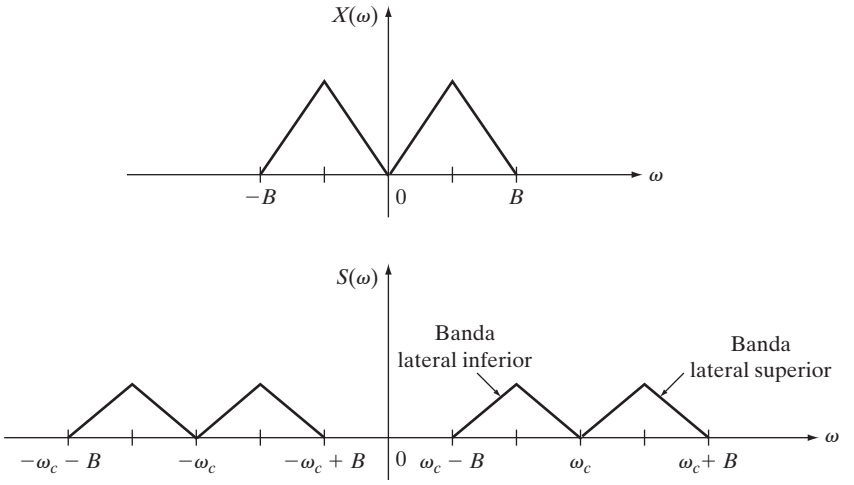



**FIGURA 3.33**
Transformada de Fourier de (a) la señal $x(t)$, y (b) la portadora modulada $s(t) = Ax(t)\cos(\omega_c t)$.

ticas, un haz de luz se modula y da como resultado que el espectro de la señal $x(t)$ pase a un intervalo de frecuencias óptico. Las señales convertidas normalmente se conocen como *señales de paso de banda*, ya que consisten en frecuencias del espectro convertido. La señal fuente $x(t)$ se conoce como *señal de banda base*.

### 3.8.2 Forma alternativa de AM

En algunos tipos de transmisión AM, como radio AM, la portadora modulada $s(t)$ está dada por

$$s(t) = A[1 + kx(t)]\cos(\omega_c t) \tag{3.77}$$

donde $k$ es una constante positiva llamada *sensibilidad de amplitud*, la cual se elige tal que $1 + kx(t) > 0$, para toda $t$. Esta condición garantiza que la envolvente de la portadora modulada $s(t)$ sea una réplica de la señal $x(t)$. En esta forma de transmisión AM, también suponemos que la frecuencia de la portadora $\omega_c$ es mucho más grande que el ancho de banda $B$ de $x(t)$.

---

**Ejemplo 3.20 Forma alternativa de AM**

De nuevo considere la señal de la figura 3.32a, y que sea la portadora $\cos(5\pi t)$. Después, con $k = 0.8$, la señal modulada $s(t) = [1 + kx(t)]\cos(5\pi t)$ aparece en la figura 3.34. Observe que la envolvente es una réplica de la señal $x(t)$, mientras que éste no es el caso para la señal modulada de la figura 3.32b.

---

Podemos determinar el espectro de frecuencia $S(\omega)$ de la portadora modulada $s(t) = A[1 + kx(t)]\cos(\omega_c t)$, también por medio de la transformada de Fourier. Esto arroja

$$S(\omega) = \pi A[\delta(\omega + \omega_c) + \delta(\omega - \omega_c)] + \frac{Ak}{2}[X(\omega + \omega_c) + X(\omega - \omega_c)]$$

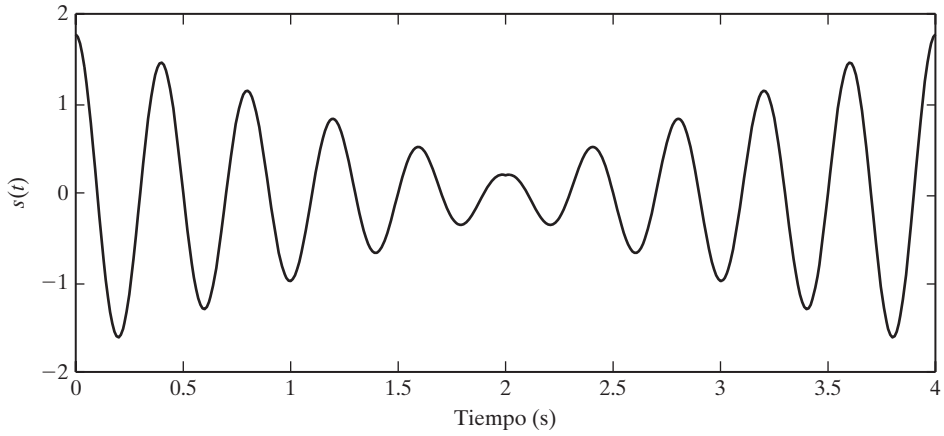



**FIGURA 3.34**
Portadora modulada del ejemplo 3.20.

Observe que las componentes de frecuencia en $\omega = \pm\omega_c$, lo cual se debe a la presencia de la portadora $A\cos(\omega_c t)$ en la señal modulada $A[1 + kx(t)]\cos(\omega_c t)$. Por lo tanto, en esta forma alternativa de AM, el espectro de la señal transmitida $s(t)$ contiene a la portadora y a las bandas laterales superior e inferior. En contraste, el espectro de la portadora modulada $Ax(t)\cos(\omega_c t)$ contiene sólo a las bandas laterales superior e inferior; la portadora es suprimida. Entonces, cuando la portadora modulada tiene la forma $Ax(t)\cos(\omega_c t)$, a ésta se le conoce como *transmisión de doble banda lateral con portadora suprimida* (DSB-SC). Cuando la portadora modulada tiene la forma $s(t) = A[1 + kx(t)]\cos(\omega_c t)$, a ésta se le conoce como *transmisión de doble banda lateral* (DSB). Una ventaja importante de la DSB-SC sobre la DSB es que, debido a que la DSB-SC no requiere la transmisión de la portadora, utiliza menos potencia que la DSB para transmitir la señal fuente $x(t)$. Por otra parte, como veremos en esta sección, las señales DSB pueden demodularse con un simple detector de envolvente, mientras que la demodulación de señales DSB-SC requieren sincronización entre el transmisor y el receptor.

### 3.8.3 Modulación angular

Además de la amplitud modulada, una señal $x(t)$ puede "colocarse" en una portadora sinusoidal por medio de la modulación del ángulo de la portadora. En esta forma de transmisión, conocida como *modulación angular*, la portadora modulada está dada por $s(t) = A\cos[\theta(t)]$, donde el ángulo $\theta(t)$ es una función de la señal de banda base $x(t)$. Existen dos tipos básicos de modulación angular: *fase modulada* y *frecuencia modulada*. En fase modulada (PM), el ángulo está dado por

$$\theta(t) = \omega_c t + k_p x(t)$$

donde $k_p$ es la sensibilidad de fase del modulador. En frecuencia modulada (FM), el ángulo está dado por

$$\theta(t) = \omega_c t + 2\pi k_f \int_0^t x(\tau)\, d\tau$$

donde $k_f$ es la *sensibilidad de frecuencia* del modulador. Por lo tanto, la portadora modulada en la transmisión PM es igual a

$$s(t) = A\cos[\omega_c t + k_p x(t)]$$

y la portadora modulada en una transmisión FM es igual a

$$s(t) = A\cos\left[\omega_c t + 2\pi k_f \int_0^t x(\tau)\, d\tau\right] \tag{3.78}$$

Observe que si $x(t)$ es la sinusoide $x(t) = \alpha\cos(\omega_x t)$, la señal FM (3.78) se vuelve

$$s(t) = A\cos\left[\omega_c t + \frac{2\pi k_f \alpha}{\omega_x}\operatorname{sen}\omega_x t\right]$$

---

**Ejemplo 3.21 Modulación PM y FM**

Suponga que $x(t) = \cos(\pi t)$, la cual aparece en la figura 3.35a. Entonces, con $\omega_c = 10\pi$, $A = 1$, $k_p = 5$, y $k_f = 5/2$, las señales PM y FM aparecen en las figuras 3.35b y 3.35c.

---

### 3.8.4 Modulación de la amplitud de pulso

En lugar de modular una sinusoide, es posible transmitir información en la forma de una señal $x(t)$, modulando otros tipos de ondas, como el tren de pulsos $p(t)$ que aparece en la figura 3.36. La amplitud de $p(t)$ puede modularse multiplicando $x(t)$ y $p(t)$, como muestra la figura 3.37. Este proceso se conoce como *modulación de amplitud de pulso* (PAM).

---

**Ejemplo 3.22 PAM**

Considere la señal que muestra la figura 3.38a. Con $T = 0.2$ y $\varepsilon \ll 0.2$, la señal PAM aparece en la figura 3.38b.

---

Una señal PAM puede generarse aplicando $x(t)$ a un interruptor que se cierra por $\varepsilon$ segundos cada $T$ segundos. En el límite cuando $\varepsilon \to 0$, la señal modulada $s(t) = x(t)p(t)$ es en realidad una versión muestreada de $x(t)$, donde $T$ es el intervalo de muestra. Por lo tanto, el muestreo está muy relacionado con la PAM. De hecho, la transformada de Fourier de una señal PAM es aproximadamente igual a la señal idealizada muestreada que consideramos en la sección 5.4.

### 3.8.5 Demodulación de señales DSB

En el caso de la transmisión DSB, donde no se suprime la portadora, podemos reconstruir $x(t)$ a partir de la portadora modulada $s(t) = A[1 + kx(t)]\cos(\omega_c t)$, aplicando $s(t)$ a un *detector de envolvente* dado por el circuito de la figura 3.39. Como muestra la figura, el circuito consiste en una resistencia fuente $R_s$, un diodo, un capacitor con capacitancia $C$, y una resistencia de carga $R_L$. Cuando no hay voltaje en el capacitor y la portadora modulada se incrementa de 0 hasta algún valor pico, la corriente fluye a través del diodo, y el capacitor carga hasta un voltaje igual al valor pico de $s(t)$. Cuando $s(t)$ disminuye desde el valor pico, el dio-

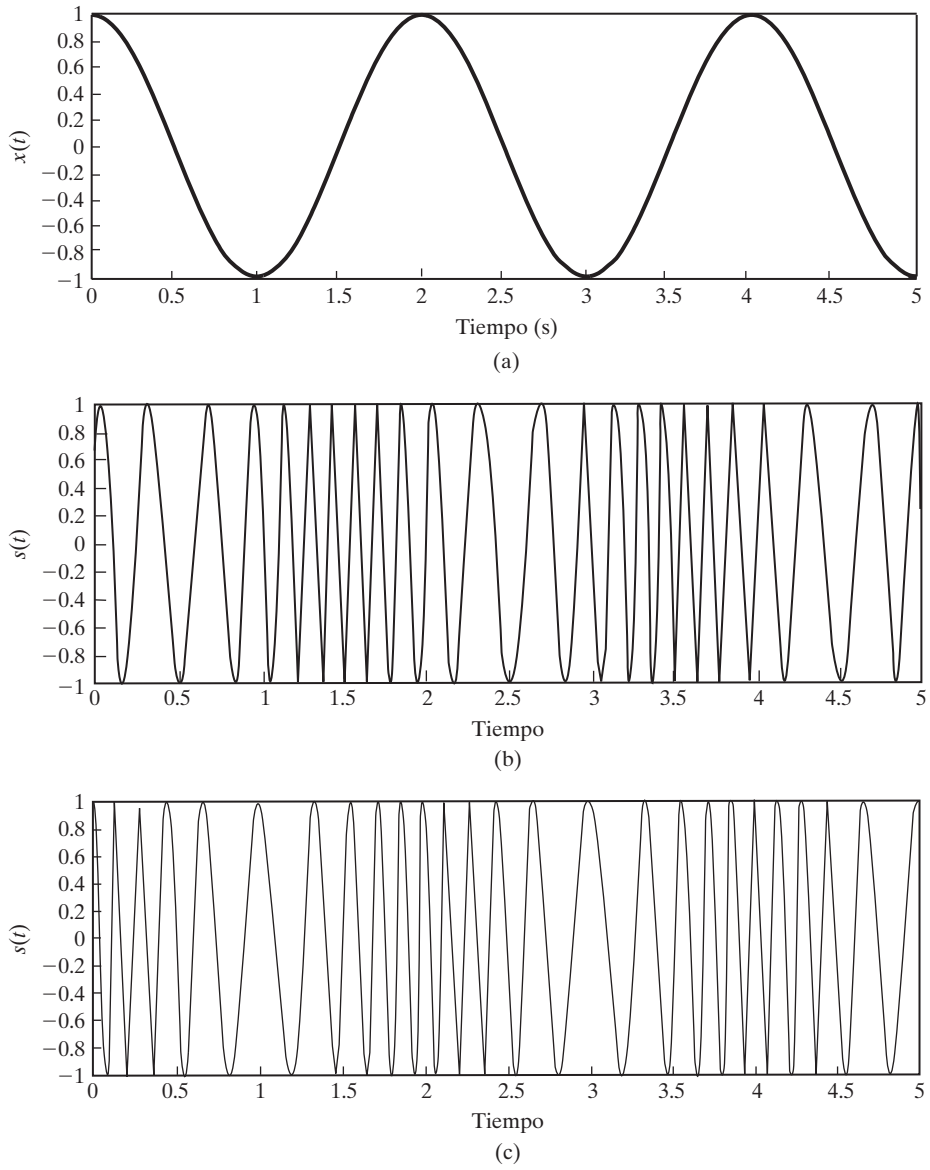



**FIGURA 3.35**
(a) Señal, (b) señal PM, y (c) señal FM del ejemplo 3.21.

do se vuelve un circuito abierto, y el voltaje sobre el capacitor lentamente se descarga a través de la resistencia de carga $R_L$. La descarga continúa hasta que $s(t)$ alcanza un valor que excede el valor del voltaje a través del capacitor, en cuyo momento el capacitor carga nuevamente hasta el valor pico de $s(t)$, y después se repite el proceso. Para garantizar que la carga del capacitor sea lo suficientemente rápida para que el voltaje del capacitor alcance el valor pico de $s(t)$ en cada ciclo, la constante de tiempo de carga debe ser muy pequeña, en

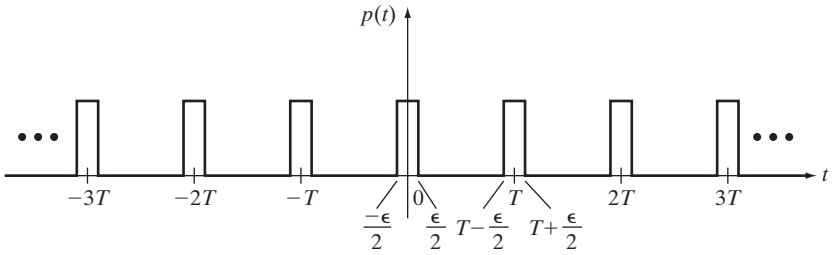



**FIGURA 3.36**
Tren de pulsos con periodo $T$.

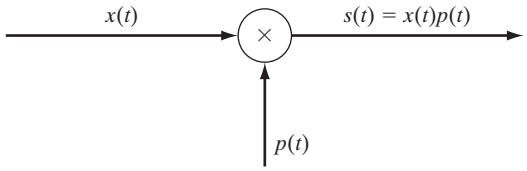



**FIGURA 3.37**
Modulación de amplitud de pulso.

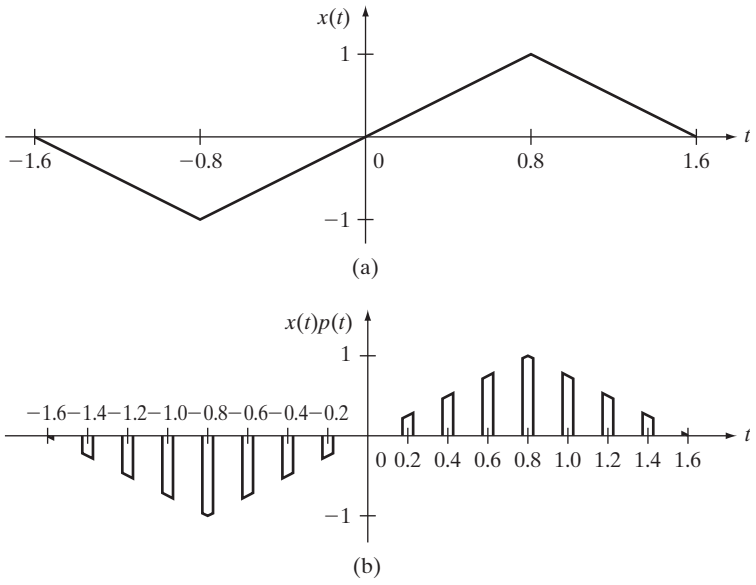



**FIGURA 3.38**
(a) Señal, y (b) señal PAM.

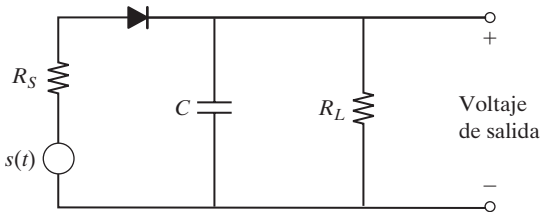



**FIGURA 3.39**
Detector de envolvente.

comparación con el periodo $2\pi/\omega_c$ de la portadora $A\cos(\omega_c t)$. Suponiendo que el diodo tiene cero resistencia en la región de conducción, la constante de tiempo de carga del detector de envolvente es igual a $R_sC$, y entonces se requiere que $R_sC \ll 2\pi/\omega_c$. Además, la constante de tiempo de descarga del detector de envolvente debe ser lo suficientemente grande para garantizar que la descarga del capacitor entre picos positivos de $s(t)$ sea lo suficientemente lenta. La constante de tiempo de descarga es igual a $R_LC$, por lo tanto, debe ser cierto que $R_LC \gg 2\pi/\omega_c$. También debe ser cierto que la constante de tiempo de descarga es pequeña, en comparación con la máxima tasa de cambio de $x(t)$. Si $x(t)$ tiene un ancho de banda $B$, la máxima tasa de cambio de $x(t)$ puede considerarse $2\pi/B$ y, entonces, es necesario que $R_LC \ll 2\pi/B$.

---

**Ejemplo 3.23**

Para el caso $x(t) = \cos(\pi t)$, $\omega_c = 20\pi$, $k = 0.5$, $R_s = 100$ ohms, $C = 10$ microfaradios, y $R_L = 40{,}000$ ohms, la portadora modulada y la salida del detector de envolvente aparecen en la figura 3.40.

---

### 3.8.6 Demodulación de otro tipo de señales

Dejamos el tema de demodulación de señales PM y FM para un estudio más avanzado de sistemas de comunicación. La demodulación de una señal PAM puede realizarse filtrando la señal PAM con filtros pasabajos. El análisis es muy similar a la reconstrucción de una señal a partir de muestras de la señal, lo cual consideramos en la sección 5.4.

## 3.9 RESUMEN DEL CAPÍTULO

Este capítulo explora el análisis del dominio de frecuencia de señales de tiempo continuo. Como explicamos en el capítulo, las señales periódicas pueden representarse como series de Fourier, mientras que la transformada de Fourier se utiliza para señales sin periodo.

Las series de Fourier pueden tener la forma de una serie trigonométrica o de una serie exponencial compleja. La serie trigonométrica puede expresarse como serie de senos o de cosenos,

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \operatorname{sen}(k\omega_0 t)], \quad -\infty < t < \infty$$

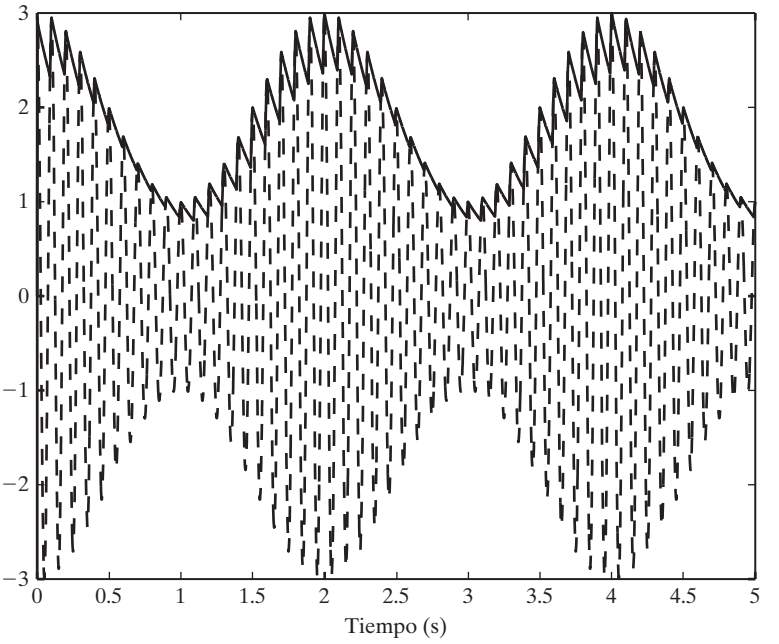



**FIGURA 3.40**
Portadora modulada y salida de un detector de envolvente del ejemplo 3.23.

o como serie de cosenos con fase,

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k), \quad -\infty < t < \infty$$

La serie exponencial compleja de Fourier tiene la forma

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad -\infty < t < \infty$$

En cada una de estas formas de la serie de Fourier, $\omega_0$ representa la frecuencia fundamental de la señal periódica $x(t)$. Cada serie contiene una constante, o cd, término que representa el valor promedio de la señal. Los términos restantes de la serie son los armónicos, es decir, términos con frecuencias que son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental.

El contenido de frecuencia de la señal puede determinarse a partir de las magnitudes y los ángulos de los coeficientes de la serie trigonométrica de cosenos con fase, o de la serie exponencial compleja. Los espectros de línea son gráficas de las magnitudes y los ángulos que parten de la serie exponencial compleja contra las frecuencias correspondientes. Una señal con alto contenido de frecuencia, es decir, de gran magnitud para un término de alta frecuencia en la serie, se ve en el dominio de tiempo como que tiene transiciones rápidas. Entonces, una señal de onda cuadrada tiene un contenido más alto de frecuencia que una

señal de onda triangular con la misma frecuencia fundamental, debido a las discontinuidades de la onda cuadrada.

La transformada de Fourier proporciona el contenido de frecuencia de una señal no periódica, y se define como

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt, \quad -\infty < \omega < \infty$$

El espectro de frecuencia de una señal no periódica contiene un continuo de frecuencias, a diferencia de las series de Fourier, las cuales contienen componentes de frecuencia sólo en las frecuencias armónicas. No toda señal no periódica, como la función escalón unitario, tiene transformada de Fourier. Para manejar estos casos, presentamos una transformada generalizada de Fourier, que arroja una transformada de Fourier que contiene una función impulso $\delta(\omega)$. Esta transformada generalizada es útil también para sinusoides, donde los impulsos se desplazan de $\delta(\omega + \omega_0)$ y $\delta(\omega - \omega_0)$, donde $\omega_0$ es la frecuencia de la sinusoide.

Existen muchas propiedades importantes de la transformada de Fourier, que incluyen la linealidad, desplazamientos en el tiempo, multiplicación por una sinusoide, convolución en el dominio de tiempo, y la dualidad. La multiplicación por una sinusoide, también conocida como modulación de amplitud, da como resultado un espectro de frecuencia que tiene duplicados escalados del espectro de la señal original ubicada en $\pm\omega_c$, donde $\omega_c$ es la frecuencia de la portadora. La amplitud modulada, frecuencia modulada, fase modulada y modulación de la amplitud de pulso son conceptos importantes en el campo de los sistemas de comunicación.

## PROBLEMAS

**3.1.** Cada una de las señales de la figura P3.1 se genera a partir de la suma de sinusoides. Encuentre las frecuencias y las amplitudes de las sinusoides, dibuje el espectro de línea (sólo amplitud) para cada señal.

**3.2.** Usando notación compleja, combine las expresiones para formar un solo sinusoide para cada uno de los casos (a)-(d) (vea el apéndice A).
- **(a)** $2\cos(3t) - \cos(3t - \pi/4)$
- **(b)** $\text{sen}(2t - \pi/4) + 2\cos(2t - \pi/3)$
- **(c)** $\cos(t) - \text{sen}(t)$
- **(d)** $10\cos(\pi t + \pi/3) + 8\cos(\pi t - \pi/3)$

**3.3.** Calcule la serie trigonométrica de Fourier (seno/coseno) para cada una de las señales periódicas de la figura P3.3. Cuando sea posible, utilice la simetría par o impar.

**3.4.** Exprese cada una de las series trigonométricas de Fourier del problema 3.3, en forma de la fase de coseno.

**3.5.** Demuestre las fórmulas (3.13) y (3.14) para las funciones $x(t)$ y $v(t)$, que son funciones pares o impares de $t$.

**3.6.** Exprese los siguientes términos en notación polar:
- **(a)** $e^{j\pi/4} + e^{-j\pi/8}$
- **(b)** $(2 + 5j)e^{j10}$
- **(c)** $e^{j2} + 1 + j$
- **(d)** $1 + e^{j4}$
- **(e)** $e^{j(\omega t + \pi/2)} + e^{j(\omega t - \pi/3)}$

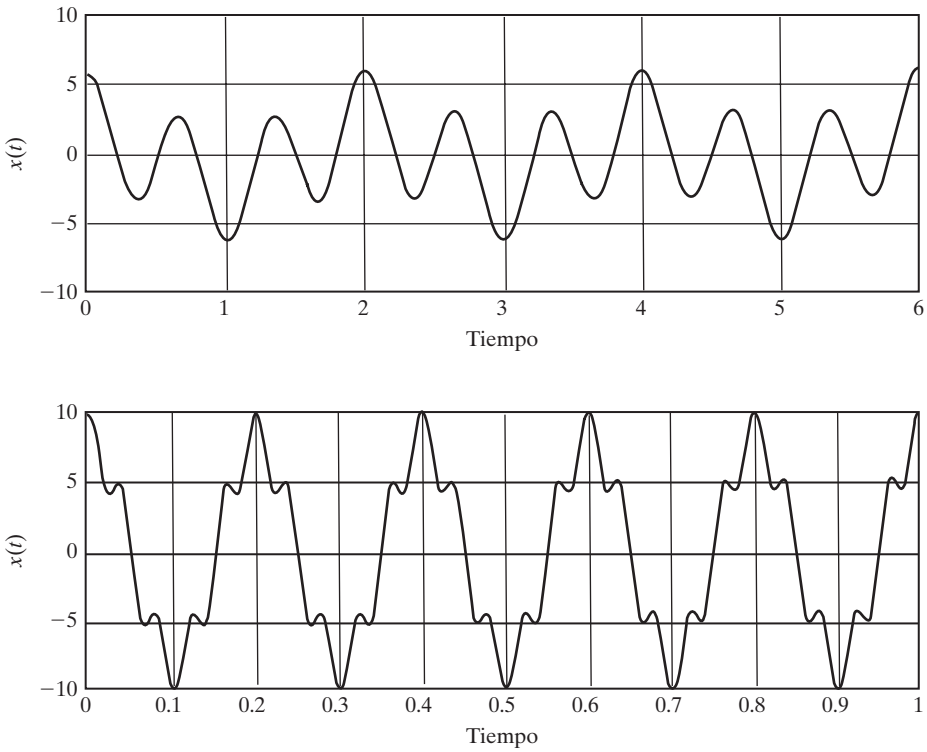



**FIGURA P3.1**

**3.7.** Utilice MATLAB para graficar las señales dadas en el problema 3.2 y verifique la expresión derivada en dicho problema.

**3.8.** A partir de las series trigonométricas de Fourier dadas por (3.4) a (3.6), deduzca las fórmulas (3.20) y (3.21) para la forma exponencial compleja de las series de Fourier.

**3.9.** Para cada una de las señales de la figura P3.9, haga lo siguiente:
- **(a)** Calcule las series trigonométrica y exponencial compleja de Fourier. Es probable que le convenga utilizar Symbolic Math Toolbox de MATLAB, para calcular los coeficientes.
- **(b)** Con la ayuda de MATLAB, calcule y grafique la serie exponencial truncada para $N = 3, 10$ y $30$, cuando $T = 2$ y $a = 0.5$.
- **(c)** Repita el inciso (b), utilizando la serie trigonométrica truncada, y compare su respuesta con el inciso (b).

**3.10.** Para cada una de las señales periódicas que aparecen en la figura P3.3, haga lo siguiente:
- **(i)** Calcule la serie exponencial compleja de Fourier. Probablemente le convenga utilizar Symbolic Math Toolbox de MATLAB para calcular los coeficientes.
- **(ii)** Esquematice los espectros de amplitud y de fase para $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$.
- **(iii)** Grafique la serie exponencial compleja para $N = 1$, $N = 5$, y $N = 30$.

**3.11.** Para cada una de las siguientes señales, calcule la serie exponencial compleja de Fourier, utilizando identidades trigonométricas y después esquematice los espectros de amplitud y de fase para todos los valores de $k$.
- **(a)** $x(t) = \cos(5t - \pi/4)$
- **(b)** $x(t) = \operatorname{sen} t + \cos t$

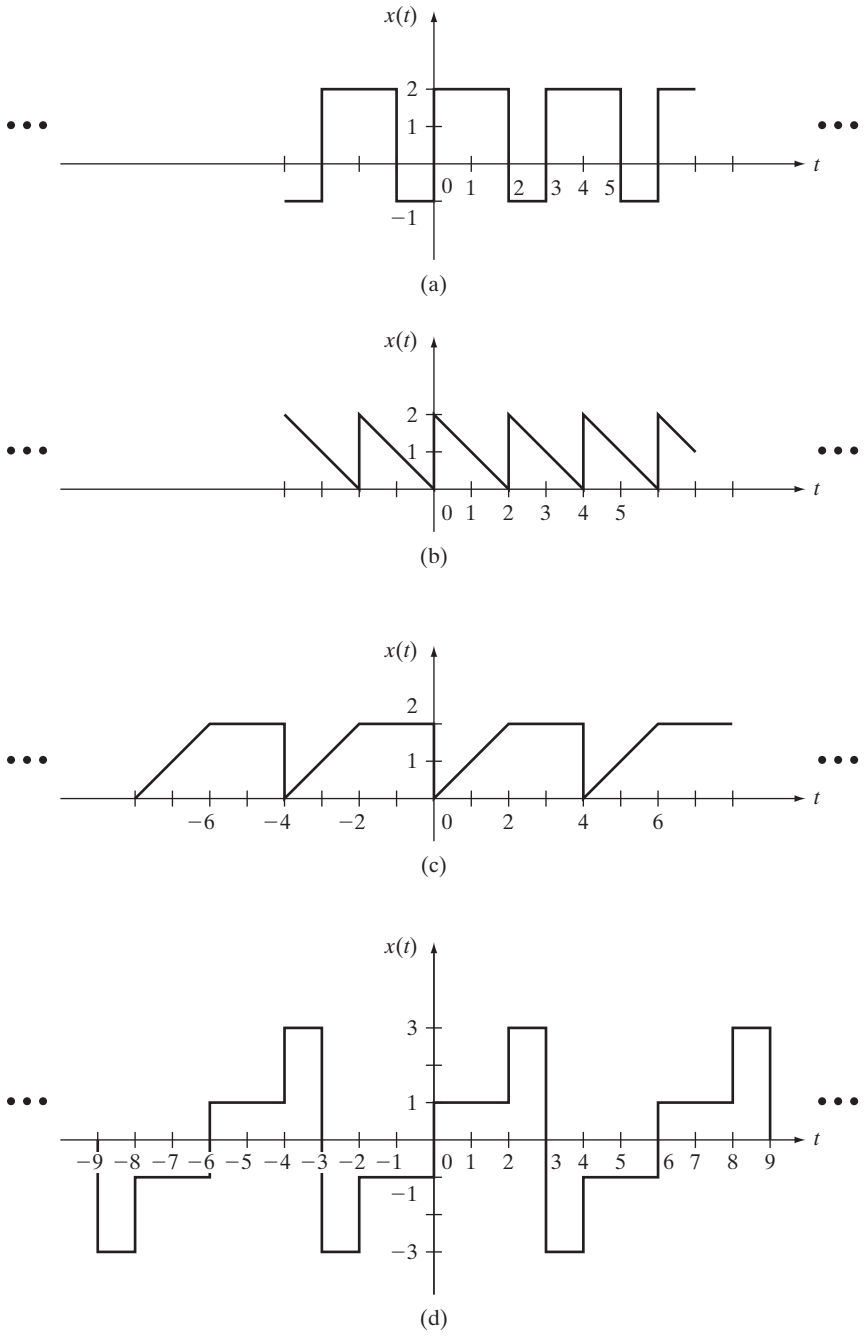

x(t)
2
1
−1
0 1 2 3 4 5
t
(a)
x(t)
2
1
0 1 2 3 4 5
t
(b)
x(t)
2
1
−6 −4 −2 0 2 4 6
t
(c)
x(t)
3
1
−1
−3
−9 −8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
t
(d)

**FIGURA P3.3**

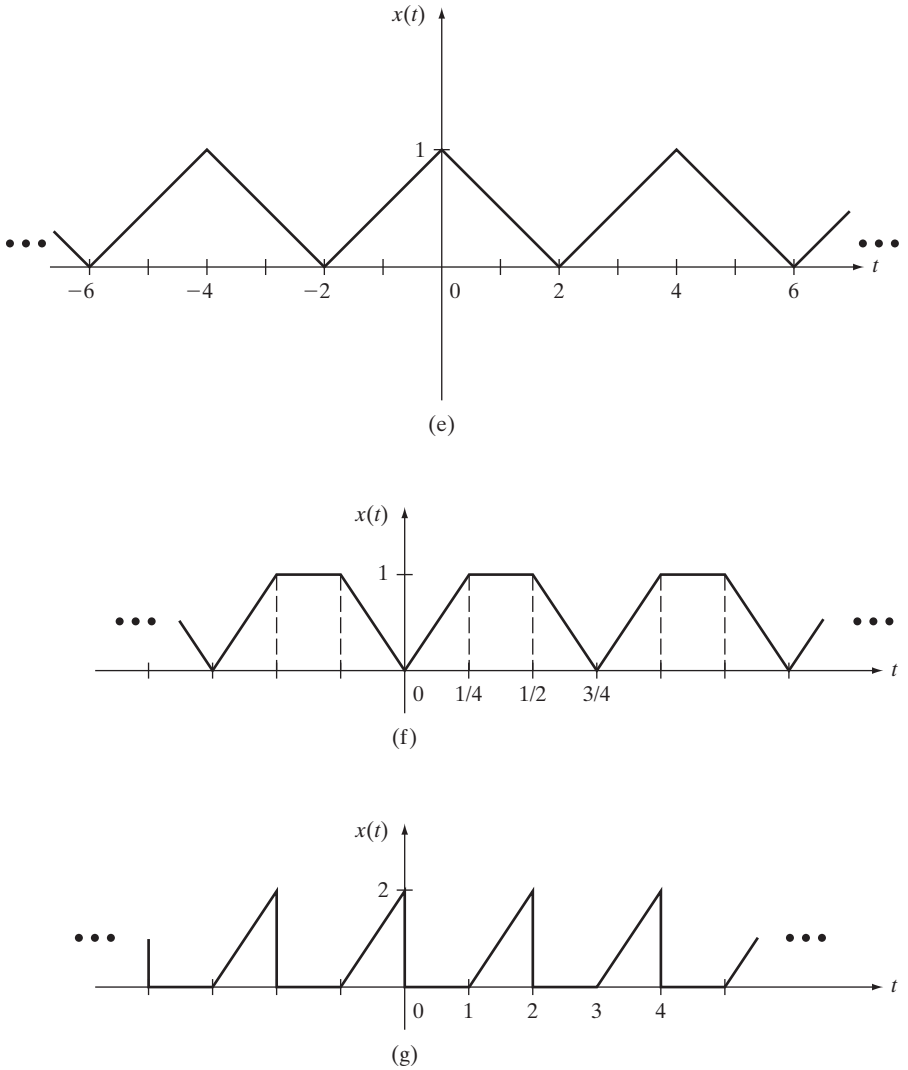



**FIGURA P3.3** *(Continuación)*

**(c)** $x(t) = \cos(t - 1) + \operatorname{sen}\left(t - \frac{1}{2}\right)$
**(d)** $x(t) = \cos 2t \operatorname{sen} 3t$
**(e)** $x(t) = \cos^2 5t$
**(f)** $x(t) = \cos 3t + \cos 5t$

**3.12.** Determine la serie exponencial de Fourier para las siguientes señales periódicas:

**(a)** $x(t) = \dfrac{\operatorname{sen} 2t + \operatorname{sen} 3t}{2 \operatorname{sen} t}$

**(b)** $x(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$

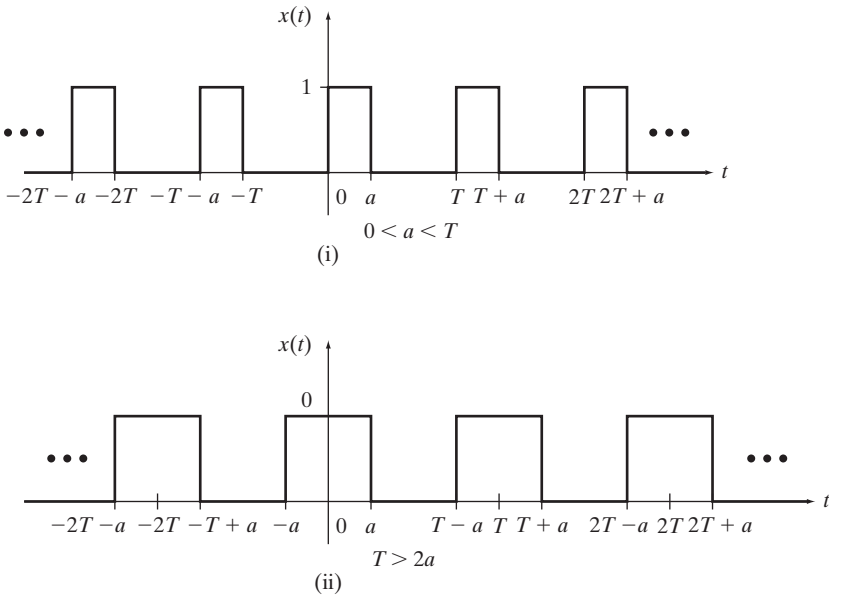



**FIGURA P3.9**

**3.13.** Una señal periódica con periodo $T$, tiene coeficientes de Fourier $c_k^x$; es decir,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^x \exp(jk\omega_0 t), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad -\infty < t < \infty$$

Calcule los coeficientes de Fourier $c_k^y$ para la señal periódica $v(t)$, donde

**(a)** $v(t) = x(t - 1)$

**(b)** $v(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$

**(c)** $v(t) = x(t) \exp[j(2\pi/T)t]$

**(d)** $v(t) = x(t) \cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)$

**3.14.** La deducción de la serie exponencial compleja de Fourier utiliza *funciones base ortogonal*, las cuales son un conjunto de funciones de tiempo, $\phi_k(t)$, tal que lo siguiente se mantiene sobre cierto tiempo especificado $T$:

$$\int_T \overline{\phi_k(t)}\phi_m(t)\, dt = 0$$

para toda $k$ y $m$, tal que $k \neq m$.

**(a)** Demuestre que $\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$ para $k = 0, \pm 1, +2, \pm 3, \ldots$ son funciones base ortogonal, sobre el intervalo de tiempo $T = 2\pi/\omega_0$.

**(b)** Suponga que $x(t)$ es periódica, con periodo $T = 2\pi/\omega_0$. Aproxime $x(t)$ mediante su serie de Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

Utilizando la idea de las funciones base ortogonal, deduzca la expresión para $c_k$ dada en (3.21). [*Pista*: para deducir (3.21), multiplique ambos lados de la serie de Fourier por $e^{jk\omega_0 t}$, e integre sobre $T$].

**3.15.** Sea

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{y} \quad g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{jk\omega_0 t}$$

la expansión de la serie de Fourier para $f(t)$ y $g(t)$. Diga si lo siguiente es verdadero o falso: si $f_k = g_k$ para toda $k$, entonces $f(t) = g(t)$ para toda $t$. Justifique su respuesta, a través de un contraejemplo, si la afirmación es falsa, o demostrando que la afirmación es verdadera.

**3.16**. Utilizando la transformada de Fourier, determine la serie exponencial compleja de las señales periódicas de la figura P3.16.

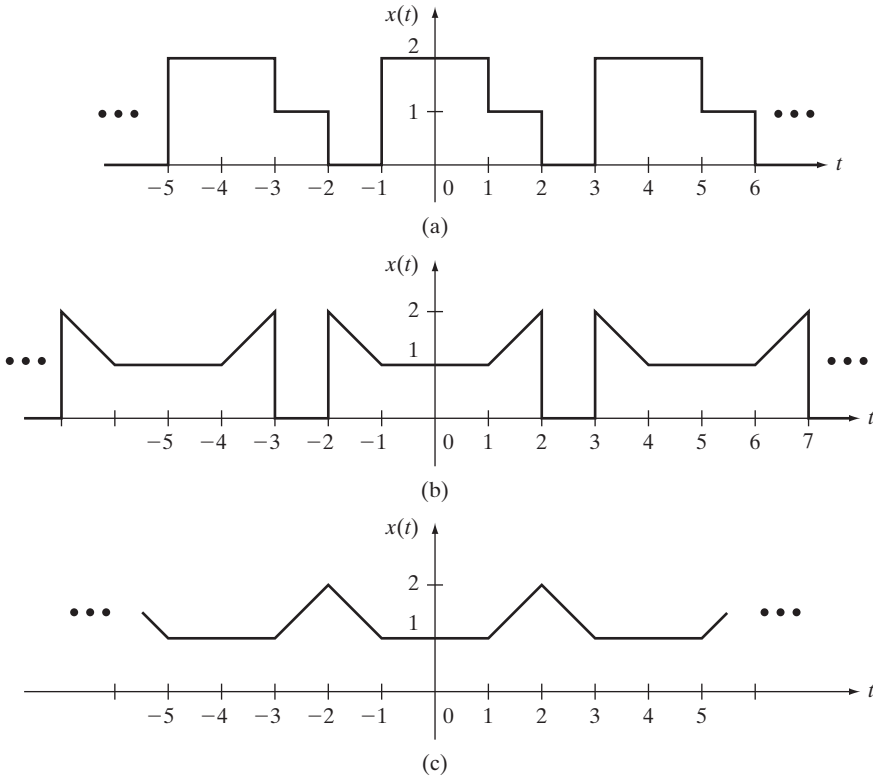



**FIGURA P3.16**

**3.17.** Calcule la transformada de Fourier de las siguientes señales, utilizando el manipulador simbólico para realizar las integraciones. En cada caso, grafique la señal $x(t)$ y la magnitud $|X(\omega)|$ de la transformada de Fourier.

**(a)** $x(t) = 2e^{-4t}\cos(10t)u(t)$
**(b)** $x(t) = 2e^{-4t}\,\text{sen}(10t)u(t)$
**(c)** $x(t) = 2te^{-2t}u(t)$
**(d)** $x(t) = e^{-t}(\cos 5t + \cos 30t)u(t)$

**3.18.** Relacione las señales de la figura P3.18 con sus respectivos espectros de amplitud, los cuales se encuentran en la segunda parte de la figura P3.18.

**3.19.** Calcule la transformada de Fourier de las señales que aparecen en la figura P3.19, pero primero exprese $x(t)$ en términos de funciones pulso rectangular y pulso triangular. Grafique la magnitud y fase de la transformada de Fourier.

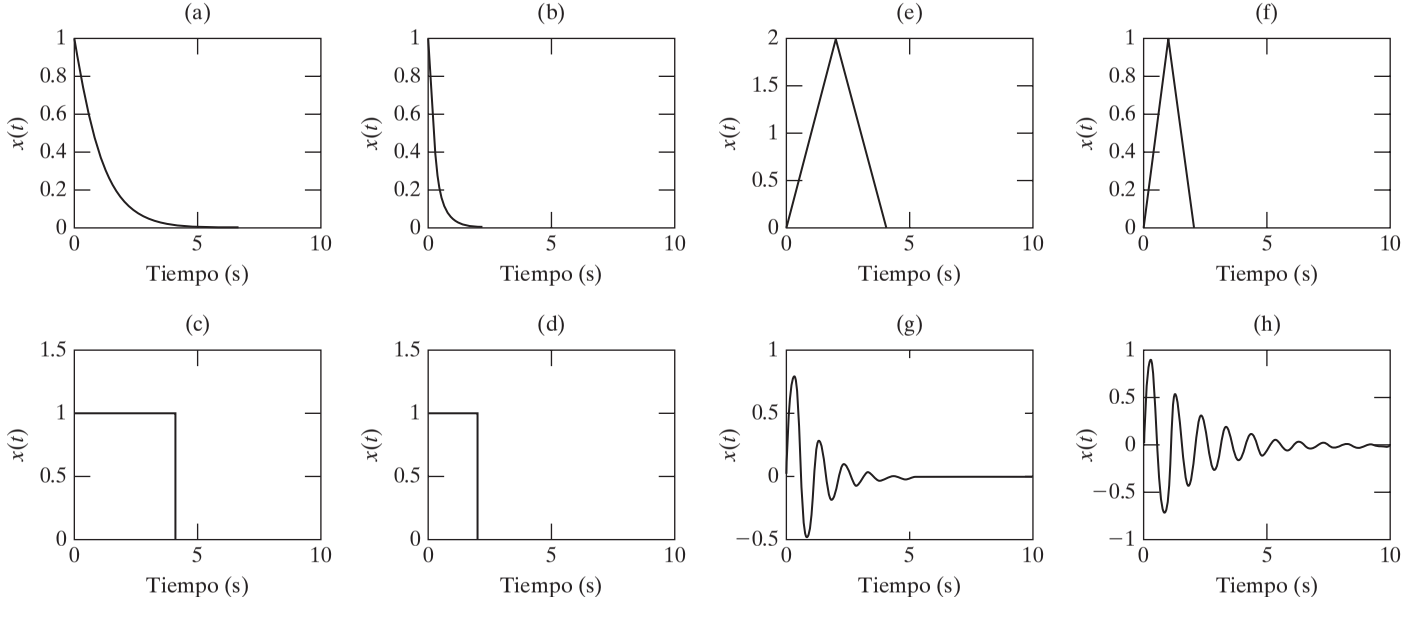



**FIGURA P3.18 Parte 1**

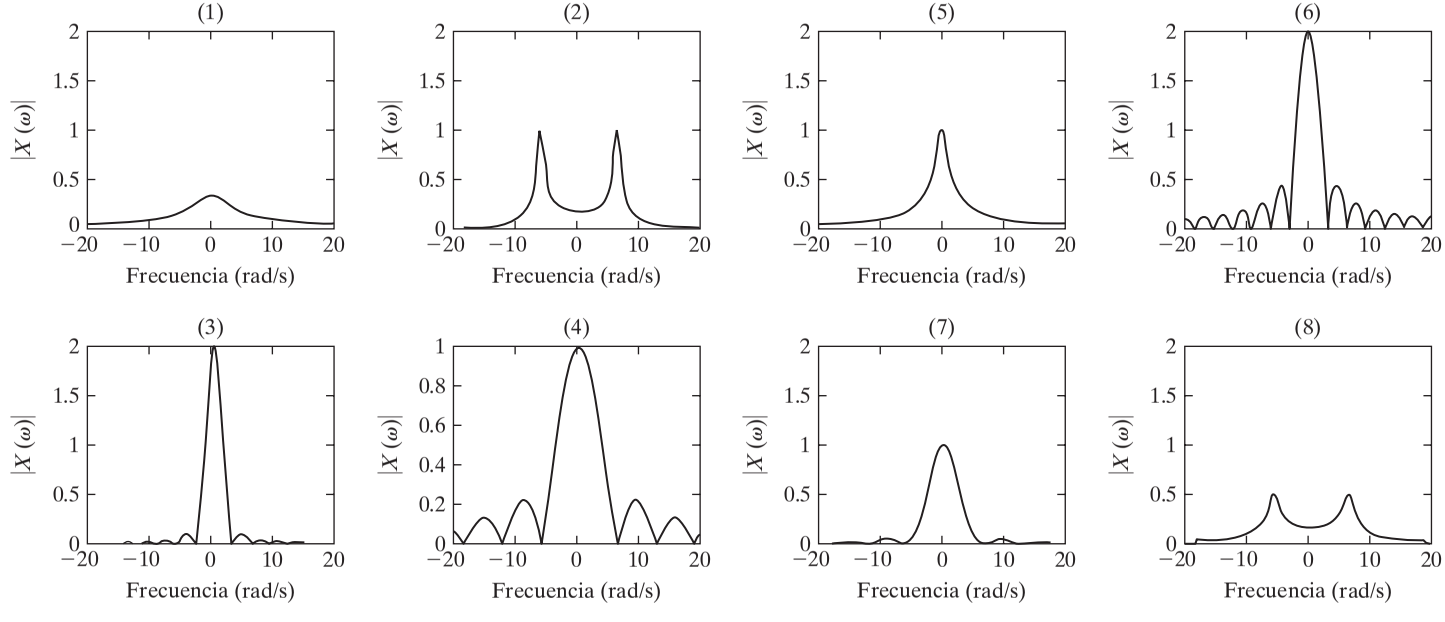



**FIGURA P3.18 Parte 2**

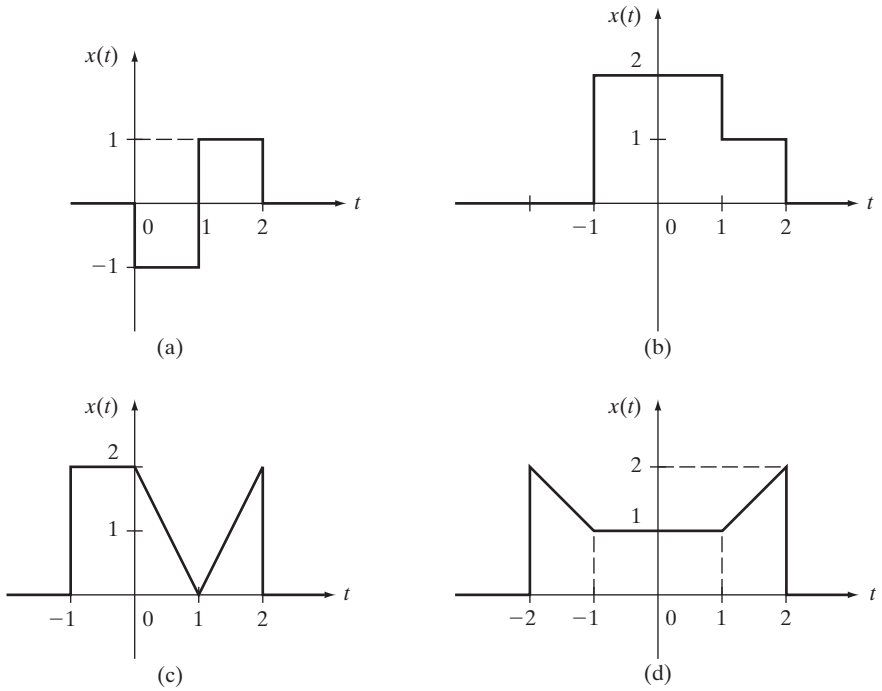



**FIGURA P3.19**

**3.20.** Calcule la transformada de Fourier de las señales que aparecen en la figura P3.20. Grafique la magnitud y fase de la transformada. Utilice el manipulador simbólico para realizar las integraciones, o para verificar las respuestas.

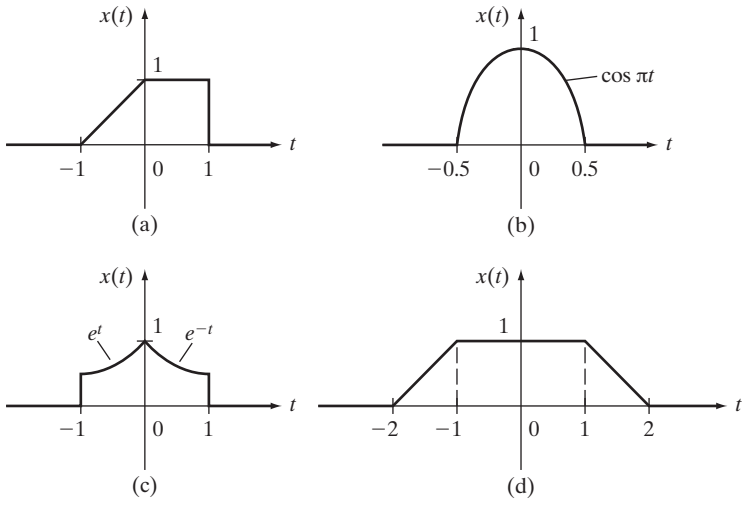



**FIGURA P3.20**

**3.21.** Calcule la transformada inversa de Fourier de las funciones de frecuencia $X(\omega)$ que muestra la figura P3.21.

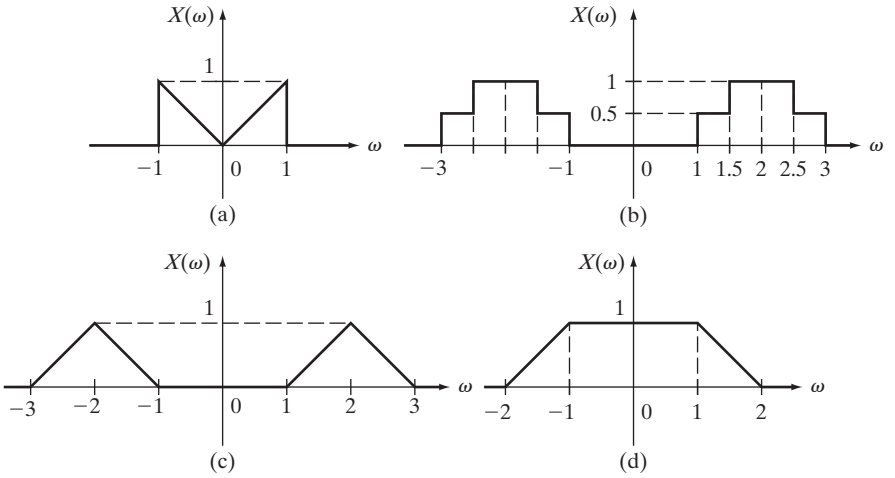



**FIGURA P3.21**

**3.22.** Calcule la transformada inversa de Fourier de las siguientes funciones de frecuencia:

**(a)** $X(\omega) = \cos(4\omega), -\infty < \omega < \infty$

**(b)** $X(\omega) = \text{sen}^2(3\omega), -\infty < \omega < \infty$

**(c)** $X(\omega) = p_4(\omega)\cos\dfrac{\pi\omega}{2}$

**(d)** $X(\omega) = \dfrac{\text{sen}(\omega/2)}{j\omega + 2}e^{-j\omega 2}, -\infty < \omega < \infty$

**3.23.** Una señal $x(t)$ tiene la transformada de Fourier

$$X(\omega) = \frac{1}{j}\left[\text{arcsen}\left(\frac{2\omega}{\pi} - \frac{1}{2}\right) - \text{arcsen}\left(\frac{2\omega}{\pi} + \frac{1}{2}\right)\right]$$

**(a)** Calcule $x(t)$.

**(b)** Sea $x_p(t)$ quien denote a la señal periódica definida por

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - 16k)$$

Calcule la transformada de Fourier $X_p(\omega)$ de $x_p(t)$.

**3.24.** Una señal de tiempo continuo $x(t)$ tiene la transformada de Fourier

$$X(\omega) = \frac{1}{j\omega + b}$$

donde $b$ es una constante. Determine la transformada de Fourier $V(\omega)$ de las siguientes señales:

**(a)** $v(t) = x(5t - 4)$

**(b)** $v(t) = t^2x(t)$

**(c)** $v(t) = x(t)e^{j2t}$
**(d)** $v(t) = x(t)\cos 4t$
**(e)** $v(t) = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$
**(f)** $v(t) = x(t) * x(t)$
**(g)** $v(t) = x^2(t)$
**(h)** $v(t) = \dfrac{1}{jt - b}$

**3.25.** Utilizando las propiedades de la transformada de Fourier, calcule la transformada de las siguientes señales:
**(a)** $x(t) = (e^{-t}\cos 4t)u(t)$
**(b)** $x(t) = te^{-t}u(t)$
**(c)** $x(t) = (\cos 4t)u(t)$
**(d)** $x(t) = e^{-|t|}, -\infty < t < \infty$
**(e)** $x(t) = e^{-t^2}, -\infty < t < \infty$

**3.26.** Para las transformadas de Fourier $X(\omega)$ que aparecen en la figura P3.26, ¿cuáles son las características de $x(t)$ (es decir, es valuada en reales, en complejos, es par, impar)? Calcule $x(0)$.

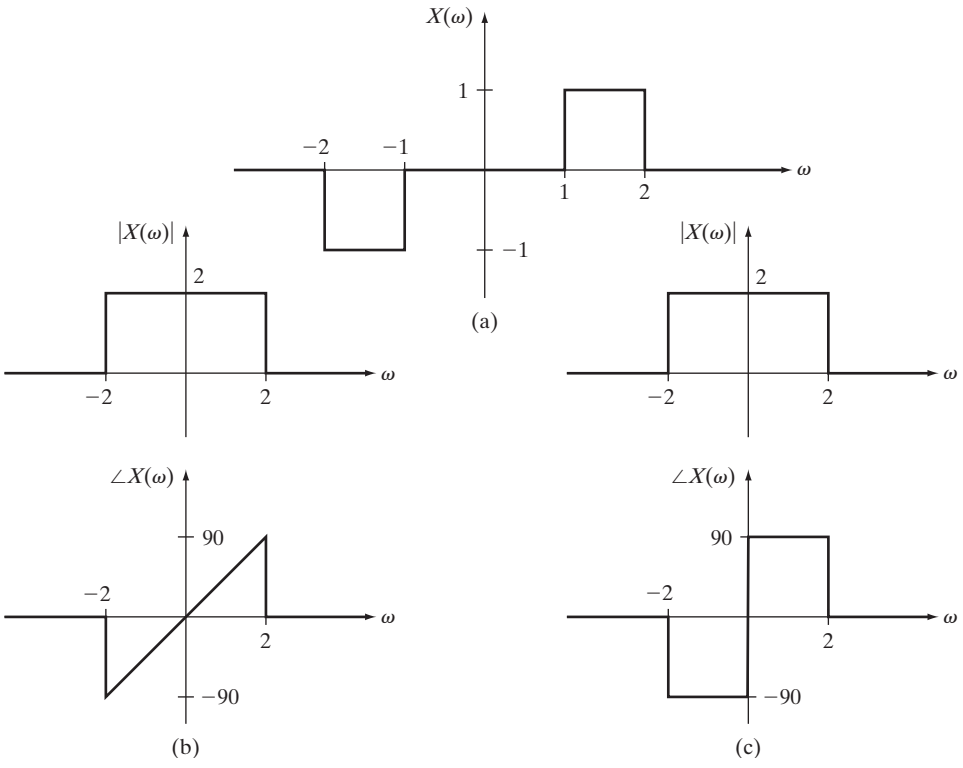



**FIGURA P3.26**

**3.27.** Las transformadas de Fourier de $x(t)$ y $v(t)$ se definen de la siguiente manera:

$$X(\omega) = \begin{cases} 2, & |\omega| < \pi \\ 0, & \text{de otra forma} \end{cases}$$

$$V(\omega) = X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)$$

**(a)** Encuentre $x(t)$ en forma cerrada.
**(b)** Encuentre $v(t)$ en forma cerrada.

**3.28.** Calcule la transformada generalizada de Fourier de las siguientes señales:
**(a)** $x(t) = 1/t, -\infty < t < \infty$
**(b)** $x(t) = 1 + 2e^{-j\frac{2}{\pi}t} + 2e^{j2\pi t}, -\infty < t < \infty$
**(c)** $x(t) = 3\cos t + 2\,\text{sen}\,2t, -\infty < t < \infty$
**(d)** $x(t) = (2 + 3\cos(\pi t - \pi/4))u(t)$
**(e)** $x(t)$ como se muestra en la figura P3.9.

**3.29.** Esquematice las funciones magnitud de la transformada de Fourier de las señales de amplitud modulada (a)-(e). Identifique valores importantes en los ejes.
**(a)** $x(t) = (e^{-10t}u(\text{t}))\cos(100t)$
**(b)** $x(t) = (1 - |t|)p_2(t)\cos(10t)$
**(c)** $x(t) = p_2(t)\cos(10t)$
**(d)** $x(t) = 2\,\text{arcsen}^2\left(\frac{t}{2\pi}\right)\cos(10t)$
**(e)** $x(t) = 4\cos(10t)\cos(100t)$

**3.30.** Genere una gráfica en MATLAB de la salida del detector envolvente para el caso en que $x(t) = \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right), \omega_c = 30\pi, k = 0.5, R_s = 100$ ohms, $C = 5$ microfaradios, y $R_L = 50{,}000$ ohms.

CAPÍTULO

4

# Análisis de Fourier de las señales de tiempo discreto

En este capítulo presentamos la contraparte de la teoría de Fourier que desarrollamos en el capítulo 3. Esta presentación comienza en la sección 4.1 con el estudio de la transformada de Fourier de tiempo discreto (DTFT), que es la contraparte de tiempo discreto de la transformada de Fourier. Como en el caso de la transformada de una señal de tiempo continuo, la DTFT de una señal de tiempo discreto es una función continua de frecuencias, pero a diferencia del caso de tiempo continuo, la DTFT siempre es una función periódica con periodo $2\pi$.

En la sección 4.2 definimos la transformada de una señal de tiempo discreto, la cual es función de un número finito de frecuencias. Esta transformada se conoce como transformada discreta de Fourier (DFT). Para las señales de tiempo discreto limitadas en el tiempo, demostramos que la DFT es igual a la DTFT, con la variable frecuencia evaluada en un número finito de puntos. Por lo tanto, la DFT puede considerarse como una "discretización en frecuencia" de la DTFT. Debido a que la DFT es una función de un número finito de frecuencias, es la transformada la que generalmente se utiliza en la práctica. En particular, la DFT se usa bastante en el procesamiento de señales digitales y en comunicaciones digitales.

En la sección 4.3 estudiamos las DFT de señales truncadas (que corresponden a un conjunto dado de valores de datos) y después, en la sección 4.4, proporcionamos un método rápido para calcular la DFT, conocido como algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT). Mostramos cómo utilizar el algoritmo FFT para calcular la transformada de Fourier de una señal de tiempo continuo, y para calcular la convolución de dos señales de tiempo discreto. En la sección 4.5 la transformada discreta de Fourier se aplica al análisis de datos, con enfoque en la extracción de una señal incrustada en ruido, el análisis de información sobre manchas solares que puede descargarse de la Web, y el análisis de información sobre el precio de acciones. La sección 4.6 contiene un resumen del capítulo.

## 4.1 TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO

En la sección 3.4 definimos la transformada de Fourier $X(\omega)$ de una señal de tiempo continuo como

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt \tag{4.1}$$

Dada una señal de tiempo discreto $x[n]$, la transformada de Fourier de tiempo discreto DTFT de $x[n]$ se define como

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \tag{4.2}$$

La DTFT $X(\Omega)$ definida por (4.2) es, en general, una función valuada en complejos de la variable real $\Omega$ (la variable frecuencia). Observe que (4.2) es una contraparte natural de tiempo discreto de (4.1), donde la integral se reemplaza por una sumatoria. La omega mayúscula ($\Omega$) se utiliza para que la variable frecuencia distinga entre los casos de tiempo continuo y de tiempo discreto.

Se dice que una señal de tiempo discreto $x[n]$ tiene una DTFT en el *sentido ordinario*, si la suma bi-infinita (4.2) converge (es decir, si es finita) para todos los valores reales de $\Omega$. Una condición suficiente para que $x[n]$ tenga una DTFT en el sentido ordinario es que sea posible sumar completamente a $x[n]$; es decir,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \tag{4.3}$$

Si $x[n]$ es una señal de tiempo discreto limitada en el tiempo (es decir, existe un entero positivo $N$, tal que $x[n] = 0$ para toda $n \leq -N$ y $n \geq N$), entonces, obviamente la suma en (4.3) es finita, y por lo tanto cualquier señal como ésta tiene una DTFT en el sentido ordinario.

---

**Ejemplo 4.1 Cálculo de la DTFT**

Considere la señal de tiempo discreto $x[n]$ definida por

$$x[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ a^n, & 0 \leq n \leq q \\ 0, & n > q \end{cases}$$

donde $a$ es un número real constante diferente de cero, y $q$ es un entero positivo. Esta señal es claramente limitada en el tiempo y, por lo tanto, tiene una DTFT en el sentido ordinario. Para calcular la DTFT, sustituya $x[n]$ en (4.2), lo cual arroja

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \sum_{n=0}^{q} a^n e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{q} (ae^{-j\Omega})^n \end{aligned} \tag{4.4}$$

Esta sumatoria puede escribirse en "forma cerrada", mediante la relación

$$\sum_{n=q_1}^{q_2} r^n = \frac{r^{q_1} - r^{q_2+1}}{1 - r} \tag{4.5}$$

donde $q_1$ y $q_2$ son enteros con $q_2 > q_1$, y $r$ es un número real o complejo. (En el problema 4.2 pedimos al lector que demuestre (4.5).) Después, utilizando (4.5) con $q_1 = 0, q_2 = q$ y $r = ae^{-j\Omega}$, podemos escribir (4.4) de la forma

$$X(\Omega) = \frac{1 - (ae^{-j\Omega})^{q+1}}{1 - ae^{-j\Omega}} \tag{4.6}$$

---

Para cualquier señal de tiempo discreto $x[n]$, la DTFT $X(\Omega)$ es una función periódica de $\Omega$, con periodo $2\pi$, es decir,

$$X(\Omega + 2\pi) = X(\Omega) \text{ para toda } \Omega, -\infty < \Omega < \infty$$

Para demostrar la propiedad de periodicidad, observe que

$$\begin{aligned} X(\Omega + 2\pi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn(\Omega+2\pi)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\Omega}e^{-jn2\pi} \end{aligned}$$

Pero

$$e^{-jn2\pi} = 1 \text{ para todos los enteros } n$$

y, por lo tanto,

$$X(\Omega + 2\pi) = X(\Omega) \text{ para toda } \Omega$$

Una consecuencia importante de la periodicidad $X(\Omega)$ es que $X(\Omega)$ se determina completamente por el cálculo de $X(\Omega)$ sobre cualquier intervalo $2\pi$, tal como $0 \leq \Omega \leq 2\pi$, o $-\pi \leq \Omega \leq \pi$.

Dada la señal de tiempo discreto $x[n]$ con DTFT $X(\Omega)$, debido a que $X(\Omega)$ en general es valuada en complejos, $X(\Omega)$ puede expresarse en forma rectangular o polar. Si utilizamos la fórmula de Euler obtenemos la siguiente forma rectangular de $X(\Omega)$:

$$X(\Omega) = R(\Omega) + jI(\Omega) \tag{4.7}$$

Aquí, $R(\Omega)$ e $I(\Omega)$ son funciones de $\Omega$ valuadas en reales, dadas por

$$R(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cos n\Omega$$

$$I(\Omega) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \operatorname{sen} n\Omega$$

La forma polar de $X(\Omega)$ es

$$X(\Omega) = |X(\Omega)| \exp[j\angle X(\Omega)] \tag{4.8}$$

donde $|X(\Omega)|$ es la magnitud de $X(\Omega)$ y $\angle X(\Omega)$ es el ángulo de $X(\Omega)$. Observe que, debido a que $X(\Omega)$ es periódica con periodo $2\pi$, tanto $|X(\Omega)|$ como $\angle X(\Omega)$ son periódicas con periodo $2\pi$. Por ello, tanto $|X(\Omega)|$ como $\angle X(\Omega)$ necesitan ser especificadas sólo sobre cierto intervalo de longitud $2\pi$, tal como $0 \leq \Omega \leq 2\pi$ o $-\pi \leq \Omega \leq \pi$.

Si asumimos que $x[n]$ es valuada en reales, la función magnitud $|X(\Omega)|$ es una función par de $\Omega$, y la función ángulo $X(\Omega)$ es una función impar de $\Omega$; es decir,

$$|X(-\Omega)| = |X(\Omega)| \quad \text{para toda } \Omega \tag{4.9}$$

$$\angle X(-\Omega) = -\angle X(\Omega) \quad \text{para toda } \Omega \tag{4.10}$$

Para verificar (4.9) y (4.10), primero sustituya $\Omega$ por $-\Omega$ en (4.2), lo cual resulta en

$$\begin{aligned} X(-\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j\Omega n} \\ &= \overline{X(\Omega)} \end{aligned} \tag{4.11}$$

donde $\overline{X}(\overline{\Omega})$ es el complejo conjugado de $X(\Omega)$. Ahora, al sustituir $\Omega$ por $-\Omega$ en la forma polar (4.8) obtenemos

$$X(-\Omega) = |X(-\Omega)| \exp[j\angle X(-\Omega)] \tag{4.12}$$

y si tomamos el complejo conjugado de ambos lados de (4.8), obtenemos

$$\overline{X(\Omega)} = |X(\Omega)| \exp[-j\angle X(\Omega)] \tag{4.13}$$

Por último, al combinar (4.11)-(4.13), obtenemos

$$|X(-\Omega)| \exp[j\angle X(-\Omega)] = |X(\Omega)| \exp[-j\angle X(\Omega)]$$

Por lo tanto, debe ser cierto que

$$|X(-\Omega)| = |X(\Omega)|$$

y

$$\angle X(-\Omega) = -\angle X(\Omega)$$

lo cual demuestra (4.9) y (4.10).

Observe que como un resultado de la simetría par de $|X(\Omega)|$ y de la simetría impar de $\angle X(\Omega)$, la magnitud $|X(\Omega)|$ y fase $\angle X(\Omega)$ deben graficarse sólo sobre el intervalo $0 \leq \Omega \leq \pi$.

Si la DTFT está dada en la forma rectangular (4.7), es posible generar la forma polar (4.8) mediante las relaciones

$$|X(\Omega)| = \sqrt{R^2(\Omega) + I^2(\Omega)} \tag{4.14}$$

$$\angle X(\Omega) = \begin{cases} \tan^{-1}\dfrac{I(\Omega)}{R(\Omega)} \text{ cuando } R(\Omega) \geq 0 \\ \pi + \tan^{-1}\dfrac{I(\Omega)}{R(\Omega)} \text{ cuando } R(\Omega) < 0 \end{cases} \tag{4.15}$$

---

### Ejemplo 4.2 Formas rectangular y polar

Considere la señal de tiempo discreto $x[n] = a^n u[n]$, donde $a$ es una constante real diferente de cero, y $u[n]$ es la función de tiempo discreto escalón unitario. Para el caso $a = 0.5$, la señal aparece en la figura 4.1. La señal $x[n] = a^n u[n]$ es igual a la señal del ejemplo 4.1 en el límite, cuando $q \to \infty$. Por lo tanto, la DTFT $X(\Omega)$ de $x[n]$ es igual al límite, cuando $q \to \infty$, de la DTFT de la señal del ejemplo 4.1. Es decir, si utilizamos (4.6), encontramos que la DTFT es

$$X(\Omega) = \lim_{q\to\infty} \frac{1 - (ae^{-j\Omega})^{q+1}}{1 - ae^{-j\Omega}}$$

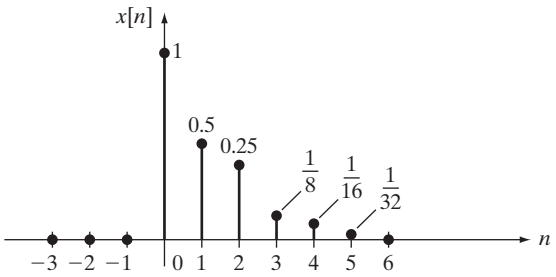



**FIGURA 4.1**
La señal $x[n] = (0.5)^n u[n]$.

Ahora, el límite anterior existe si y sólo si $|a| < 1$, en cuyo caso

$$\lim_{q\to\infty} (ae^{-j\Omega})^{q+1} = 0$$

Por lo tanto, cuando $|a| < 1$, la señal $x[n] = a^n u[n]$ tiene una DTFT en el sentido ordinario, dada por

$$X(\Omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} \tag{4.16}$$

Cuando $|a| \geq 1$, $x[n] = a^n u[n]$ no tiene una DTFT en el sentido ordinario.

Para expresar la DTFT dada por (4.16) en forma rectangular, primero multiplique el lado derecho de (4.16) por $[1 - a \exp(j\Omega)]/[1 - a \exp(j\Omega)]$, lo cual arroja

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \frac{1 - ae^{j\Omega}}{(1 - ae^{-j\Omega})(1 - ae^{j\Omega})} \\ &= \frac{1 - ae^{j\Omega}}{1 - a(e^{-j\Omega} + e^{j\Omega}) + a^2} \end{aligned}$$

Si utilizamos la fórmula de Euler vemos que $X(\Omega)$ se vuelve

$$X(\Omega) = \frac{1 - a\cos\Omega - ja\,\text{sen}\,\Omega}{1 - 2a\cos\Omega + a^2}$$

y por lo tanto, la forma rectangular de $X(\Omega)$ es

$$X(\Omega) = \frac{1 - a\cos\Omega}{1 - 2a\cos\Omega + a^2} + j\frac{-a\,\text{sen}\,\Omega}{1 - 2a\cos\Omega + a^2} \tag{4.17}$$

Para calcular la forma polar de $X(\Omega)$, primero tome la magnitud de ambos lados de (4.16), lo cual arroja

$$\begin{aligned} |X(\Omega)| &= \frac{1}{|1 - ae^{-j\Omega}|} \\ &= \frac{1}{|1 - a\cos\Omega + ja\,\text{sen}\,\Omega|} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1 - a\cos\Omega)^2 + a^2\,\text{sen}^2\,\Omega}}$$

$$|X(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a\cos\Omega + a^2}}$$

Por último, si tomamos el ángulo del lado derecho de (4.16), obtenemos

$$\begin{aligned}\angle X(\Omega) &= -\angle(1 - ae^{-j\Omega}) \\ &= -\angle(1 - a\cos\Omega + ja\,\text{sen}\,\Omega) \\ &= \begin{cases} -\tan^{-1}\dfrac{a\,\text{sen}\,\Omega}{1 - a\cos\Omega} \text{ cuando } 1 - a\cos\Omega \geq 0 \\ \pi - \tan^{-1}\dfrac{a\,\text{sen}\,\Omega}{1 - a\cos\Omega} \text{ cuando } 1 - a\cos\Omega < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Por lo tanto, la forma polar de $X(\Omega)$ es

$$X(\Omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1 - 2a\cos\Omega + a^2}}\exp\left(-j\tan^{-1}\dfrac{a\,\text{sen}\,\Omega}{1 - a\cos\Omega}\right) \text{ cuando } 1 - a\cos\Omega \geq 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{1 - 2a\cos\Omega + a^2}}\exp\left(j\left[\pi - \tan^{-1}\dfrac{a\,\text{sen}\,\Omega}{1 - a\cos\Omega}\right]\right) \text{ cuando } 1 - a\cos\Omega < 0 \end{cases} \tag{4.18}$$

Observe que la forma polar (4.18) también pudo haberse determinado directamente de la forma rectangular (4.17), mediante las relaciones (4.14) y (4.15). Invitamos al lector a verificar que esto resulta en la misma respuesta que (4.18).

Para el caso $a = 0.5$, la función magnitud $|X(\Omega)|$ y la función ángulo $\angle X(\Omega)$ de la DTFT aparecen en la figura 4.2. En estas gráficas, la frecuencia es la frecuencia normalizada ($\Omega/\pi$ radianes por unidad de tiempo), y entonces, una frecuencia normalizada de 1, corresponde a $\pi$ radianes por unidad de tiempo.

---

### 4.1.1 Señales con simetría par o impar

Una señal de tiempo discreto valuada en reales, $x[n]$, es una función par de $n$ si $x[-n] = x[n]$ para todos los enteros $n \geq 1$. Si $x[n]$ es una señal par, de la fórmula de Euler se desprende que la DTFT $X(\Omega)$ dada por (4.2) puede expresarse en la forma

$$X(\Omega) = x[0] + \sum_{n=1}^{\infty} 2x[n]\cos\Omega n \tag{4.19}$$

De (4.19) vemos que $X(\Omega)$ es una función de $\Omega$ valuada en reales y, por lo tanto, la DTFT de una señal par siempre es valuada en reales.

Si $x[n]$ es una señal impar, es decir, $x[-n] = -x[n]$ para todos los enteros $n \geq 1$, la DTFT $X(\Omega)$ puede escribirse en la forma

$$X(\Omega) = x[0] - \sum_{n=1}^{\infty} j2x[n]\,\text{sen}\,\Omega n \tag{4.20}$$

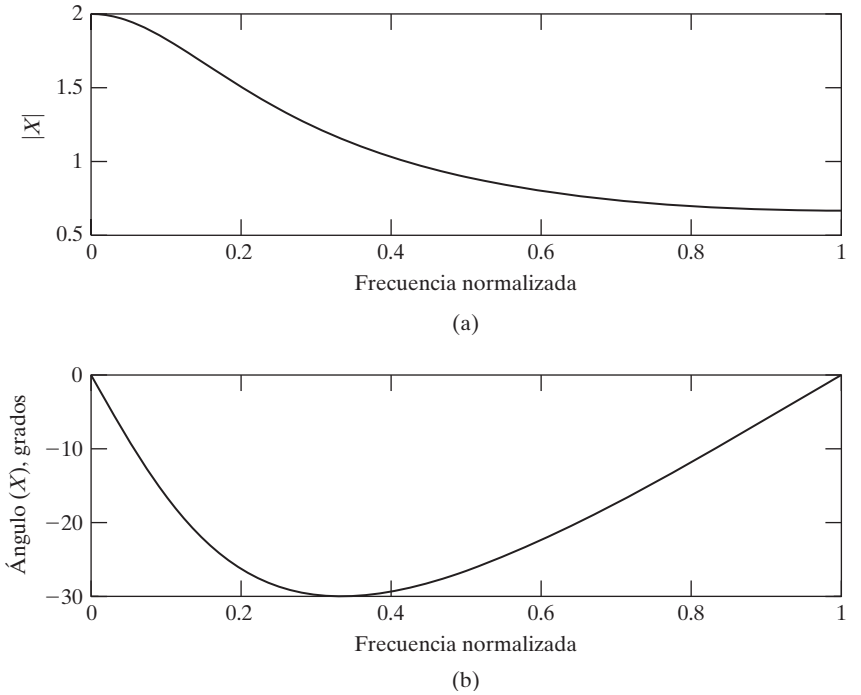



**FIGURA 4.2**
(a) Magnitud y (b) ángulo de la DTFT de la señal $x[n] = (0.5)^n u[n]$.

En el problema 4.3 invitamos al lector a verificar (4.20) [y (4.19)]. En (4.20) vemos que la DTFT de una función impar es igual a la constante $x[0]$ más una función completamente valuada en imaginarios.

---

### Ejemplo 4.3 DTFT de un pulso rectangular

Dado un entero positivo $q$, sea $p[n]$ quien denote la función pulso rectangular de tiempo discreto, definida por

$$p[n] = \begin{cases} 1, & n = -q, -q+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, q \\ 0, & \text{todas las demás } n \end{cases}$$

Esta señal es par y, por lo tanto, la DTFT es una función de $\Omega$ valuada en reales. Para calcular la DTFT $P(\Omega)$ del pulso $p[n]$, nos damos cuenta que resulta más sencillo utilizar (4.2) en lugar de (4.19): al sustituir $p[n]$ en (4.2), obtenemos

$$P(\Omega) = \sum_{n=-q}^{q} e^{-j\Omega n} \tag{4.21}$$

Después, si utilizamos (4.5) con $q_1 = -q, q_2 = q$, y $r = e^{-j\Omega}$, vemos que (4.21) se vuelve

$$P(\Omega) = \frac{e^{j\Omega q} - e^{-j\Omega(q+1)}}{1 - e^{-j\Omega}} \tag{4.22}$$

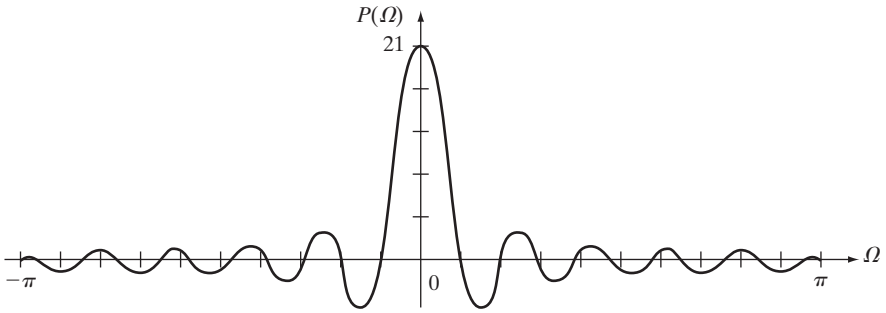



**FIGURA 4.3**
DTFT del pulso rectangular $p[n]$, con $q = 10$.

Si multiplicamos el numerador y el denominador de (4.22), por $e^{j\Omega/2}$ obtenemos

$$P(\Omega) = \frac{e^{j\Omega(q+1/2)} - e^{-j\Omega(q+1/2)}}{e^{j(\Omega/2)} - e^{-j(\Omega/2)}} \tag{4.23}$$

Por último, si utilizamos la fórmula de Euler, concluimos que (4.23) se reduce a

$$P(\Omega) = \frac{\text{sen}[(q + 1/2)\Omega]}{\text{sen}(\Omega/2)} \tag{4.24}$$

Por lo tanto, la DTFT del pulso rectangular $p[n]$ está dada por (4.24). Es interesante notar que, conforme se incrementa el valor del entero $q$, la gráfica de la DTFT $P(\Omega)$ luce más y más como una función seno cardinal (senc) de la variable $\Omega$. Por ejemplo, en el caso $q = 10$, la gráfica de $P(\Omega)$ aparece en la figura 4.3, para $-\pi \leq \Omega \leq \pi$. La transformada (4.24) es la contraparte de tiempo discreto de la transformada del pulso rectangular en el caso de tiempo continuo (vea el ejemplo 3.9 del capítulo 3).

### 4.1.2 Espectro de una señal de tiempo discreto

El análisis de Fourier puede utilizarse para determinar las componentes de frecuencia de una señal de tiempo discreto, tal como hicimos con las señales de tiempo continuo. La descomposición de una señal periódica de tiempo discreto $x[n]$ en sus componentes sinusoidales puede considerarse como una generalización de la representación de la serie de Fourier de una señal periódica de tiempo discreto. Para que la presentación sea lo más sencilla posible, en este libro no consideramos la versión de tiempo discreto de la serie de Fourier.

Para una señal de tiempo discreto $x[n]$ que no es igual a la suma de sinusoides, el espectro de frecuencia consiste en componentes continuos de frecuencia que forman la señal. Como en el caso de tiempo continuo, la DTFT $X(\Omega)$ despliega los diferentes componentes sinusoidales (con frecuencia $\Omega$) que conforman $x[n]$ y, por lo tanto, $X(\Omega)$ se conoce como *espectro de frecuencia* de $x[n]$. La función magnitud $|X(\Omega)|$ se conoce como *espectro de amplitud* de la señal, y la función ángulo $\angle X(\Omega)$ se conoce como *espectro de fase* de la señal. En este libro especificaremos las gráficas de $|X(\Omega)|$ y $\angle X(\Omega)$ sobre el intervalo $0 \leq \Omega \leq \pi$. Las componentes sinusoidales incluidas en $x[n]$ tienen frecuencias positivas en el intervalo

de 0 a $\pi$. Por lo tanto, la frecuencia más alta posible en el espectro de $x[n]$ es $\Omega = \pi$ radianes por unidad de tiempo.

### Ejemplo 4.4 Señal con componentes de baja frecuencia

Considere la señal de tiempo discreto $x[n] = (0.5)^n u[n]$, que aparece en la figura 4.1. En el ejemplo 4.2 determinamos los espectros de amplitud y de fase de la señal, cuyos resultados aparecen graficados en la figura 4.2. Observe que sobre el intervalo de frecuencia de 0 a $\pi$, la mayor parte del contenido espectral de la señal se concentra cerca de la frecuencia cero, $\Omega = 0$. Por lo tanto, la señal tiene una preponderancia de componentes de baja frecuencia.

### Ejemplo 4.5 Señal con componentes de alta frecuencia

Ahora considere la señal $x[n] = (-0.5)^n u[n]$, que aparece en la figura 4.4. Observe que, debido a los cambios de signo, las variaciones de esta señal en el tiempo son mucho mayores que las de la señal en el ejemplo 4.4. Por lo tanto, se espera que el espectro de esta señal contenga una parte mucho mayor de componentes de alta frecuencia, en comparación con el espectro de la señal en el ejemplo 4.4.

A partir de los resultados del ejemplo 4.2, la DTFT de $x[n] = (-0.5)^n u[n]$ es

$$X(\Omega) = \frac{1}{1 + 0.5e^{-j\Omega}}$$

y los espectros de amplitud y de fase están dados por

$$|X(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1.25 + \cos \Omega}} \tag{4.25}$$

$$\angle X(\Omega) = -\tan^{-1}\frac{-0.5 \operatorname{sen} \Omega}{1 + 0.5 \cos \Omega} \tag{4.26}$$

Las gráficas de $|X(\Omega)|$ y $\angle X(\Omega)$ aparecen en la figura 4.5. De la figura, vemos que sobre el intervalo de frecuencia 0 a $\pi$, el contenido espectral de la señal se concentra cerca de la más alta fre-

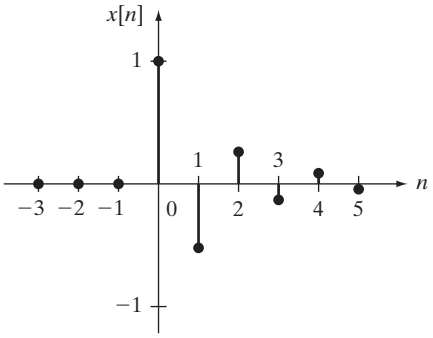



**FIGURA 4.4**
La señal $x[n] = (-0.5)^n u[n]$.

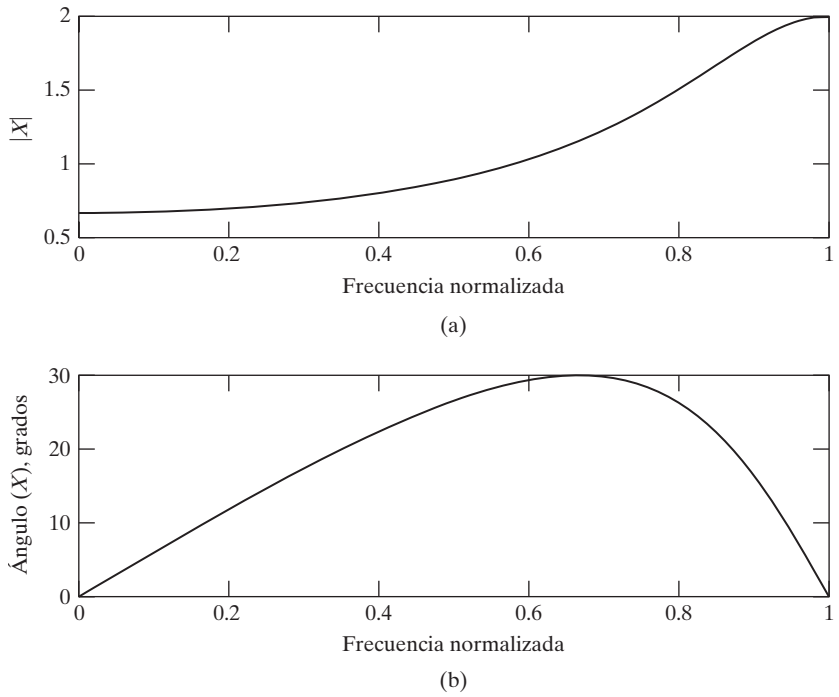



**FIGURA 4.5**
(a) Espectros de (a) amplitud y (b) fase de la señal $x[n] = (-0.5)^n u[n]$.

cuencia posible $\Omega = \pi$, y por lo tanto esta señal tiene una preponderancia de componentes de alta frecuencia.

### 4.1.3 Transformada inversa de Fourier de tiempo discreto (DTFT inversa)

Dada una señal $x[n]$ con DTFT $X(\Omega)$, $x[n]$ puede recalcularse a partir de $X(\Omega)$, aplicando la DTFT inversa a $X(\Omega)$. La DTFT inversa se define como

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\Omega)e^{jn\Omega}\,d\Omega \tag{4.27}$$

Debido a que $X(\Omega)$ y $e^{jn\Omega}$ son funciones periódicas de $\Omega$ con periodo $2\pi$, el producto $X(\Omega)e^{jn\Omega}$ también es una función periódica de $\Omega$ con periodo $2\pi$. Como resultado, la integral (4.27) puede evaluarse sobre cualquier intervalo de longitud $2\pi$. Por ejemplo,

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{jn\Omega}\,d\Omega \tag{4.28}$$

### 4.1.4 DTFT generalizada

Como en la transformada de Fourier de tiempo continuo, existen señales de tiempo discreto que no tienen una DTFT en el sentido ordinario, pero sí tienen una DTFT generalizada. En el siguiente ejemplo presentamos una señal de este tipo:

### Ejemplo 4.6 DTFT de una señal constante

Considere la señal constante $x[n] = 1$ para todos los enteros $n$. Debido a que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = \infty$$

esta señal no tiene una DTFT en el sentido ordinario. La señal constante tiene una DTFT generalizada que se define como el tren de impulsos

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - 2\pi k)$$

Esta transformada aparece en la figura 4.6.

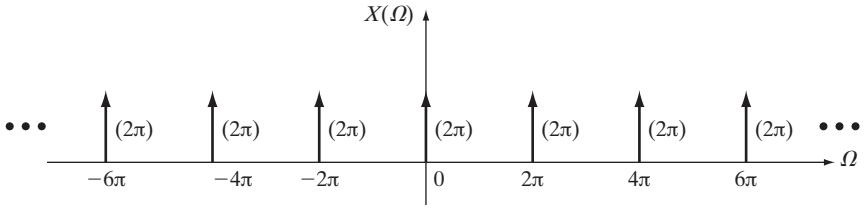



**FIGURA 4.6**
DTFT de la señal constante de tiempo discreto.

La justificación para tomar la transformada de la figura 4.6 para que sea la DTFT generalizada de la señal constante, se desprende de la propiedad de que la DTFT inversa de $X(\Omega)$ es igual a la señal constante. Para ver esto, mediante (4.28),

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{jn\Omega}\,d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\Omega)e^{0}\,d\Omega = \int_{-\pi}^{\pi}\delta(\Omega)\,d\Omega \\ &= 1 \quad \text{para toda } n \end{aligned}$$

### 4.1.5 Pares de transformadas

Como en la teoría de la transformada de Fourier de señales de tiempo continuo, utilizaremos la notación del par de transformadas

$$x[n] \leftrightarrow X(\Omega)$$

para denotar el hecho de que $X(\Omega)$ es la DTFT de $x[n]$, y de manera inversa, que $x[n]$ es la DTFT inversa de $X(\Omega)$. Por conveniencia del lector, en la tabla 4.1 proporcionamos una lista de los pares de DTFT más comunes.

**TABLA 4.1** Pares comunes de DTFT

$$1, \text{toda } n \leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - 2\pi k)$$

$$\text{sgn}[n] \leftrightarrow \frac{2}{1 - e^{-j\Omega}}, \text{ donde sgn}[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, 2, \ldots \\ -1, & n = -1, -2, \ldots \end{cases}$$

$$u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\Omega - 2\pi k)$$

$$\delta[n] \leftrightarrow 1$$

$$\delta[n - q] \leftrightarrow e^{-jq\Omega}, q = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}, \quad |a| < 1$$

$$e^{j\Omega_0 n} \leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k)$$

$$p[n] \leftrightarrow \frac{\text{sen}\left[\left(q + \frac{1}{2}\right)\Omega\right]}{\text{sen}(\Omega/2)}$$

$$\frac{B}{\pi}\text{senc}\left(\frac{B}{\pi}n\right) \leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{2B}(\Omega + 2\pi k)$$

$$\cos \Omega_0 n \leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi[\delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi k) + \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k)]$$

$$\text{sen } \Omega_0 n \leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} j\pi[\delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi k) - \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k)]$$

$$\cos(\Omega_0 n + \theta) \leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi[e^{-j\theta}\delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi k) + e^{j\theta}\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k)]$$

### 4.1.6 Propiedades de la DTFT

La DTFT tiene diversas propiedades, la mayoría de las cuales son versiones de tiempo discreto de las propiedades de la transformada de Fourier de tiempo continuo (CTFT). Las propiedades de la DTFT aparecen en la tabla 4.2. Excepto por la última propiedad de la tabla 4.2, las demostraciones de estas propiedades se asemejan bastante a las de las propiedades correspondientes a la CTFT. Aquí omitimos los detalles.

Debemos destacar que, en contraste con la CTFT, no existe propiedad de dualidad para la DTFT. Sin embargo, existe una relación entre la DTFT inversa y la CTFT inversa. Ésta es la última propiedad que aparece en la tabla 4.2. Más adelante establecemos y demostramos esta propiedad.

Dada una señal de tiempo discreto $x[n]$ con DTFT $X(\Omega)$, sea $X(\omega)$ quien denote a $X(\Omega)$ con $\Omega$ reemplazada por $\omega$, y sea $p_{2\pi}(\omega)$ quien denote a la función frecuencia rectangular con un ancho de banda igual a $2\pi$. Entonces, el producto $X(\omega)p_{2\pi}(\omega)$ es igual a $X(\omega)$ para $-\pi \leq \omega < \pi$, y es igual a cero para todos los demás valores de $\omega$. Sea $\gamma(t)$ quien denote a la CTFT inversa de $X(\omega)p_{2\pi}(\omega)$. Entonces, la última propiedad de la tabla 4.2 establece

**TABLA 4.2** Propiedades de la DTFT

| Propiedad | Par de transformadas/Propiedad |
|---|---|
| Linealidad | $ax[n] + bv[n] \leftrightarrow aX(\Omega) + bV(\Omega)$ |
| Desplazamiento en el tiempo por la derecha o por la izquierda | $x[n - q] \leftrightarrow X(\Omega)e^{-jq\Omega}$, $q$ cualquier entero |
| Inversión en el tiempo | $x[-n] \leftrightarrow X(-\Omega) = \overline{X(\Omega)}$ |
| Multiplicación por $n$ | $nx[n] \leftrightarrow j\dfrac{d}{d\Omega}X(\Omega)$ |
| Multiplicación por una exponencial compleja | $x[n]e^{jn\Omega_0} \leftrightarrow X(\Omega - \Omega_0)$, $\Omega_0$ real |
| Multiplicación por sen $\Omega_0 n$ | $x[n]$ sen $\Omega_0 n \leftrightarrow \dfrac{j}{2}[X(\Omega + \Omega_0) - X(\Omega - \Omega_0)]$ |
| Multiplicación por cos $\Omega_0 n$ | $x[n]$ cos $\Omega_0 n \leftrightarrow \dfrac{1}{2}[X(\Omega + \Omega_0) + X(\Omega - \Omega_0)]$ |
| Convolución en el dominio de tiempo | $x[n] * v[n] \leftrightarrow X(\Omega)V(\Omega)$ |
| Sumatoria | $\sum_{i=0}^{n} x[i] \leftrightarrow \dfrac{1}{1 - e^{-j\Omega}}X(\Omega) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \pi X(2\pi n)\delta(\Omega - 2\pi n)$ |
| Multiplicación en el dominio de tiempo | $x[n]v[n] \leftrightarrow \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega - \lambda)V(\lambda)\, d\lambda$ |
| Teorema de Parseval | $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]v[n] = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{X(\Omega)}V(\Omega)\, d\Omega$ |
| Caso especial del teorema de Parseval | $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lvert X(\Omega)\rvert^2\, d\Omega$ |
| Relación con la CTFT inversa | Si $x[n] \leftrightarrow X(\Omega)$ y $\gamma(t) \leftrightarrow X(\omega)p_{2\pi}(\omega)$, entonces $x[n] = \gamma(t)\lvert_{t=n} = \gamma(n)$ |

que $x[n] = \gamma(n)$. Para demostrar esto, primero observe que por definición de la CTFT inversa,

$$\gamma(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)p_{2\pi}(\omega)e^{j\omega t}\, d\omega \tag{4.29}$$

Por definición de $X(\omega)p_{2\pi}(\omega)$, (4.29) se reduce a

$$\gamma(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega t}\, d\omega \tag{4.30}$$

Al establecer $t = n$ en (4.30) obtenemos

$$\gamma(t)\lvert_{t=n} = \gamma(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n}\, d\omega \tag{4.31}$$

y si reemplazamos $\omega$ por $\Omega$ en (4.31), obtenemos

$$\gamma(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}\, d\Omega \tag{4.32}$$

El lado derecho de (4.32) es igual a la DTFT inversa de $X(\Omega)$ y, por lo tanto $\gamma(n)$ es igual a $x[n]$.

La relación entre la CTFT inversa y la DTFT inversa puede utilizarse para generar pares de transformadas DTFT, a partir de pares CTFT, como muestra el siguiente ejemplo:

---

**Ejemplo 4.7 Par de transformadas DTFT a partir de CTFT**

Suponga que

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{2B}(\Omega + 2\pi k)$$

donde $B < \pi$. La transformada $X(\Omega)$ aparece graficada en la figura 4.7. Se ve que

$$X(\omega)p_{2\pi}(\omega) = p_{2B}(\omega)$$

De la tabla 3.2, la CTFT inversa de $p_{2B}(\omega)$ es igual a

$$\frac{B}{\pi}\text{senc}\left(\frac{B}{\pi}t\right), \qquad -\infty < t < \infty$$

Por lo tanto,

$$x[n] = \gamma[n] = \frac{B}{\pi}\text{senc}\left(\frac{B}{\pi}n\right), \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

lo cual arroja el par de DTFT

$$\frac{B}{\pi}\text{senc}\left(\frac{B}{\pi}n\right) \leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{2B}(\Omega + 2\pi k)$$

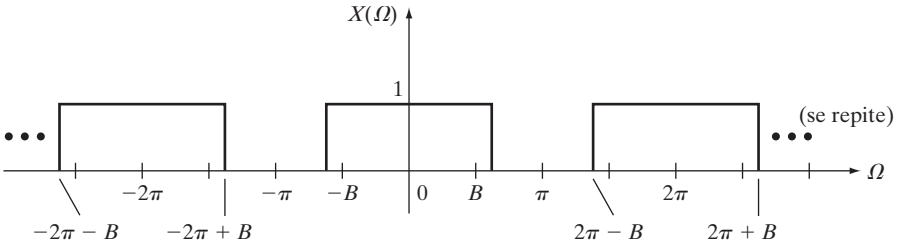



**FIGURA 4.7**
Transformada del ejemplo 4.7.

---

## 4.2 TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

Sea $x[n]$ una señal de tiempo discreto, con DTFT $X(\Omega)$. Debido a que $X(\Omega)$ es una función de la variable continua $\Omega$, no es posible almacenarla en la memoria de una computadora digital, a menos que $X(\Omega)$ pueda expresarse de forma cerrada. Para implementar técnicas de

DTFT en una computadora digital, es necesario realizar una discretización en frecuencia. Esto deriva en el concepto de la transformada discreta de Fourier, la cual definimos a continuación.

Dado un entero positivo $N$, la transformada discreta de Fourier (DFT) de $N$ puntos $X_k$ de $x[n]$, sobre el intervalo de tiempo $n = 0$ hasta $n = N - 1$, se define como

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, \ldots, N - 1 \tag{4.33}$$

De (4.33) vemos que la DFT $X_k$ es una función de la variable discreta (entera) $k$. También observe que, en contraste con la DTFT, la DFT $X_k$ es completamente especificada por los $N$ valores $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_{N-1}$. En general, estos valores son complejos y, por lo tanto, $X_k$ puede expresarse ya sea en forma polar o rectangular. La forma polar es

$$X_k = |X_k| \exp[j \angle X_k], \quad k = 0, 1, \ldots, N - 1 \tag{4.34}$$

donde $|X_k|$ es la magnitud de $X_k$, y $\angle X_k$ es el ángulo de $X_k$. La forma rectangular es

$$X_k = R_k + jI_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, N - 1 \tag{4.35}$$

donde $R_k$ es la parte real de $X_k$ dada por

$$R_k = x[0] + \sum_{n=1}^{N-1} x[n] \cos\frac{2\pi kn}{N} \tag{4.36}$$

e $I_k$ es la parte imaginaria de $X_k$ dada por

$$I_k = -\sum_{n=1}^{N-1} x[n] \operatorname{sen}\frac{2\pi kn}{N} \tag{4.37}$$

Debido a que la sumatoria de (4.33) es finita, la DFT $X_k$ siempre existe. Además, $X_k$ puede calcularse con sólo evaluar la sumatoria finita (4.33). La figura 4.8 muestra un programa de MATLAB para calcular la DFT. En la sección 4.4, consideramos el comando `fft`, el cual implementa un algoritmo rápido para calcular la DFT.

```
%
% Transformada discreta de Fourier
%
function Xk = dft(x)
[N,M] = size(x);
if M ~= 1      % asegúrese de que x es un vector columna
      x = x´;
      N = M;
end
Xk = zeros(N,1);
n = 0:N-1
for k = 0:N-1,
      Xk(k + 1) = exp(-j*2*pi*k*n/N)*x;
end
```

**FIGURA 4.8**
Programa de MATLAB para evaluar la DFT.

### Ejemplo 4.8 Cálculo de una DFT

Suponga que $x[0] = 1, x[1] = 2, x[2] = 2, x[3] = 1$, y $x[n] = 0$, para los demás enteros $n$. Con $N = 4$, de (4.33), la DFT de $x[n]$ sobre el intervalo de tiempo $n = 0$ a $n = N - 1 = 3$, es

$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-j\pi kn/2}, \quad k = 0, 1, 2, 3 \\ &= x[0] + x[1]e^{-j\pi k/2} + x[2]e^{-j\pi k} + x[3]e^{-j\pi 3k/2}, \quad k = 0, 1, 2, 3 \\ &= 1 + 2e^{-j\pi k/2} + 2e^{-j\pi k} + e^{-j\pi 3k/2}, \quad k = 0, 1, 2, 3 \end{aligned}$$

La parte real $R_k$ de $X_k$ es

$$R_k = 1 + 2\cos\frac{-\pi k}{2} + 2\cos(-\pi k) + \cos\frac{-\pi 3k}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Por lo tanto,

$$R_k = \begin{cases} 6, & k = 0 \\ -1, & k = 1 \\ 0, & k = 2 \\ -1, & k = 3 \end{cases}$$

La parte imaginaria $I_k$ de $X_k$ es

$$I_k = -2\,\text{sen}\frac{\pi k}{2} - 2\,\text{sen}\,\pi k - \text{sen}\frac{\pi 3k}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Entonces,

$$I_k = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ -1, & k = 1 \\ 0, & k = 2 \\ 1, & k = 3 \end{cases}$$

y la forma rectangular de $X_k$ es

$$X_k = \begin{cases} 6, & k = 0 \\ -1 - j, & k = 1 \\ 0, & k = 2 \\ -1 + j, & k = 3 \end{cases}$$

Para verificar, estos valores de $X_k$ también se obtuvieron mediante el programa MATLAB de la figura 4.8, con los comandos

```
x = [1 2 2 1];
Xk = dft(x)
```

La forma polar de $X_k$ es

$$X_k = \begin{cases} 6e^{j0}, & k = 0 \\ \sqrt{2}e^{j5\pi/4}, & k = 1 \\ 0e^{j0}, & k = 2 \\ \sqrt{2}e^{j3\pi/4}, & k = 3 \end{cases}$$

### 4.2.1 Simetría

En la sección 4.1 mostramos que la magnitud $|X(\Omega)|$ y la fase $\angle X(\Omega)$ de la DTFT $X(\omega)$ de una señal de tiempo discreto $x[n]$ son funciones par e impar de $\Omega$, respectivamente. Vemos que la DFT de $N$ puntos $X_k$ de $x[n]$ también tiene propiedades de simetría, las cuales se deducen de la siguiente manera. Primero, sustituyendo $k$ por $N - k$ en (4.33), obtenemos

$$X_{N-k} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi(N-k)n/N}, k = 0, 1, 2, \ldots, N - 1$$

$$X_{N-k} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{j2\pi kn/N}e^{-j2\pi n}, k = 0, 1, 2, \ldots, N - 1 \tag{4.38}$$

Debido a que $e^{-j2\pi n} = 1$ para $n = 0, 1, 2,\ldots$, (4.38) se reduce a

$$X_{N-k} = \overline{X_k}, k = 0, 1, 2, \ldots, N - 1 \tag{4.39}$$

donde $\overline{X}_k$ es el complejo conjugado de $X_k$. De (4.39) se deduce que $|X_k|$ es simétrica en $k = (N/2)$ cuando $N$ es par, y $\angle X_k$ tiene simetría impar en $k = (N/2)$ cuando $N$ es par. Más adelante utilizaremos la relación (4.39) para expresar la señal dada como una suma de sinusoides.

### 4.2.2 DFT inversa

Si $X_k$ es la DFT de $N$ puntos de $x[n]$, entonces $x[n]$ puede determinarse a partir de $X_k$, aplicando la DFT inversa dada por

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi kn/N}, n = 0, 1, \ldots, N - 1 \tag{4.40}$$

Debido a que la suma (4.40) es finita, podemos calcular la DFT inversa con sólo evaluar la sumatoria de (4.40). La figura 4.9 presenta un programa de MATLAB® para calcular la DFT inversa.

```
%
% Transformada inversa discreta de Fourier
%
function x = idft(Xk)
[N,M] = size(Xk);
if M ~= 1      % asegúrese de que Xk es un vector columna
  Xk = Xk.';   % .' toma el transpuesto sin conjugación
  N = M;
end
x = zeros(N,1);
k = 0:N-1;
for n = 0:N-1,
  x(n + 1) = exp(j*2*pi*k*n/N)*Xk;
end
x = x/N;
```

**FIGURA 4.9**
Programa de MATLAB para calcular la DFT inversa.

### Ejemplo 4.9 Cálculo de la DFT inversa

De nuevo considere la señal del ejemplo 4.8 con la forma rectangular de la DFT dada por

$$X_k = \begin{cases} 6, & k = 0 \\ -1 - j, & k = 1 \\ 0, & k = 2 \\ -1 + j, & k = 3 \end{cases}$$

Si evaluamos (4.40) con $N = 4$ obtenemos

$$x[n] = \frac{1}{4}[X_0 + X_1 e^{j\pi n/2} + X_2 e^{j\pi n} + X_3 e^{j3\pi n/2}], \quad n = 0, 1, 2, 3$$

Por lo tanto,

$$x[0] = \frac{1}{4}[X_0 + X_1 + X_2 + X_3] = 1$$

$$x[1] = \frac{1}{4}[X_0 + jX_1 - X_2 - jX_3] = \frac{1}{4}[8] = 2$$

$$x[2] = \frac{1}{4}[X_0 - X_1 + X_2 - X_3] = 2$$

$$x[3] = \frac{1}{4}[X_0 - jX_1 - X_2 + jX_3] = \frac{1}{4}[4] = 1$$

Estos valores son iguales a los valores de $x[n]$ especificados en el ejemplo 4.8. Además, estos valores para $x[n]$ resultan cuando se ejecuta el programa de la figura 4.9 con los comandos

```
Xk = [6 -1-j 0 -1+j];
x = idft(Xk)
```

### 4.2.3 Forma sinusoidal

La ecuación (4.40) muestra que, sobre el intervalo $n = 0$ a $n = N - 1$, $x[n]$ es igual a una suma de exponenciales complejas. Debido a que los valores $x[n]$ son números reales, se hace evidente que el lado derecho de (4.40) puede expresarse como una suma de sinusoides. La deducción de esta forma se basa en la relación (4.39):

Primero, suponga que $N$ es un entero impar con $N \geq 3$. Luego $N - 1$ y $N + 1$ son enteros pares, y (4.40) puede escribirse en la forma

$$x[n] = \frac{1}{N}X_0 + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{(N-1)/2} X_k e^{j2\pi kn/N} + \frac{1}{N}\sum_{k=(N+1)/2}^{N-1} X_k e^{j2\pi kn/N},$$
$$n = 0, 1, \ldots, N - 1 \tag{4.41}$$

Llevando a cabo un cambio de índice en la segunda sumatoria del lado derecho de (4.41) y utilizando (4.39) obtenemos el resultado

$$\frac{1}{N}\sum_{k=(N+1)/2}^{N-1} X_k e^{j2\pi kn/N} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{(N-1)/2} \overline{X_k} e^{-j2\pi kn/N} \tag{4.42}$$

En el problema 4.10, invitamos al lector a verificar (4.42).

Al sustituir (4.42) en (4.41) obtenemos

$$x[n] = \frac{1}{N}X_0 + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{(N-1)/2} [X_k e^{j2\pi kn/N} + \overline{X_k} e^{-j2\pi kn/N}], n = 0, 1, \ldots, N - 1 \tag{4.43}$$

El término $\overline{X}_k e^{-j2\pi kn/N}$ es el complejo conjugado de $X_k e^{j2\pi kn/N}$ y, por lo tanto, la suma $X_k e^{j2\pi kn/N} + \overline{X}_k e^{-j2\pi kn/N}$ es igual a 2 veces la parte real de $X_k e^{j2\pi kn/N}$. Al utilizar la forma rectangular de $X_k$, dada por (4.35), y la fórmula de Euler, obtenemos

$$\begin{aligned} X_k e^{j2\pi kn/N} + \overline{X_k} e^{-j2\pi kn/N} &= 2\,\mathrm{Re}[X_k e^{j2\pi kn/N}] \\ &= 2\,\mathrm{Re}\left[(R_k + jI_k)\left(\cos\frac{2\pi kn}{N} + j\,\mathrm{sen}\frac{2\pi kn}{N}\right)\right] \\ &= 2\left[R_k \cos\frac{2\pi kn}{N} - I_k\,\mathrm{sen}\frac{2\pi kn}{N}\right] \end{aligned}$$

Si sustituimos este resultado en (4.43), obtenemos la siguiente forma sinusoidal para $x[n]$:

$$x[n] = \frac{1}{N}X_0 + \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{(N-1)/2}\left[R_k \cos\frac{2\pi kn}{N} - I_k\,\mathrm{sen}\frac{2\pi kn}{N}\right], n = 0, 1, \ldots, N - 1 \tag{4.44}$$

A partir de (4.44), vemos que la componente constante (frecuencia cero) de $x[n]$ es igual a $(1/N)X_0$, y de (4.33),

$$X_0 = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]$$

Por lo tanto, la componente constante de $x[n]$ es igual al valor promedio de $x[n]$ sobre el intervalo $n = 0$ a $n = N - 1$. De (4.44) también podemos ver que la primera armónica de $x[n]$ es el término $\frac{2}{N}\left[R_1 \cos\frac{2\pi n}{N} - I_1 \operatorname{sen}\frac{2\pi n}{N}\right]$, la cual tiene una frecuencia de $2\pi/N$. Ésta es la componente de frecuencia más baja posible (diferente de cero) contenida en $x[n]$. La componente de frecuencia más alta posible de $x[n]$ tiene una frecuencia de $\frac{(N-1)\pi}{N}$.

Cuando $N$ es par, la forma sinusoidal de $x[n]$ está dada por

$$x[n] = \frac{1}{N}X_0 + \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\left[R_k \cos\frac{2\pi kn}{N} - I_k \operatorname{sen}\frac{2\pi kn}{N}\right] + \frac{1}{N}R_{N/2}\cos \pi n \qquad (4.45)$$

Observe que en este caso, la componente de frecuencia más alta contenida en $x[n]$ tiene frecuencia $\pi$, si $R_{N/2} \neq 0$. Dejamos al lector la deducción de (4.45) (vea el problema 4.11).

---

**Ejemplo 4.10 Forma sinusoidal**

De nuevo considere la señal del ejemplo 4.8 con la forma rectangular de la DFT dada por

$$X_k = \begin{cases} 6, & k = 0 \\ -1 - j, & k = 1 \\ 0, & k = 2 \\ -1 + j, & k = 3 \end{cases}$$

Ya que $N = 4$, $N$ es par, y la forma sinusoidal de $x[n]$ está dada por (4.45). Al sustituir los valores de $R_k$ e $I_k$ en (4.45), resulta la siguiente forma sinusoidal de $x[n]$:

$$x[n] = \frac{6}{4} + \frac{2}{4}\left[R_1 \cos\frac{2\pi n}{4} - I_1 \operatorname{sen}\frac{2\pi n}{4}\right] + \frac{1}{4}R_2 \cos \pi n$$

$$= 1.5 - 0.5 \cos\frac{\pi n}{2} + 0.5 \operatorname{sen}\frac{\pi n}{2}$$

---

### 4.2.4 Relación con DTFT

Dada una señal de tiempo discreto $x[n]$, sea $X_k$ quien denote a la DFT de $N$ puntos, definida por (4.33); y sea $X(\Omega)$ quien denote la DTFT de $x[n]$, definida por

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \qquad (4.46)$$

Si $x[n] = 0$ para $n < 0$, y $n \geq N$, (4.46) se reduce a

$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\Omega n} \qquad (4.47)$$

Al comparar (4.33) con (4.47) se revela que

$$X_k = X(\Omega)|_{\Omega=2\pi k/N} = X\left(\frac{2\pi k}{N}\right), k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{4.48}$$

Por lo tanto, si $x[n] = 0$ para $n < 0$ y $n \geq N$, la DFT $X_k$ puede considerarse como una versión muestreada en la frecuencia de la DTFT $X(\Omega)$; de manera más precisa, $X_k$ es igual a $X(\Omega)$ con $\Omega$ evaluada en los puntos de frecuencia $\Omega = 2\pi k/N$, para $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

DTFT y DFT de un pulso

### Ejemplo 4.11 DTFT y DFT de un pulso

Con $p[n]$ igual al pulso rectangular definido en el ejemplo 4.3, sea $x[n] = p[n-q]$. Entonces, por definición de $p[n]$

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, 2, \ldots, 2q \\ 0, & \text{todas las demás } n \end{cases}$$

Del resultado en el ejemplo 4.3,

$$p[n] \leftrightarrow \frac{\text{sen}\left[\left(q + \frac{1}{2}\right)\Omega\right]}{\text{sen}(\Omega/2)}$$

y por la propiedad de desplazamiento en el tiempo de la DTFT (vea la tabla 4.2), la DTFT de $x[n] = p[n-q]$ está dada por

$$X[\Omega] = \frac{\text{sen}\left[\left(q + \frac{1}{2}\right)\Omega\right]}{\text{sen}(\Omega/2)} e^{-jq\Omega}$$

Por lo tanto, el espectro de amplitud de $x[n]$ es

$$|X[\Omega]| = \frac{|\text{sen}\left[\left(q + \frac{1}{2}\right)\Omega\right]|}{|\text{sen}(\Omega/2)|}$$

En el caso $q = 5$, la gráfica de $|X(\Omega)|$ aparece en la figura 4.10. Observe que $|X(\Omega)|$ está graficada para $\Omega$ en el intervalo 0 a $2\pi$ (opuesto a $-\pi$ a $\pi$). En esta sección, el espectro de amplitud $|X(\Omega)|$

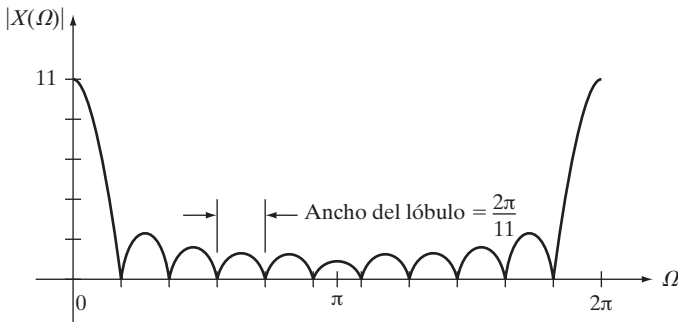



**FIGURA 4.10**
Espectro de amplitud en el caso $q = 5$.

se despliega de 0 a $2\pi$, ya que $X_k$ para $k = 0, 1,\ldots, N - 1$ corresponde a los valores de $X(\Omega)$, para valores de $\Omega$ en el intervalo de 0 a $2\pi$.

Ahora, si $X_k$ denota a la DFT de $N$ puntos de $x[n]$, con $N = 2q + 1$, de (4.48),

$$|X_k| = \left|X\left(\frac{2\pi k}{N}\right)\right| = \frac{\left|\text{sen}\left[\left(q + \frac{1}{2}\right)(2\pi k/N)\right]\right|}{|\text{sen}(\pi k/N)|}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2q$$

Si sustituimos $N$ por $2q + 1$, obtenemos

$$|X_k| = \frac{\left|\text{sen}\left[\left(\frac{2q+1}{2}\right)\frac{2\pi k}{2q+1}\right]\right|}{\left|\text{sen}\left(\frac{\pi k}{2q+1}\right)\right|}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2q$$

$$|X_k| = \frac{|\text{sen } \pi k|}{\left|\text{sen}\left(\frac{\pi k}{2q+1}\right)\right|}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2q$$

$$|X_k| = \begin{cases} 2q + 1, & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2, \ldots, 2q \end{cases}$$

El valor de $|X_k|$ para $k = 0$, fue calculado mediante la regla de l'Hôpital.

Observe que, ya que $|X_k| = 0$ para $k = 1, 2,\ldots, 2q$, los valores de las muestras $X(2\pi k/N)$ de $X(\Omega)$ son todos iguales a cero para estos valores de $k$. Esto es una consecuencia de muestrear $X(\Omega)$ en los puntos cero ubicados entre los lóbulos laterales de $X(\Omega)$ (vea la figura 4.10). Debido a que $X_k$ es diferente de cero sólo para $k = 0$, $X_k$ mantiene muy poca semejanza al espectro $X(\Omega)$ del pulso rectangular $x\{n] = p[n - q]$. Sin embargo, si hacemos $N$ más grande, de manera que las frecuencias muestreadas $2\pi k/n$ se acerquen más entre sí, se espera que la DFT $X_k$ sea una mejor representación del espectro $X(\Omega)$. Por ejemplo, cuando $N = 2(2q + 1)$, la DFT $X_k$ de $N$ puntos resultante es igual a los valores de $X(\Omega)$ en los puntos de frecuencia correspondientes a los picos y a los puntos cero de los lóbulos laterales de $X(\Omega)$. La figura 4.11 muestra una gráfica de la amplitud $|X_k|$ para $q = 5$ y $N = 2(2q + 1) = 22$. Claramente, $|X_k|$ ahora mantiene cierta semejanza con $|X(\Omega)|$, la cual aparece en la figura 4.10. Para obtener una correspondencia aún más

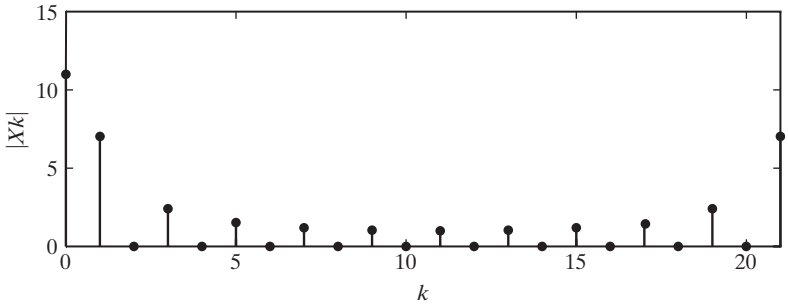



**FIGURA 4.11**
Amplitud de la DFT en el caso $q = 5$ y $N = 22$.

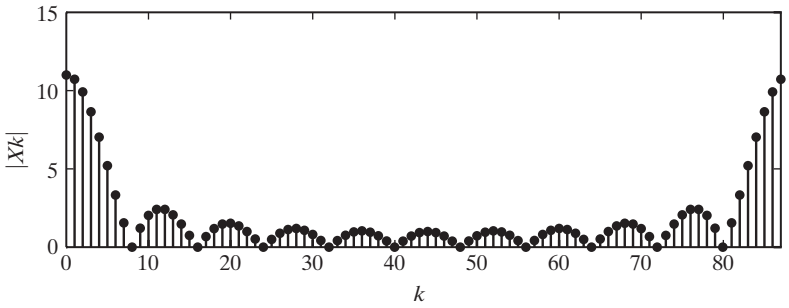



**FIGURA 4.12**
Amplitud de la DFT en el caso $q = 5$ y $N = 88$.

cercana, podemos incrementar $N$ nuevamente. Por ejemplo, $|X_k|$ aparece en la figura 4.12 para el caso $q = 5$ y $N = 88$. Aquí, calculamos la DFT ejecutando el programa de la figura 4.8 con

```
q = 5; N = 88;
x = [ones(1,2*q + 1) zeros(1,N-2*q-1)];
Xk = dft(x);
k = 0:N-1;
stem(k,abs(Xk),'filled')  % grafica la magnitud
```

## 4.3 DFT DE SEÑALES TRUNCADAS

En la mayoría de las aplicaciones, se conoce una señal de tiempo discreto sólo sobre un intervalo finito de tiempo. Para calcular la transformada de Fourier en tales casos, es necesario considerar la señal truncada $\tilde{x}[n]$ definida por

$$\tilde{x}[n] = \begin{cases} x[n], & n = 0, 1, \ldots, N-1 \\ 0, & n < 0 \text{ y } n \geq N \end{cases} \tag{4.49}$$

donde $N$ es el número de valores conocidos de $x[n]$. El entero $N$ en general se conoce como *longitud de registro*. Como resultado del corte, los valores de la DFT de la señal truncada $\tilde{x}[n]$ son por lo general diferentes de los valores $X\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$ de la DTFT de $x[n]$; en otras palabras, la relación (4.48) no es válida cuando la DFT se aplica a la señal truncada. Éste parece ser el caso del siguiente análisis:

De nuevo considere la señal truncada dada por (4.49), donde ahora se asume que $N$ es un entero impar; y considere el pulso rectangular $p[n]$ definido en el ejemplo 4.3. Al establecer $q = (N-1)/2$ en la definición del pulso y al desplazar el pulso hacia la derecha $(N-1)/2$ unidades de tiempo obtenemos

$$p\left[n - \frac{N-1}{2}\right] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, \ldots, N-1 \\ 0, & \text{todas las demás } n \end{cases}$$

Por lo tanto, la señal truncada dada por (4.49) puede expresarse en la forma

$$\widetilde{x}[n] = x[n]p\left[n - \frac{N-1}{2}\right] \tag{4.50}$$

donde $x[n]$ es la señal de tiempo discreto original, cuyos valores son conocidos sólo para $n = 0, 1, \ldots, N-1$.

Ahora, sea $P(\Omega)$ quien denote la DTFT del pulso rectangular $p\left[n - \frac{N-1}{2}\right]$. Al establecer $q = (N-1)/2$ en el resultado del ejemplo 4.11, obtenemos

$$P(\Omega) = \frac{\text{sen}[N\Omega/2]}{\text{sen}(\Omega/2)} e^{-j(N-1)\Omega/2}$$

Entonces, por la propiedad de la DTFT que involucra la multiplicación de señales (vea la tabla 4.2), y tomando la DTFT de ambos lados de (4.50), da como resultado la DTFT $\widetilde{X}(\Omega)$ de la señal truncada $\widetilde{x}[n]$ dada por

$$\widetilde{X}(\Omega) = X(\Omega) * P(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega - \lambda)P(\lambda)\, d\lambda \tag{4.51}$$

donde $X(\Omega)$ es la DTFT de $x[n]$. Por lo tanto, la DFT $\widetilde{X}_k$ de $N$ puntos de la señal truncada $x[n]$ definida por (4.49), está dada por

$$\widetilde{X}_k = [X(\Omega) * P(\Omega)]_{\Omega = 2\pi k/N}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{4.52}$$

Por (4.52) vemos que la distorsión en $\widetilde{X}_k$ de los valores deseados $X(2\pi k/N)$ puede caracterizarse en términos del efecto producido por la convolución de $P(\Omega)$ con el espectro $X(\Omega)$ de la señal. Si $x[n]$ no es convenientemente pequeño para $n < 0$ y $n \geq N$, en general, los lóbulos laterales que existen en el espectro de amplitud $|P(\Omega)|$ resultarán en los lóbulos laterales del espectro de amplitud $|X(\Omega) * P(\Omega)|$. Este efecto aparece en el siguiente ejemplo:

---

### Ejemplo 4.12 DFT de *N* puntos

Considere la señal de tiempo discreto $x[n] = (0.9)^n u[n], n \geq 0$, la cual aparece graficada en la figura 4.13. A partir de los resultados del ejemplo 4.2, la DTFT es

$$X(\Omega) = \frac{1}{1 - 0.9e^{-j\Omega}}$$

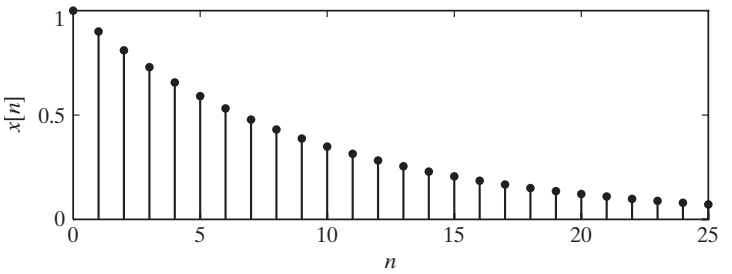



**FIGURA 4.13**
Señal del ejemplo 4.12.

El espectro de amplitud $|X(\Omega)|$ aparece en la figura 4.14. Observe que, debido a que la señal varía lentamente, la mayor parte del contenido espectral sobre el intervalo de frecuencia 0 a $\pi$, se concentra cerca del punto cero, $\Omega = 0$. Para $N = 21$, la amplitud de la DFT de $N$ puntos de la señal aparece en la figura 4.15. Obtuvimos esta gráfica mediante los comandos

```
N = 21; n = 0:N-1;
x = 0.9.^n;
Xk = dft(x);
k = n;
stem(k,abs(Xk),'filled')
```

Si comparamos las figuras 4.14 y 4.15, vemos que la amplitud de la DFT de 21 puntos es una aproximación cercana al espectro de amplitud $|X(\Omega)|$. Éste parece ser el caso, ya que $x[n]$ es pequeño para $n \geq 21$, y cero para $n < 0$.

Ahora considere la señal truncada $x[n]$ de la figura 4.16. La amplitud de la DFT de 21 puntos de la señal truncada aparece graficada en la figura 4.17. Generamos esta gráfica mediante los siguientes comandos:

```
N = 21; n = 0:N-1;
x = 0.9.^n;
x(12:21) = zeros(1,10);
Xk = dft(x);
k = n;
stem(k,abs(Xk),'filled')
```

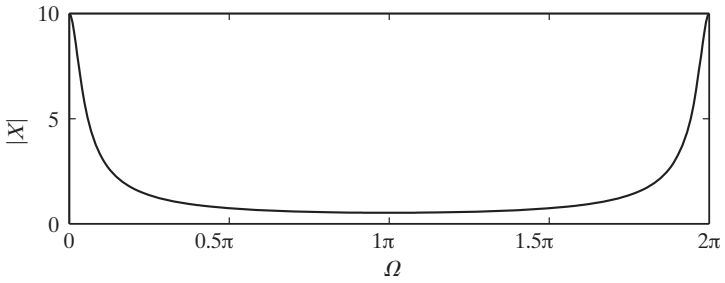



**FIGURA 4.14**
Espectro de amplitud de la señal del ejemplo 4.12.

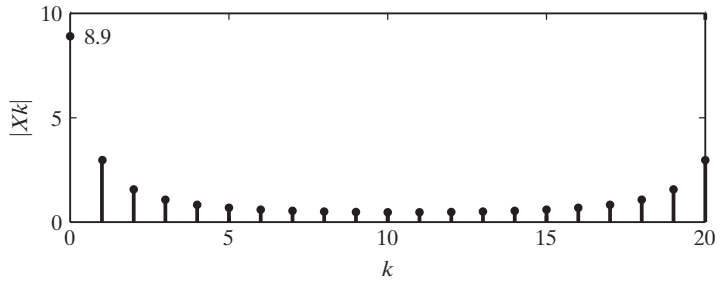



**FIGURA 4.15**
Amplitud de la DFT de 21 puntos.

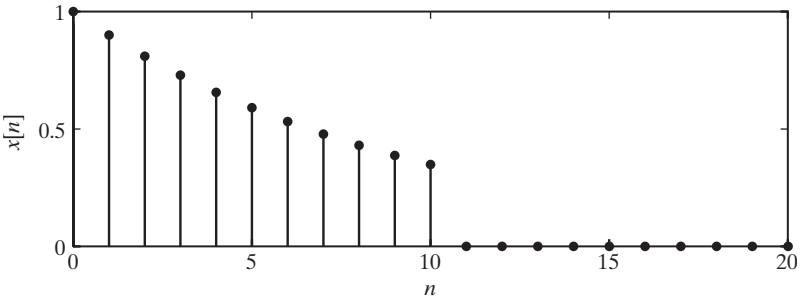



**FIGURA 4.16**
Señal truncada del ejemplo 4.12.

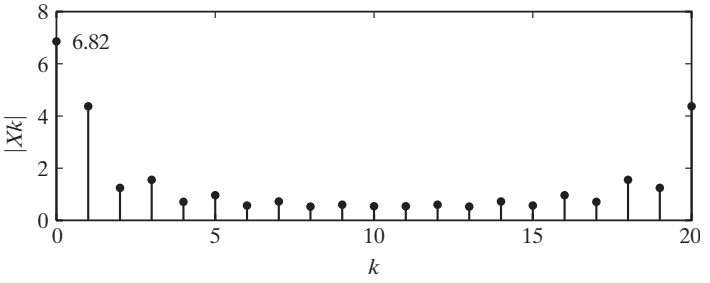



**FIGURA 4.17**
Amplitud de la DFT de 21 puntos de la señal truncada.

Si comparamos las figuras 4.17 y 4.15 se revela que el contenido espectral de la señal truncada tiene componentes más altos de frecuencia que aquéllos de la señal que muestra la figura 4.13. La razón de esto es que el corte en $n = 11$ ocasiona un abrupto cambio en la magnitud de la señal, lo que introduce componentes de alta frecuencia en el espectro de la señal (como muestra la DFT).

---

El siguiente ejemplo muestra que los lóbulos laterales del espectro de amplitud $|X(\Omega)*P(\Omega)|$ pueden producir un fenómeno mediante el cual las componentes espectrales pueden "fugarse" en varios puntos de frecuencia, como resultado del proceso de corte.

---

### Ejemplo 4.13 DFT de una sinusoide truncada

Suponga que la señal $x[n]$ es la sinusoide de duración infinita $x[n] = \cos(\Omega_0 n)$, $-\infty < n < \infty$. De la tabla 4.1 vemos que la DTFT de $x[n]$ es el tren de impulsos

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \pi[\delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi i) + \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi i)]$$

La figura 4.18 muestra una gráfica de la DTFT del $\Omega_0 n$ para $-\pi \leq \Omega \leq \pi$. De la figura vemos que, sobre el intervalo de frecuencia $-\pi \leq \Omega \leq \pi$, todo el contenido espectral de la señal cos $\Omega_0 n$ se concentra en $\Omega = \Omega_0$ y $\Omega = -\Omega_0$. Ahora considere la sinusoide truncada $\tilde{x}[n] = (\cos \Omega_0 n)$ $p\left[n - \dfrac{N-1}{2}\right]$, donde $0 \leq \Omega_0 \leq \pi$ y $p\left[n - \dfrac{N-1}{2}\right]$ es el pulso rectangular desplazado que definimos en el ejemplo 4.12, donde $N$ es un entero impar con $N \geq 3$. Entonces, por definición de $p\left[n - \dfrac{N-1}{2}\right]$, la señal truncada está dada por

$$\tilde{x}[n] = \begin{cases} \cos \Omega_0 n, & n = 0, 1, \ldots, N-1 \\ 0, & \text{todas las demás } n \end{cases}$$

Como en el ejemplo 4.12, la DTFT $P(\Omega)$ del pulso $p\left[n - \dfrac{N-1}{2}\right]$ es

$$P(\Omega) = \frac{\operatorname{sen}[N\Omega/2]}{\operatorname{sen}(\Omega/2)} e^{-j(N-1)\Omega/2}$$

Entonces, por la propiedad de la DTFT que involucra la multiplicación de señales, la DTFT $\tilde{X}(\Omega)$ de la señal truncada $\tilde{x}[n]$ está dada por

$$\tilde{X}(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(\Omega - \lambda) \pi [\delta(\lambda + \Omega_0) + \delta(\lambda - \Omega_0)] \, d\lambda$$

Si utilizamos la propiedad de desplazamiento del impulso (vea la sección 1.1) obtenemos

$$\tilde{X}(\Omega) = \frac{1}{2}[P(\Omega + \Omega_0) + P(\Omega - \Omega_0)]$$

Ahora, la relación (4.48) es válida para la señal truncada $\tilde{x}[n]$ y, por lo tanto, la DFT de $N$ puntos $\tilde{X}_k$ de $\tilde{x}[n]$ está dada por

$$\tilde{X}_k = \tilde{X}\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{2\pi k}{N} + \Omega_0\right) + P\left(\frac{2\pi k}{N} - \Omega_0\right)\right], \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

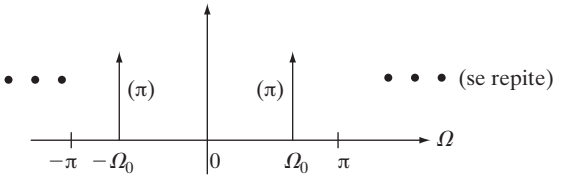



**FIGURA 4.18**
DTFT de $x[n] = \cos \Omega_0 n$ con $-\pi \leq \Omega \leq \pi$.

donde

$$P\left(\frac{2\pi k}{N} \pm \Omega_0\right) = \frac{\text{sen}\left[\left(\frac{N}{2}\right)\left(\frac{2\pi k}{N} \pm \Omega_0\right)\right]}{\text{sen}\left[\left(\frac{2\pi k}{N} \pm \Omega_0\right)\Big/ 2\right]} \exp\left[-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\left(\frac{2\pi k}{N} \pm \Omega_0\right)\right],$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

Suponga que $\Omega_0 = (2\pi r)/N$ para algún entero $r$, donde $0 \leq r \leq N-1$. Esto es equivalente a suponer que cos $\Omega_0 n$ pasa por $r$ periodos completos, conforme $n$ varía de $n = 0$ a $n = N-1$. Entonces,

$$P\left(\frac{2\pi k}{N} \pm \Omega_0\right) = \frac{\text{sen}\left[\left(\frac{N}{2}\right)\left(\frac{2\pi k \pm 2\pi r}{N}\right)\right]}{\text{sen}\left[\left(\frac{2\pi k \pm 2\pi r}{N}\right)\Big/ 2\right]} \exp\left[-jq\frac{2\pi k \pm 2\pi r}{N}\right],$$

$$k = 0, 1, \ldots, N-1$$

$$= \frac{\text{sen}(\pi k \pm \pi r)}{\text{sen}\left(\frac{\pi k \pm \pi r}{N}\right)} \exp\left[-jq\frac{2\pi(k \pm r)}{N}\right], \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

y por lo tanto,

$$P\left(\frac{2\pi k}{N} - \Omega_0\right) = \begin{cases} N, & k = r \\ 0, & k = 0, 1, \ldots, r-1, r+1, \ldots, N-1 \end{cases}$$

$$P\left(\frac{2\pi k}{N} + \Omega_0\right) = \begin{cases} N, & k = N-r \\ 0, & k = 0, 1, \ldots, N-r-1, N-r+1, \ldots, N-1 \end{cases}$$

Por último, la DFT $\widetilde{X}_k$ está dada por

$$\widetilde{X}_k = \begin{cases} \dfrac{N}{2}, & k = r \\ \dfrac{N}{2}, & k = N-r \\ 0, & \text{cualquier otra } k \text{ para } 0 \leq k \leq N-1 \end{cases}$$

Debido a que $k = r$ corresponde al punto de frecuencia $\Omega_0 = (2\pi r)/N$, este resultado muestra que la parte del espectro que corresponde a la frecuencia en el intervalo de 0 a $\pi$, se concentra en el punto esperado. Por lo tanto, la DFT $\widetilde{X}_k$ de la señal truncada $\tilde{x}[n]$ es una representación "fiel" de la DTFT de la sinusoide de duración infinita $\cos \Omega_0 n$. La figura 4.19 muestra la gráfica de la DFT $\widetilde{X}_k$, para el caso $N = 21$ y $\Omega_0 = 10\pi/21$ (lo que implica que $r = 5$). Generamos esta gráfica aplicando directamente el comando de MATLAB `dft` a $x[n]$. El programa de MATLAB es

```
q = 10; N = 2*q + 1;
Wo = 10*pi/21;
n = 0:N-1;
x = cos(Wo*n);
Xk = dft(x);
k = 0:N-1;
stem(k,abs(Xk),'filled')
```

Ahora, suponga que $\Omega_0$ no es igual a $2\pi r/N$ para cualquier entero $r$. Sea $\beta$ quien denote al entero con el cual

$$\left| \Omega_0 - \frac{2\pi\beta}{N} \right|$$

tiene el valor más pequeño posible. Entonces, la DFT $\widetilde{X}_k$ tendrá valores diferentes de cero, distribuidos en las cercanías del punto $k = \beta$. Esta característica se conoce como *fuga*, lo que significa que la componente espectral concentrada en $\Omega_0$ se dispersa (o se "fuga") en las componentes de frecuencia en las cercanías de $2\pi\beta/N$. Para el caso $N = 21$ y $\Omega_0 = 9.5\pi/21$, la DFT $\widetilde{X}_k$ aparece en la figura 4.20. Aquí, $\beta = 5$ y por lo tanto, los valores de $\widetilde{X}_k$ se distribuyen alrededor del punto $k = 5$ (y el correspondiente punto $k = N - r$). La gráfica que aparece en la figura 4.20 se generó modificando los comandos anteriores de MATLAB, con $N = 21$ y `Wo = 9.5*pi/21`.

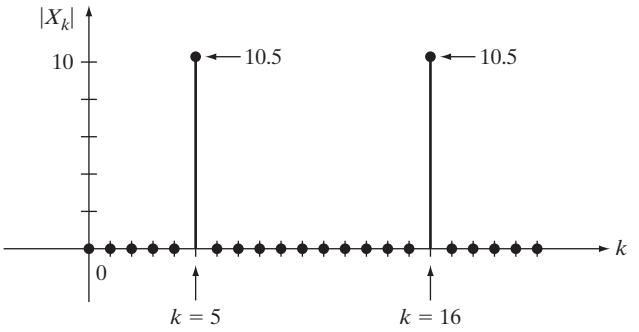



**FIGURA 4.19**

DFT $\widetilde{X}_k$ de la señal truncada $\tilde{x}[n] = (\cos \Omega_0 n)p\left[n - \dfrac{N-1}{2}\right]$ cuando $N = 21$ and $\Omega_0 = 10\pi/21$.

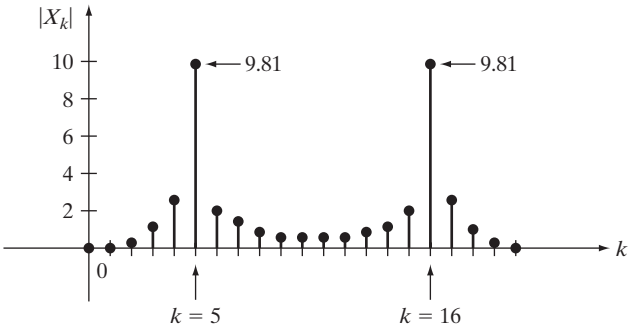



**FIGURA 4.20**

DFT $\widetilde{X}_k$ de la señal truncada $\widetilde{x}[n] = (\cos \Omega_0 n)p\left[n - \frac{N-1}{2}\right]$ cuando $N = 21$ y $\Omega_0 = 9.5\pi/21$.

## 4.4 ALGORITMO FFT

Dada una señal de tiempo discreto $x[n]$, en la sección 4.2 definimos la DFT de $N$ puntos y la DFT inversa como

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{4.53}$$

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{4.54}$$

De (4.53) vemos que, para cada valor de $k$, calcular $X_k$ a partir de $x[n]$ requiere $N$ multiplicaciones. Por lo tanto, calcular $X_k$ para $k = 0, 1,\ldots, N-1$ requiere $N^2$ multiplicaciones. De manera similar, de (4.54) se desprende que calcular $x[n]$ a partir de $X_k$ también requiere $N^2$ multiplicaciones.

Debemos mencionar que las multiplicaciones de (4.53) y (4.54) en general son complejas; es decir, los números que estamos multiplicando son complejos. La multiplicación de dos números complejos requiere cuatro multiplicaciones reales. En el siguiente análisis, contamos el número de multiplicaciones complejas. No consideraremos la cantidad de sumas requeridas para calcular la DFT o la DFT inversa.

Debido a que la evaluación directa de (4.53) o (4.54) requiere $N^2$ multiplicaciones, esto puede ocasionar muchísimos cálculos si $N$ es grande. Es evidente que (4.53) o (4.54) puede calcularse con el algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT), el cual requiere de $(N \log_2 N)/2$ multiplicaciones. Ésta es una disminución importante en las $N^2$ multiplicaciones requeridas en la evaluación directa de (4.53) o (4.54). Por ejemplo, si $N = 1024$, la evaluación directa requiere $N^2 = 1{,}048{,}576$ multiplicaciones. En contraste, el algoritmo FFT requiere

$$\frac{1024(\log_2 1024)}{2} = 5120 \text{ multiplicaciones}$$

Existen diferentes versiones del algoritmo FFT. Aquí, el desarrollo se limita a un enfoque en particular, basado en la decimación en el tiempo. Para un tratamiento más profundo del algoritmo FFT, recomendamos al lector a Brigham [1988] o Rabiner y Gold [1975].

La idea básica de la aproximación por decimación en el tiempo es subdividir el intervalo de tiempo en intervalos que tengan menos puntos. Ilustramos esto mostrando primero que el cálculo de $X_k$ puede dividirse en dos partes. Primero, para simplificar la notación, sea $W_N$ igual a $\exp(-j2\pi/N)$. El número complejo $W_N$ es la enésima raíz de la unidad; es decir,

$$W_N^N = e^{-j2\pi} = 1$$

Suponemos que $N > 1$ y, por lo tanto, $W_N \neq 1$. En términos de $W_N$, la DFT de $N$ puntos y la DFT inversa están dadas por

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{4.55}$$

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k W_N^{-kn}, \; n = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{4.56}$$

Ahora, sea $N$ un entero par, de manera que $N/2$ sea un entero. Dada la señal $x[n]$, se definen las señales

$$a[n] = x[2n], \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \frac{N}{2} - 1$$
$$b[n] = x[2n+1], \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \frac{N}{2} - 1$$

Observe que la señal $a[n]$ consiste en los valores de $x[n]$ en los valores pares del índice de tiempo $n$, mientras que $b[n]$ consiste en los valores en los puntos de tiempo impares.

Sean $A_k$ y $B_k$ quienes denoten las DFT de $a[n]$ y $b[n]$ de $N/2$ puntos; es decir,

$$A_k = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} a[n]W_{N/2}^{kn}, \quad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1 \tag{4.57}$$

$$B_k = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} b[n]W_{N/2}^{kn}, \quad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1 \tag{4.58}$$

Sea $X_k$ quien denote la DFT de $N$ puntos de $x[n]$. Entonces, se dice que

$$X_k = A_k + W_N^k B_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1 \tag{4.59}$$

$$X_{(N/2)+k} = A_k - W_N^k B_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1 \tag{4.60}$$

Para verificar (4.59), sustituya las expresiones (4.57) y (4.58) para $A_k$ y $B_k$, en el lado derecho de (4.59). Esto da

$$A_k + W_N^k B_k = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} a[n]W_{N/2}^{kn} + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} b[n]W_N^k W_{N/2}^{kn}$$

Ahora, $a[n] = x[2n]$ y $b[n] = x[2n + 1]$ y, por lo tanto

$$A_k + W_N^k B_k = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[2n]W_{N/2}^{kn} + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[2n + 1]W_N^k W_{N/2}^{kn}$$

Al utilizar las propiedades

$$W_{N/2}^{kn} = W_N^{2kn}, \quad W_N^k W_{N/2}^{kn} = W_N^{(1+2n)k}$$

se obtiene el resultado

$$A_k + W_N^k B_k = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[2n]W_N^{2kn} + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[2n + 1]W_N^{(1+2n)k} \tag{4.61}$$

Si definimos el cambio de índice $\bar{n} = 2n$ en la primera suma del lado derecho de (4.61), y el cambio de índice $\bar{n} = 2n + 1$ en la segunda suma, obtenemos

$$A_k + W_N^k B_k = \sum_{\substack{\bar{n}=0 \\ \bar{n}\ \text{par}}}^{N-2} x[\bar{n}]W_N^{\bar{n}k} + \sum_{\substack{\bar{n}=0 \\ \bar{n}\ \text{impar}}}^{N-1} x[\bar{n}]W_N^{\bar{n}k}$$

$$A_k + W_N^k B_k = \sum_{\bar{n}=0}^{N-1} x[\bar{n}]W_N^{\bar{n}k}$$

$$A_k + W_N^k B_k = X_k$$

Por lo tanto, (4.59) queda demostrada. La demostración de (4.60) es similar, y por lo tanto la omitimos.

Calcular $X_k$ por medio de (4.59) y (4.60) requiere $N^2/2 + N/2$ multiplicaciones. Para ver esto, primero observe que calcular $A_k$ requiere $(N/2)^2 = N^2/4$ multiplicaciones, al igual que $B_k$. Calcular los productos $W_N^k B_n$ en (4.59) y (4.60) requiere $N/2$ multiplicaciones. Entonces, el número total de multiplicaciones es igual a $N^2/2 + N/2$. Esto es $N^2/2 - N/2$ multiplicaciones menos que $N^2$ multiplicaciones. Por lo tanto, cuando $N$ es grande, calcular $X_k$ mediante (4.59) y (4.60) requiere muchas menos multiplicaciones que hacerlo mediante (4.55).

Si $N/2$ es par, cada una de las señales, $a[n]$ y $b[n]$, pueden expresarse en dos partes y, entonces, el proceso anteriormente descrito puede repetirse. Si $N = 2^q$, para algún entero positivo $q$, el proceso de subdivisión puede continuar hasta que se obtengan las señales con un sólo valor diferente de cero (con cada valor igual a uno de los valores de la señal dada $x[n]$).

La figura 4.21 muestra un diagrama de bloques del algoritmo FFT, para el caso $N = 8$. En el extremo izquierdo del diagrama se introducen los valores de la señal dada $x[n]$. Observe el orden (en términos de la posición de las filas) en el que los valores de la señal $x[n]$

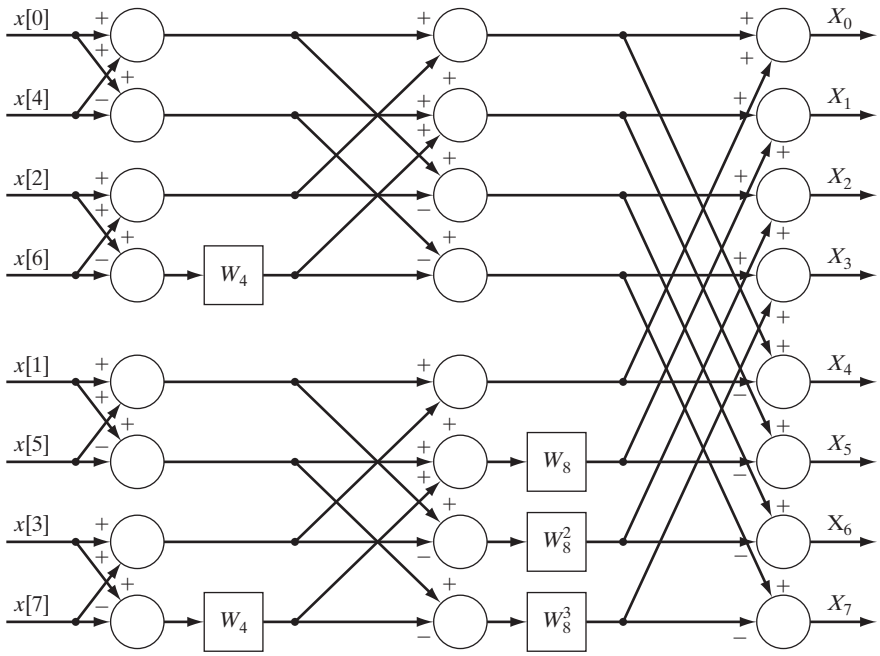



**FIGURA 4.21**
Diagrama de bloques del algoritmo FFT, cuando N = 8.

se aplican al proceso. El orden puede determinarse mediante un proceso llamado *inversión de orden de los bits*. Suponga que $N = 2^q$. Dado un entero $n$ en el intervalo de 0 a $N - 1$, el índice de tiempo $n$ puede representarse mediante la palabra binaria de $q$-bits, para el entero $n$. Al invertir el orden de los bits que forman esta palabra, da como resultado el entero correspondiente a la palabra con el orden invertido de los bits, el cual es la fila en la que el valor de la señal $x[n]$ se aplica al algoritmo FFT. Por ejemplo, cuando $N = 8$, las palabras binarias y las palabras con el orden invertido de los bits que corresponden al índice de tiempo $n$, aparecen en la tabla 4.3. La última columna de la tabla 4.3 proporciona el orden en el que los valores de la señal se aplican al algoritmo FFT que aparece en la figura 4.21.

**TABLA 4.3** Inversión del orden de los bits para el caso $N = 8$

| Punto en el tiempo ($n$) | Palabra binaria | Palabra con el orden invertido de los bits | Orden |
|---|---|---|---|
| 0 | 000 | 000 | $x[0]$ |
| 1 | 001 | 100 | $x[4]$ |
| 2 | 010 | 010 | $x[2]$ |
| 3 | 011 | 110 | $x[6]$ |
| 4 | 100 | 001 | $x[1]$ |
| 5 | 101 | 101 | $x[5]$ |
| 6 | 110 | 011 | $x[3]$ |
| 7 | 111 | 111 | $x[7]$ |

El software de MATLAB contiene comandos para calcular la FFT y la FFT inversa, denotadas por `fft` e `ifft`. Los comandos `fft` e `ifft` son intercambiables por los comandos `dft` e `idft` que utilizamos en los ejemplos de la sección 4.2. Los siguientes ejemplos y los de la próxima sección muestran el uso de estos comandos.

### 4.4.1 Aplicaciones del algoritmo FFT

El algoritmo FFT es muy útil para una amplia variedad de aplicaciones que involucran el procesamiento de señales digitales y comunicaciones digitales. En esta sección primero mostramos que el algoritmo FFT puede utilizarse para calcular la transformada de Fourier de una señal de tiempo continuo. Después, aplicamos el algoritmo para calcular la convolución de dos señales de tiempo discreto.

**Cálculo de la transformada de Fourier vía la FFT.** Sea $x(t)$ una señal de tiempo continuo con transformada de Fourier $X(\Omega)$. Suponemos que $x(t) = 0$ para toda $t < 0$, de tal manera que la transformada de Fourier $X(\Omega)$ de $x(t)$ está dada por

$$X(\omega) = \int_0^\infty x(t)e^{-j\omega t}\,dt \tag{4.62}$$

Sea $\Gamma$ un número real positivo fijo, y sea $N$ un entero positivo fijo. Mostraremos que mediante el algoritmo FFT podemos calcular $X(\omega)$ para $\omega = k\Gamma, k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$.

Dado un número positivo fijo $T$, la integral en (4.62) puede escribirse de la forma

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{nT+T} x(t)e^{-j\omega t}\,dt \tag{4.63}$$

Suponga que $T$ se elige lo suficientemente pequeño para que la variación en $x(t)$ sea pequeña sobre cada intervalo de $T$ segundos $nT \le t < nT + T$. Entonces la suma en (4.63) puede aproximarse mediante

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_{nT}^{nT+T} e^{-j\omega t}\,dt \right) x(nT) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left( \frac{-1}{j\omega} e^{-j\omega t} \right)_{t=nT}^{t=nT+T} \right] x(nT) \\ &= \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\omega nT} x(nT) \end{aligned} \tag{4.64}$$

Ahora, suponga que para algún entero positivo $N$ lo suficientemente grande, la magnitud $|x(nT)|$ es pequeña para todos los enteros $n \ge N$. Entonces (4.64) se convierte en

$$X(\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega nT} x(nT) \tag{4.65}$$

Al evaluar ambos lados de (4.65) en $\omega = 2\pi k/NT$ obtenemos

$$X\left(\frac{2\pi k}{NT}\right) = \frac{1 - e^{-j2\pi k/N}}{j2\pi k/NT} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi nk/N} x(nT) \tag{4.66}$$

Ahora, sea $X_k$ quien denote la DFT de $N$ puntos, de la señal muestreada $x[n] = x(nT)$. Por definición de la DFT,

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, \ldots, N - 1 \tag{4.67}$$

Al comparar (4.66) y (4.67), se revela que

$$X\left(\frac{2\pi k}{NT}\right) = \frac{1 - e^{-j2\pi k/N}}{j2\pi k/NT} X_k \tag{4.68}$$

Por último, si dejamos que $\Gamma = 2\pi/NT$, (4.68) puede rescribirse de la forma

$$X(k\Gamma) = \frac{1 - e^{-jk\Gamma T}}{jk\Gamma} X_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N - 1 \tag{4.69}$$

Si primero calculamos $X_k$ vía el algoritmo FFT, y después utilizamos (4.69), podemos calcular $X(k\Gamma)$ para $k = 0, 1,\ldots, N - 1$.

Es importante resaltar que la relación (4.69) es una aproximación, por lo cual, los valores calculados de $X(\omega)$ con (4.69) son sólo valores aproximados. Podemos obtener una mejor precisión si tomamos un valor más pequeño para el intervalo de muestra $T$, o si tomamos un valor más grande de $N$. Si el espectro de amplitud $|X(\omega)|$ es pequeño para $\omega > B$, una buena elección para $T$ es el intervalo de muestra $\pi/B$, que corresponde a la frecuencia de muestreo de Nyquist, $\omega_s = 2B$ (vea la sección 5.4). Si la señal dada $x(t)$ es conocida sólo para el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq t_1$, aún podemos seleccionar $N$ para que sea tan grande como queramos, tomando los valores de la señal muestreada $x[n] = x(nT)$ para que sea cero con aquellos valores de $n$, para los cuales $nT > t_1$ (o $n > t_1/T$).

---

### Ejemplo 4.14 Cálculo de la transformada de Fourier mediante la FFT

Considere la señal de tiempo continuo $x(t)$que aparece en la figura 4.22. El programa de MATLAB para la FFT puede utilizarse para calcular $X(\omega)$ con el siguiente procedimiento. Primero, se obtiene una versión muestreada de $x(t)$ y se denota con $x(nT)$, donde $T$ es un pequeño intervalo de muestreo y $n = 0, 1,\ldots, N - 1$. Después se determina la FFT $X_k$ de $x[n] = x(nT)$. Por último, se reescala $X_k$ mediante (4.69) para obtener la aproximación $X(k\Gamma)$ de la verdadera transformada de Fourier $X(\omega)$. A continuación proporcionaremos los comandos de MATLAB para obtener la aproximación. Con el propósito de comparar, el programa también grafica la verdadera transformada $X(\omega)$, la cual puede calcularse de la siguiente forma: sea $x_1(t) = tp_2(t)$, donde $p_2(t)$ es el pulso rectangular de dos segundos centrado en el origen. Después $x(t) = x_1(t - 1)$, y del ejemplo 3.16, la transformada de Fourier de $x_1(t)$ es

$$X_1(\omega) = j2\frac{\omega \cos \omega - \operatorname{sen} \omega}{\omega^2}$$

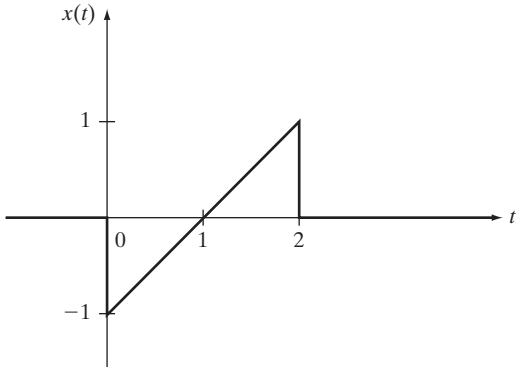



**FIGURA 4.22**
Señal de tiempo continuo del ejemplo 4.14.

Al utilizar la propiedad de desplazamiento en el tiempo vemos que

$$X(\omega) = j2\frac{\omega\cos\omega - \operatorname{sen}\omega}{\omega^2}e^{-j\omega}$$

Ahora, la evaluación de la versión aproximada y de la versión exacta de las transformadas de Fourier de $x(t)$ puede llevarse a cabo mediante los siguientes comandos de MATLAB:

```
N = input('Input N: ');
T = input('Input T: ');
%
% calcula la aproximación de X(w)
t = 0:T:2;
x = [t-1 zeros(1,N-length(t))];
Xk = fft(x);
gam = 2*pi/N/T;
k = 0:10/gam; % para efectos de graficación
Xapp = (1-exp(-j*k*gam*T))/j/k/gam*Xk;
%
% calcula la X(w) real
w = 0.05:.05:10;
Xact = j*2*exp(-j*w).*(w.*cos(w)-sin(w))./(w.*w);
plot(k*gam,abs(Xapp(1:length(k))),'o',w,abs(Xact))
```

Para ejecutar este programa, el usuario primero introduce los valores deseados de $N$ y $T$, y después el programa grafica la transformada aproximada de Fourier, denotada por `Xapp`, y la transformada real, denotada por `Xact`. Ejecutamos el programa con $N = 2^7 = 128$ y $T = 0.1$, en cuyo caso $\Gamma = 2\pi/NT = 0.4909$. Los espectros de amplitud resultante de las transformadas real y aproximada aparecen en la figura 4.23. Observe que la aproximación es razonablemente precisa. Se obtiene más detalle en la gráfica si se incrementa $NT$, y se obtiene una mayor precisión si se disminuye $T$. Ejecutamos de nuevo el programa con $N = 2^9 = 512$ y $T = 0.05$ para que $\Gamma = 0.2454$. El espectro de amplitud resultante aparece en la figura 4.24.

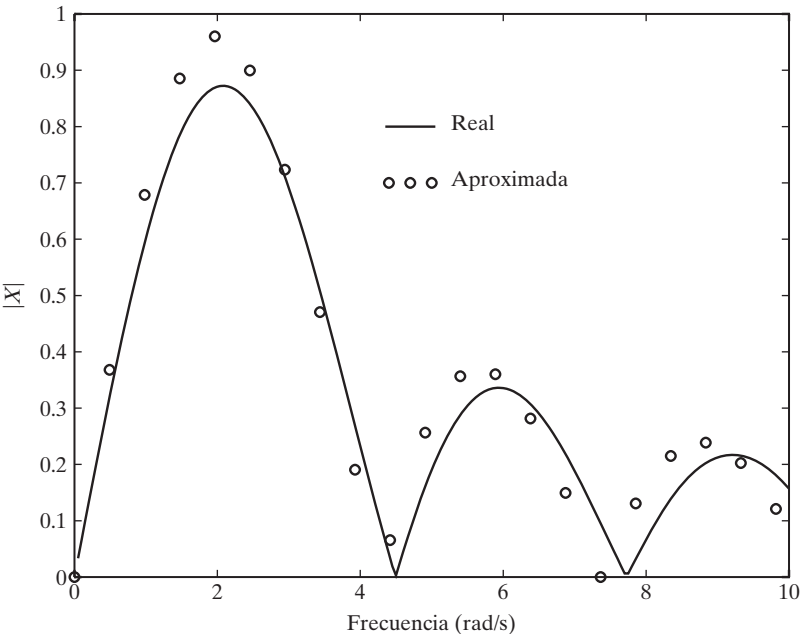



**FIGURA 4.23**
Espectro de amplitud en el caso $N = 128$ y $T = 0.1$.

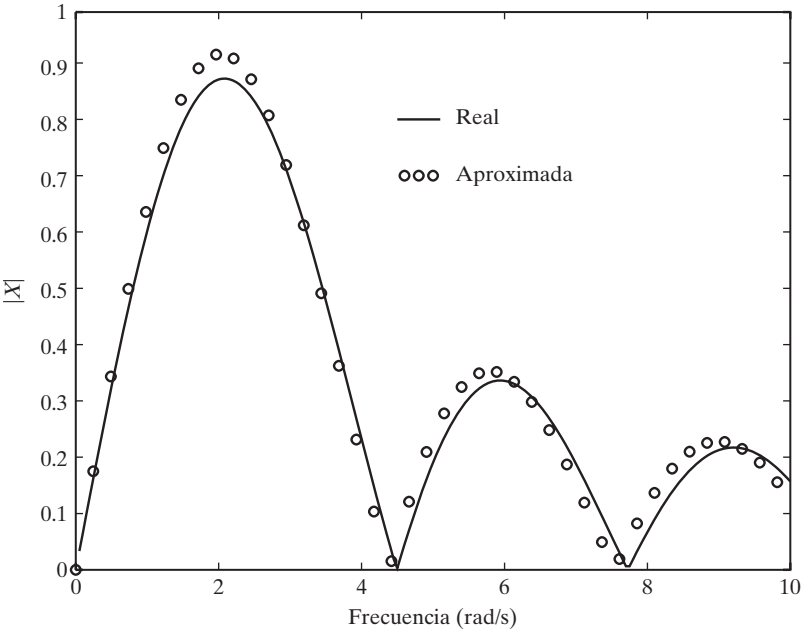



**FIGURA 4.24**
Aspectro de amplitud en el caso $N = 512$ y $T = 0.05$.

Los cálculos requeridos para realizar la aproximación de la transformada de Fourier para una señal genérica se encuentran en un archivo M llamado `contfft.m`, que se encuentra en el sitio Web de este libro. Utilizamos este archivo M definiendo la señal $x$ y el intervalo de tiempo $T$. La transformada de Fourier se calcula con el comando

```
[X,w] = contfft(x,T)
```

donde `x` $= X(\omega)$ y `w` $= 2\pi k/NT$.

**Cómo realizar una convolución mediante la FFT.** El algoritmo FFT puede utilizarse para calcular la convolución de dos señales de tiempo discreto de la siguiente forma. Dadas las señales $x[n]$ y $v[n]$, con $x[n] = 0$ para $n < 0$ y $n \geq N$, y $v[n] = 0$ para $n < 0$ y $n > Q$, sea $r$ igual al entero positivo más pequeño, tal que $N + Q \leq 2^r$, y sea $L = 2^r$. Las señales $x[n]$ y $v[n]$ pueden "rellenarse con ceros" de tal forma que

$$x[n] = 0, n = N, N + 1, \ldots, L - 1$$
$$v[n] = 0, n = Q + 1, Q + 2, \ldots, L - 1$$

Entonces, las DFT de $L$ puntos de $x[n]$ y $v[n]$ pueden calcularse mediante el algoritmo FFT. Con $X_k$ y $V_k$ iguales a las DFT, por la propiedad de convolución de la DTFT y (4.48), la convolución $v[n]*x[n]$ es igual a la DFT inversa de $L$ puntos del producto $V_kX_k$, la cual también puede calcularse con el algoritmo FFT. Este método requiere de aproximadamente $(1.5L)\log_2 L + L$ multiplicaciones. En contraste, calcular $v[n]*x[n]$ con la suma de convolución requiere de aproximadamente $0.5L^2 + 1.5L$ multiplicaciones.

---

### Ejemplo 4.15 Convolución mediante la FFT

Suponga que $v[n]$ está dada por $v[n] = (0.8)^n u[n]$, la cual aparece en la figura 4.25, y la señal $x[n]$ es el pulso rectangular de la figura 4.26. La convolución $v[n]*x[n]$ pudo calcularse evaluando la suma de convolución (vea el capítulo 2); sin embargo, aquí calcularemos $v[n]*x[n]$, utilizando el método FFT.

En este ejemplo no existe un entero finito $Q$ para el que $v[N] = 0$ para toda $n > Q$. Sin embargo, de la figura 4.25 vemos que $v[n]$ es muy pequeña para $n > 16$ y, por lo tanto, $Q$ puede tomarse como 16. Debido a que la señal $x[n]$ es cero para toda $n \geq 10$, el entero $N$ previamente definido es igual a 10.

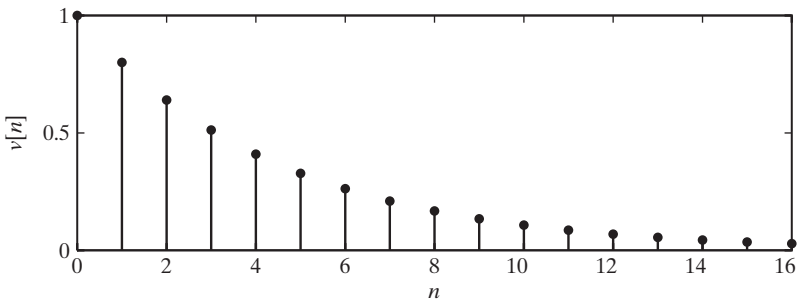



**FIGURA 4.25**
La señal $v[n]$ del ejemplo 4.15.

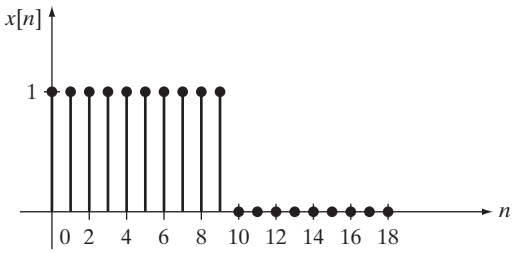



**FIGURA 4.26**
La señal $x[n]$ del ejemplo 4.15.

Por lo tanto, con $Q = 16$, $N + Q = 26$, y el valor entero más pequeño de $r$, para el que $N + Q \leq 2^r$, es $r = 5$. Con $L = 2^5 = 32$, la DFT de $L$ puntos de las versiones rellenas de $v[n]$ y $x[n]$ pueden calcularse con el archivo `fft` de MATLAB. Los comandos de MATLAB para generar las DFT de $L$ puntos son

```
n = 0:16; L = 32;
v = (.8).^n;
Vk = fft(v,L);
x = [ones(1,10)];
Xk = fft(x,L);
```

Las gráficas en MATLAB de los espectros de magnitud y de fase de $v[n]$ y $x[n]$ aparecen en las figuras 4.27 y 4.28, respectivamente. Al establecer $y[n] = v[n]*x[n]$, la DFT de $L$ puntos $Y_k$ de $y[n]$

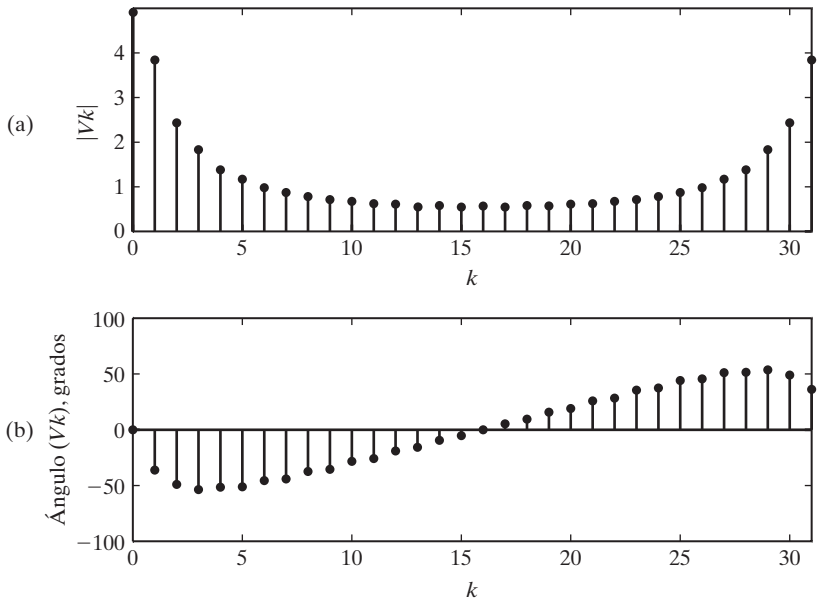



**FIGURA 4.27**
Espectros de (a) magnitud y (b) fase de $v[n]$ correspondientes al ejemplo 4.15.

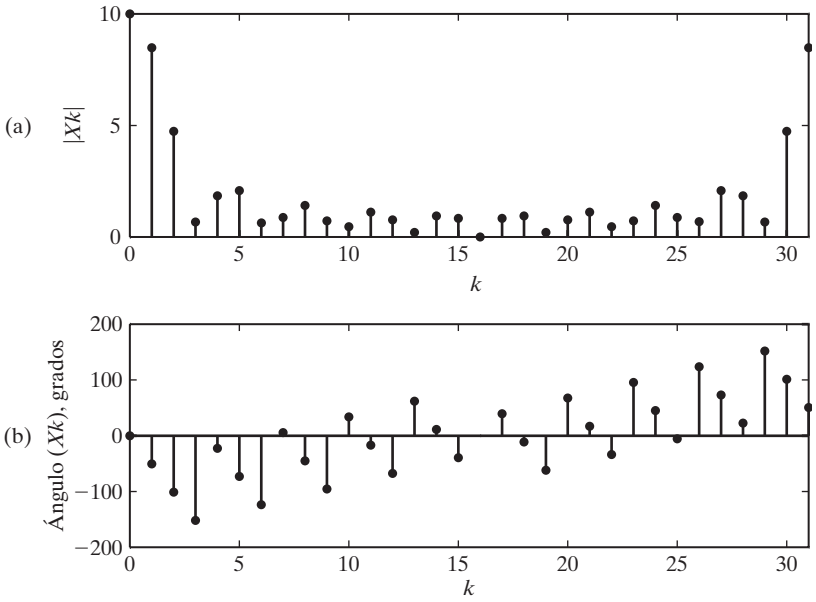



**FIGURA 4.28**
Espectros de (a) magnitud y (b) fase de $x[n]$ correspondientes al ejemplo 4.15.

y la DFT inversa de $Y_k$ (mediante el algoritmo de la FFT inversa) se calculan con los comandos de MATLAB

```
Yk = Vk.*Xk;
y = ifft(Yk, L);
```

La gráfica 4.29 muestra una gráfica de MATLAB para $y[n]$.

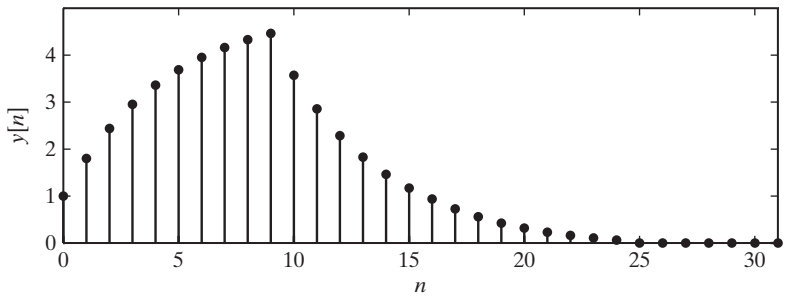



**FIGURA 4.29**
Convolución $y[n] = v[n]*x[n]$ del ejemplo 4.15.

## 4.5 APLICACIÓN AL ANÁLISIS DE DATOS

Una parte importante del análisis de datos es determinar las componentes sinusoidales dominantes (o cíclicas) de una señal dada $x[n]$ que está especificada por $n = 0, 1,\ldots, N - 1$. Aquí, "dominante" se refiere a cualquier componente sinusoidal de $x[n]$, cuyas amplitudes sean mucho más grandes que las del resto de las componentes sinusoidales incluidas en $x[n]$. La DFT de $N$ puntos (o FFT de $N$ puntos) puede aplicarse a $x[n]$ para determinar si existen componentes cíclicas dominantes contenidas en la señal. Esto incluye señales que contienen ruido. Si la señal está dada en forma de tiempo continuo $x(t)$, para aplicar la DFT primero es necesario muestrear $x(t)$ para construir la señal de tiempo discreto $x[n] = x(t)|_{t=nT} = x(nt)$. El intervalo de muestreo $T$ debe seleccionarse de tal manera que $T < \pi/\omega_{\text{máx}}$, donde $\omega_{\text{máx}}$ es la componente de más alta frecuencia contenida en $x(t)$. Es posible que al principio no se conozca un valor para $\omega_{\text{máx}}$, en cuyo caso podemos seleccionarlo mediante "prueba y error".

Un requerimiento clave para determinar si existe una componente sinusoidal dominante en una señal $x[n]$, es que los datos deben contener al menos un ciclo completo de la componente; es decir, el numero $N$ de valores de datos debe ser suficientemente grande. Para ser precisos, debido a que la componente de más baja frecuencia en la representación de suma de sinusoides de $x[n]$ [vea (4.44) o (4.45)] es la primera armónica con frecuencia de tiempo discreto $2\pi/N$, es necesario que $2\pi/N < \Omega_c$, donde $\Omega_c$ es la frecuencia de tiempo discreto en radianes por unidad de tiempo, de la componente cíclica contenida en $x[n]$. Por lo tanto, se requiere que $N > 2\pi/\Omega_c$.

A continuación consideraremos algunos ejemplos sobre cómo determinar componentes cíclicas dominantes mediante la DFT/FFT.

### 4.5.1 Extracción de una componente sinusoidal incrustada en ruido

Suponga que una señal $x(t)$ es la salida de un sensor, pero debido a la naturaleza del proceso de detección, cualquier componente sinusoidal dominante contenida en $x(t)$ está incrustada en el ruido. Las aplicaciones en las que las componentes dominantes de una señal (si existen) pueden ser extremadamente "débiles" y están incrustadas en el ruido, incluyen señales generadas por radiotelescopio que apuntan hacia una ubicación específica en el espacio. Este tipo de situación es fácil de simular con MATLAB. Por ejemplo, considere la gráfica de 200 valores de muestra de la señal $x(t)$ dada en la figura 4.30. A partir de la gráfica, parece que la señal muestreada $x[n]$ varía de manera aleatoria alrededor de cero, y no hay componentes cíclicas dominantes contenidas en $x[n]$.

El espectro de amplitud $|X_k|$ de $x[n]$ aparece en la figura 4.31. La gráfica se generó mediante el comando de MATLAB `abs(fft(x))`, el cual no requiere que $N$ sea una potencia de dos. En la figura 4.31, claramente podemos ver un pico en el espectro de amplitud de $x[n]$, y por lo tanto concluimos que $x[n]$ contiene una componente cíclica dominante. Para determinar la frecuencia correspondiente al pico de la figura 4.31, esquematizamos los valores de $|X_k|$ para $k = 0$ a 25 mediante una gráfica de líneas. El resultado aparece en la figura 4.32, la cual muestra que el valor del pico de $|X_k|$ ocurre en $k = 11$. Por lo tanto, la frecuencia de la componente cíclica dominante es $2\pi k/N = 2\pi(11)/200 = (0.11)\pi$ radianes por unidad de tiempo. De la figura 4.32 también podemos ver que los valores de $|X_k|$ para valores de $k$ en las cercanías a $k = 11$, son comparables con los demás valores de $|X_k|$ para $k \neq 11$, y por lo tanto ahí no parece haber una fuga (vea el ejemplo 4.13). Esto indica que la frecuencia de $(0.11)\pi$ radianes por unidad de tiempo debe estar cerca de la frecuencia real de

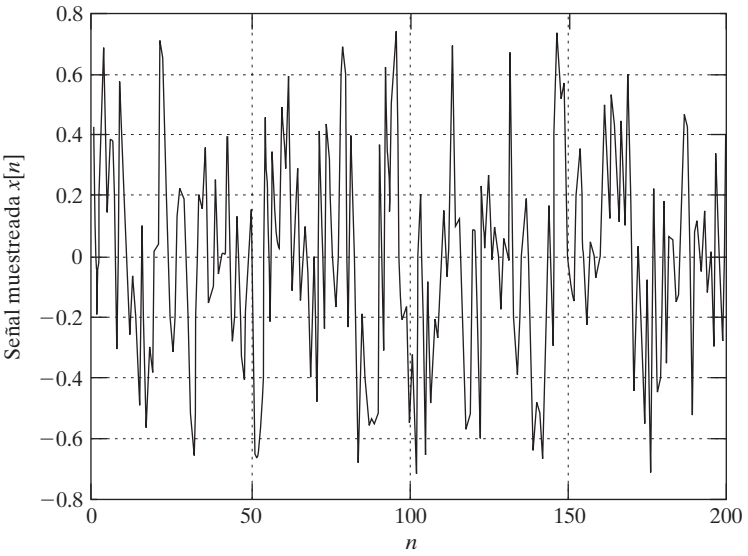



**FIGURA 4.30**
Señal muestreada.

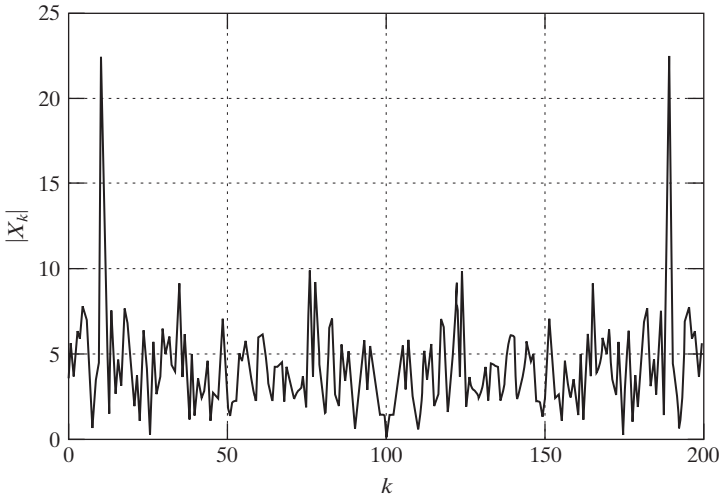



**FIGURA 4.31**
Espectro de amplitud de la señal correspondiente al ejemplo 4.30.

la componente sinusoidal dominante; y, de hecho, así es, conforme el término sinusoidal en $x[n]$ es igual a $(0.3)\text{sen}[(0.112)\pi n]$. Si el espectro de amplitud hubiese indicado que había una fuga, podríamos haber utilizado un valor diferente para $N$. Esto lo mostramos en la siguiente aplicación.

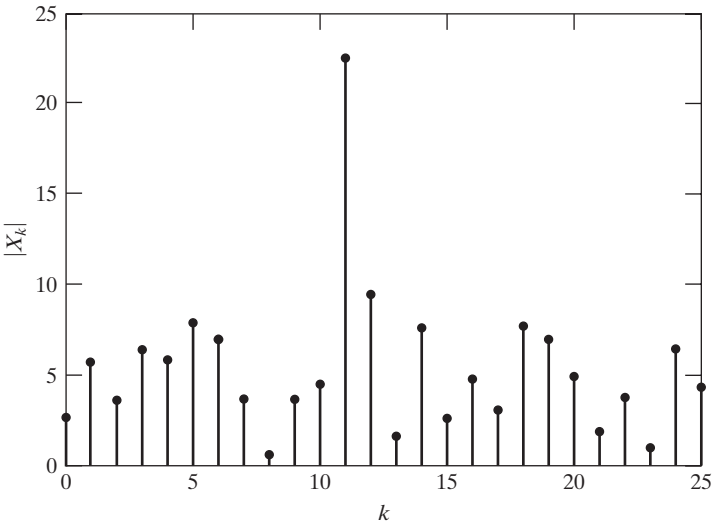



**FIGURA 4.32**
Gráfica de líneas de $|X_k|$ para $k = 0, 1, 2,..., 25$.

### 4.5.2 Análisis de información sobre manchas solares

Se sabe que el grado de la actividad de las manchas solares sigue un ciclo de 11 años. Es evidente que la información sobre las manchas solares está disponible en el Royal Observatory of Belgium, donde se encuentra el Sunspot Index Data Center (SIDC). La información puede descargarse desde este centro, en el sitio Web:

http://sidc.oma.be/index.php3

Para conseguir la información, vaya a este sitio Web y haga un clic en "Sunspots download of data" ubicado en el lado izquierdo de la página Web. Después, cuando aparezca esta página, haga un clic en "monthly and monthly smoothed sunspot number", lo cual produce una tabla con la primera columna con el año y mes, y la tercera columna con el número promedio de manchas solares para ese mes. La cuarta columna es el "valor suavizado" de la cantidad promedio de manchas solares para el mes. Observe que la información está disponible desde enero de 1749 hasta el mes y el año actuales. Para analizar la información del periodo deseado, utilice el comando copiar de Microsoft (si está utilizando MSDOS) y sólo copie los datos de la tabla correspondiente al periodo que desee, y después péguelos en una hoja de cálculo de Microsoft Excel. En el análisis que consideramos aquí, seleccionamos enero de 1977 como la fecha inicial, y diciembre de 2001 como fecha final de nuestro periodo de interés; esto cubre 25 años de información, con 12 valores de datos por cada año, por lo que hay un total de 300 valores.

Después de copiar los datos del periodo deseado, abra Microsoft Excel y péguelos en una hoja de cálculo. A manera de comprobación, debe haber 300 filas llenas en la hoja de cálculo, con toda la información ubicada en la primera columna. Ahora es necesario colocar la información en un formato de cuatro columnas. Para hacerlo, resalte la primera columna de la tabla, después haga un clic en el menú "Datos" y haga un clic en "Texto en columnas".

En el cuadro de diálogo que aparece, seleccione "De ancho fijo", y haga un clic en "Finalizar". Después de este paso, los datos de la hoja de cálculo deben aparecen en un formato de cuatro columnas. Por último, haga un clic en "Guardar como" y guarde el archivo con el nombre "sunspotdata.csv" en un subdirectorio que contenga la versión de estudiante de MATLAB. Haga un clic en "Aceptar" y en "Sí" en los dos cuadros de diálogo que aparecen.

Para comprobar que el proceso de descarga funciona, después de haber creado el archivo sunspotdata.csv, ejecute los siguientes comandos de MATLAB:

```
spd=csvread('sunspotdata.csv',0,2,[0 2 299 2]);
plot(spd)
grid
xlabel('Month')
ylabel('Average Number of Sunspots')
```

Observe que en el comando `csvread` que acabamos de proporcionar, la primera fila que es leída por MATLAB es Row 0, y la última que es leída es Row 299. Recuerde que MATLAB numera la primera fila de una tabla de datos numéricos como Row 0 (vea la sección 1.2).

Como vimos del programa anterior de MATLAB, la información sobre las manchas solares se denota como *spd* (*sunspot data*), por lo que el número promedio de manchas solares como una función del mes $n$ se denota como $spd[n]$, y el número de meses varía de $n = 1$ hasta $n = 300$ (por lo que $N = 300$). Al ejecutar el programa de MATLAB obtenemos la gráfica de MATLAB que aparece en la figura 4.33. A partir de la gráfica es claro que la actividad de las manchas solares es cíclica, pero no es evidente un valor preciso para el periodo del ciclo, debido a la variabilidad de los datos. Es posible calcular un estimado del

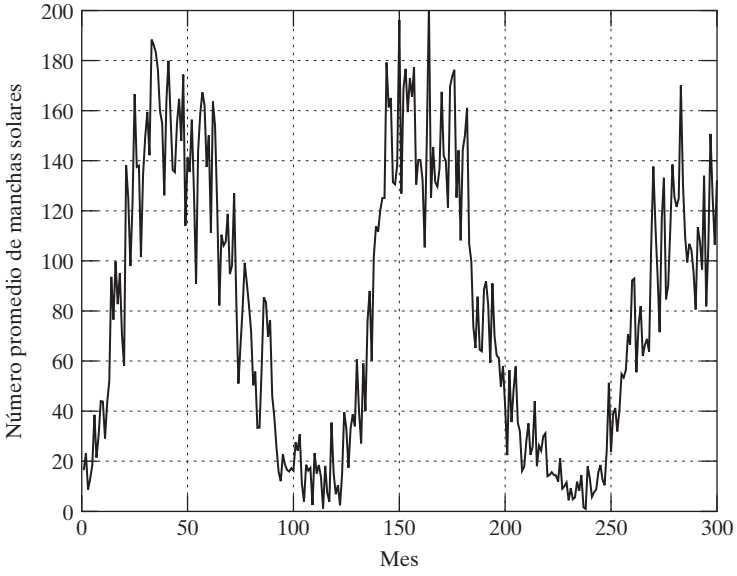



**FIGURA 4.33**
Promedio de manchas solares de enero de 1977 a diciembre de 2001.

periodo a partir de la gráfica si se cuenta el número de meses entre la ocurrencia del primer pico y la ocurrencia del segundo, en los datos que muestra la figura 4.33. Al verificar los valores de $spd[n]$, generados por los comandos anteriores de MATLAB, se revela que el valor más grande de $spd[n]$ al formarse el primer pico es 188.4, lo cual ocurre en el mes 33 (es decir, $n = 33$), y el valor más grande de $spd[n]$ al formarse el segundo pico es 200.3, lo cual ocurre en el mes 164. Por lo tanto, una estimación del periodo es $164 - 33 = 131$ meses, o $131/12 = 10.9$ años, lo cual está cercano al valor real de 11 años.

Ahora podemos realizar un análisis de la DFT de $spd[n]$. Primero, a partir de la gráfica de $spd[n]$ dada en la figura 4.33, es evidente que $spd[n]$ tiene una gran componente constante. Como explicamos en la sección 4.2, la componente constante es igual al valor promedio de $spd[n]$ sobre el intervalo de $n = 1$ a $n = 300$. Para facilitar el análisis de $spd[n]$, sustraeremos la componente constante, lo cual resulta en la señal

$$x[n] = spd[n] - \frac{1}{300}\sum_{i=1}^{300} spd[i] \tag{4.70}$$

El espectro de amplitud $|X_k|$ de $x[n]$ aparece en la figura 4.34. En esta figura podemos ver claramente un pico en el espectro de amplitud de $x[n]$ y, por lo tanto, vemos que contiene una componente cíclica dominante. Para determinar la frecuencia correspondiente al pico, graficamos los valores de $|X_k|$ de $k = 0$ a 10, en una gráfica de líneas. El resultado aparece en la figura 4.35, la cual muestra que la información sobre las manchas solares tiene dos componentes sinusoidales dominantes con frecuencias $2\pi k/N = 2\pi(2)/300 = 4\pi/300$ radianes por mes, y $2\pi k/N = 2\pi(3)/300 = 6\pi/300$ radianes por mes, con las frecuencias correspon-

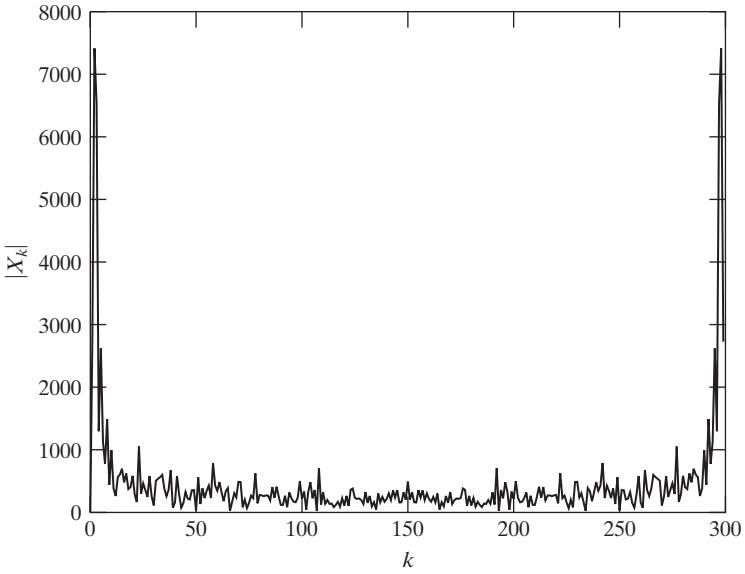



**FIGURA 4.34**
Espectro de amplitud de $x[n]$.

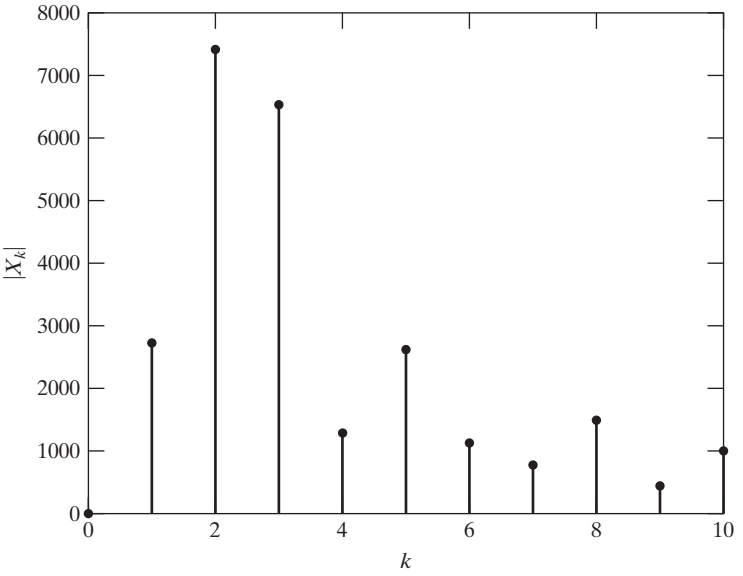



**FIGURA 4.35**
Gráfica de líneas de $|X_k|$ para $k = 0$ a $k = 10$.

dientes a las componentes espectrales en $k = 2$ y $k = 3$, que muestra la figura 4.35. También observe que $|X_0| = 0$, ya que sustrajimos la componente constante.

El gran valor de la componente espectral en $k = 3$ es el resultado de una fuga, ya que como podemos ver en la figura 4.33, el rango de datos ($n = 1$ a $n = 300$) no cubre un múltiplo entero del periodo de la componente cíclica en $spd[n]$ (o en $x[n]$). Para eliminar la fuga, es necesario considerar un rango de datos que cubra un múltiplo entero de $(11)(12) = 132$ meses, que es el periodo de la actividad de las manchas solares. Al tomar el múltiplo entero 2, el rango de datos seleccionado corre de $n = 37$ hasta $n = 300$, lo que da como resultado a $N = 2(132) = 264$ puntos de datos. Este rango puede generarse con el comando de MATLAB `spd(37:300)`. Entonces aplicaremos la DFT a $spd[n]$ para $n = 37$ a $n = 300$. Si denotamos esta señal como $v[n]$, se desprende que

$$v[n] = \text{spd}[n + 36], n = 1, 2, \ldots, 264 \tag{4.71}$$

Por lo tanto, al ir de $spd[n]$ a $v[n]$, el número de puntos de datos (el valor de $N$) ha cambiado de 300 a 264.

Sustraer el valor promedio de $v[n]$ sobre el intervalo $n = 1$ a $n = 264$, da como resultado la señal $w[n]$ dada por

$$w[n] = v[n] - \frac{1}{264}\sum_{i=1}^{264} v[i]$$

La figura 4.36 muestra una gráfica de líneas del espectro de amplitud $|W_k|$ de $w[n]$, para $k = 0$ a $k = 10$. Observe que el valor pico de $|W_k|$ aún ocurre en $k = 2$, pero ahora el valor de $|W_2|$ es mucho más grande que los valores de $|W_k|$ para $k$ en las cercanías de 2. Este resultado

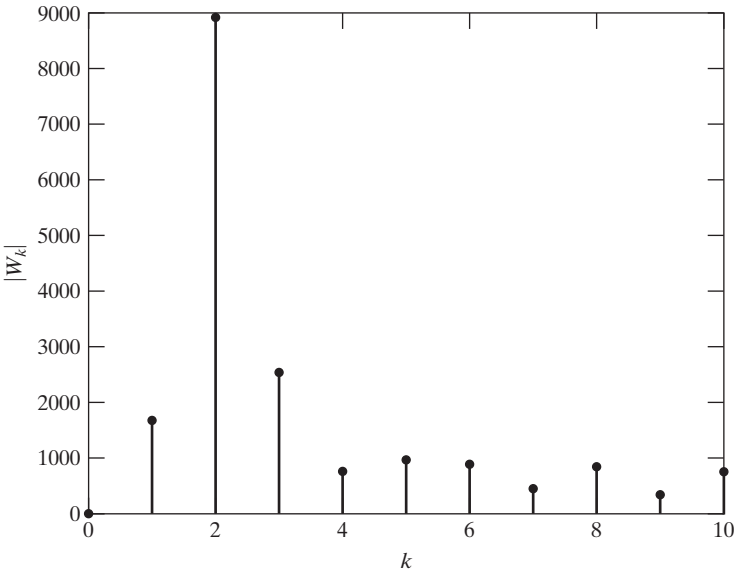



**FIGURA 4.36**
Gráfica de líneas de $|W_k|$ para $k = 0$ a $k = 10$.

muestra que la componente sinusoidal con frecuencia $\Omega = 2\pi k/N = 2\pi(2)/264$ radianes por mes, es la única componente cíclica dominante de $w[n]$ (o $v[n]$). Esta frecuencia corresponde a un periodo de $2\pi/\Omega = 132$ meses, lo que es igual a 11 años. Los valores de $|W_k|$ para $k \neq 2$ se deben principalmente al ruido en la información de las manchas solares. Sin embargo, que los valores de $|W_1|$ y $|W_3|$ sean más grandes, comparados con $|W_k|$ para $k \neq 2$ (vea la figura 4.36), indica que la información de las manchas solares podrían contener otras componentes sinusoidales, además de la componente dominante con frecuencia $4\pi/264$, en cuyo caso, la actividad de las manchas solares no es sólo una "sinusoide pura" consistente en la sola frecuencia $4\pi/264$. Dejamos la evaluación completa de esto a un tratamiento avanzado de análisis de datos.

### 4.5.3 Análisis del precio de acciones

Durante periodos largos (al menos 50 días hábiles), el precio de las acciones con frecuencia sube y baja, formando ciclos; o puede seguir una rampa característica con movimientos erráticos de corto plazo. Para determinar si existen componentes cíclicas dominantes en la información sobre el precio de las acciones, primero es necesario sustraer cualquier rampa característica que pudiera existir en los datos. A continuación llevaremos a cabo esto, y después aplicaremos un análisis de la DFT a los datos transformados. Mostraremos cómo podemos utilizar este proceso a la tendencia del precio de acciones.

Para $n = 1$ a $n = N$, sea $c[n]$ quien denote el precio de cierre de una acción (como QQQQ). El primer paso del análisis es sustraer una rampa de $c[n]$, lo que da como resultado la señal $x[n]$ definida por

$$x[n] = c[n] - c[1] + \left(\frac{c[1] - c[N]}{N - 1}\right)(n - 1), n = 1, 2, \ldots, N \qquad (4.72)$$

Al establecer $n = 1$ en (4.72) vemos que $x[1] = 0$, y al establecer $n = N$ en (4.72) vemos que $x[N] = 0$. Por lo tanto, $x[1] = x[N] = 0$, lo cual es una propiedad muy deseable al aplicar el análisis de la DFT a $x[n]$.

Para ilustrar mejor este análisis, considere el precio de cierre $c[n]$ de QQQQ para el periodo de 50 días hábiles del 1 de marzo de 2004 al 10 de mayo de 2004 (vea el ejemplo 1.4, en el capítulo 1) y, por lo tanto, en este caso $N = 50$. Recuerde que con el comando `csvread('QQQQdata2.csv',1,4,[1 4 50 4])` de MATLAB podemos generar un vector columna que contenga los valores de $c[n]$. Entonces, si calculamos $x[n]$ dada por (4.72), obtenemos la gráfica de MATLAB de $x[n]$ que aparece en la figura 4.37.

El espectro de amplitud de $x[n]$ aparece en la figura 4.38. Observe que $|X_1|$ es mucho más grande que $|X_k|$ para $k$, en las cercanías del valor 1 y, por lo tanto, $x[n]$ tiene una componente cíclica dominante con frecuencia $2\pi/N = 2\pi/50 = (0.04)\pi$. De la forma sinusoidal de $x[n]$ dada por (4.45), podemos ver que $x[n]$ puede aproximarse mediante la componente sinusoidal

$$\hat{x}[n] = \frac{2}{N}\left[R_1 \cos\frac{2\pi}{N}n - I_1 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{N}n\right], n = 1, 2, \ldots, 50 \tag{4.73}$$

donde $R_1 + jI_1 = X_1$. Al tomar la FFT de $x[n]$ mediante MATLAB obtenemos $X_1 = -9.3047 + j34.5869$ y, por lo tanto, $R_1 = -9.3047$ e $I_1 = 34.5869$. Si sustituimos estos valores por $R_1$ e $I_1$, y $N = 50$ en (4.73), obtenemos

$$\hat{x}[n] = -0.372 \cos(0.04\,\pi n) - 1.383 \operatorname{sen}(0.04\,\pi n), n = 1, 2, \ldots, 50 \tag{4.74}$$

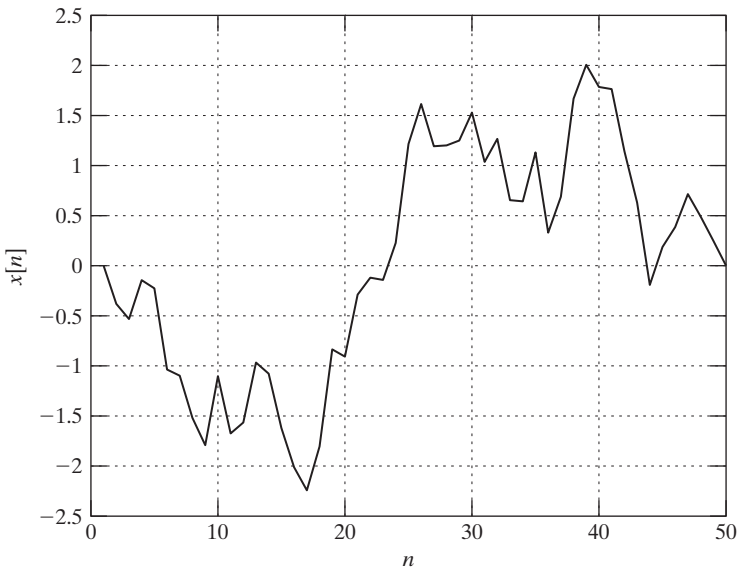



**FIGURA 4.37**
Gráfica de $x[n]$.

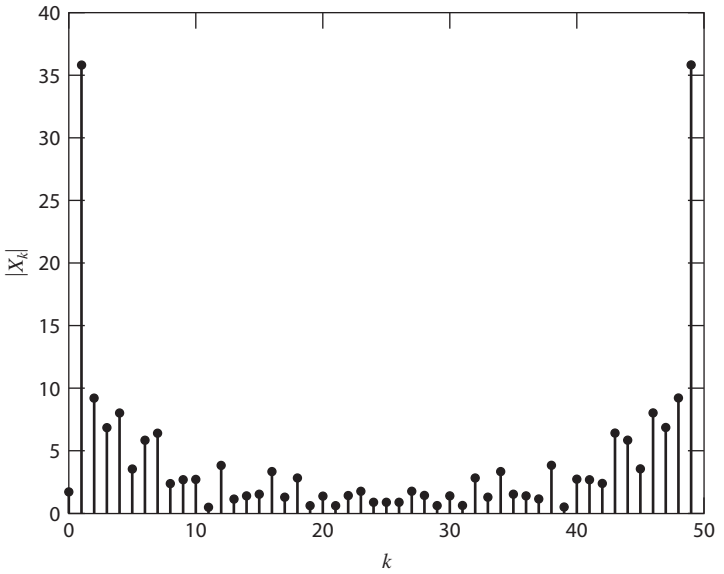



**FIGURA 4.38**
Espectro de amplitud de $x[n]$.

La aproximación $\hat{x}[n]$ dada por (4.74) y $x[n]$, aparecen graficadas en la figura 4.39. El resultado de la figura 4.39 muestra que $\hat{x}[n]$ es una buena aproximación de $x[n]$.

Después podemos generar una "versión suavizada" de $c[n]$, resolviendo (4.72) para $c[n]$ y sustituyendo $x[n]$ por $\hat{x}[n]$. Si denotamos la versión suavizada de $c[n]$ por $\hat{c}[n]$, y utilizamos (4.72), obtenemos

$$\hat{c}[n] = \hat{x}[n] + c[1] - \left(\frac{c[1] - c[50]}{49}\right)(n - 1), n = 1, 2, \ldots, 50 \qquad (4.75)$$

Tanto $c[n]$ como $\hat{c}[n]$ aparecen en la figura 4.40. La pendiente de la versión suavizada $\hat{c}[n]$ de $c[n]$ nos proporciona una indicación de la tendencia de $c[n]$.

En la figura 4.40, observe que no hay retraso en el tiempo entre $c[n]$ y $\hat{c}[n]$. Esto contrasta con el retraso que ocurre cuando $c[n]$ se filtra con filtros PM o FPMPE, como vimos en las secciones 1.4 y 2.1. El método de la DFT que presentamos aquí difiere de manera importante del filtrado, ya que $\hat{c}[n]$ no se calcula a partir de $c[i]$ para $i = n, n - 1,\ldots$, como en el caso de los filtros PM y PMPE, o en el de otros tipos de filtros causales. El método de la DFT considerado en esta aplicación es un ejemplo de *suavización de datos*, y no de filtrado. En la suavización de datos calculamos el valor de $\hat{c}[i]$ de la señal suavizada en el tiempo $i$, donde $0 \leq i \leq N - 1$, utilizando todos los valores de datos $c[n]$ para $n = 0, 1,\ldots, N - 1$. En general, la señal suavizada $\hat{c}[n]$ está más cerca de la parte suave verdadera de $c[n]$ a la mitad del rango de datos, y está alejada de alguna manera en los puntos finales, donde $n = 0$ y $n = N - 1$. Por lo tanto, la pendiente de $\hat{c}[n]$ puede no ser una indicación precisa de la tendencia de $c[n]$ en $n = 0$ y $n = N - 1$.

La figura 4.40 revela que la pendiente de $\hat{c}[n]$ es muy negativa en $n = 50$, lo cual muestra que existe una fuerte tendencia a la baja en el precio de cierre de QQQQ en $n = 50$

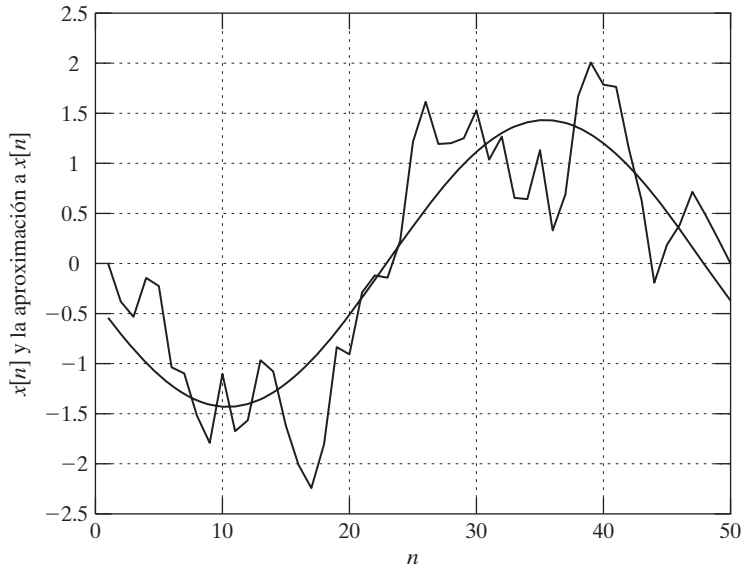



**FIGURA 4.39**
$x[n]$ y la aproximación a $x[n]$.

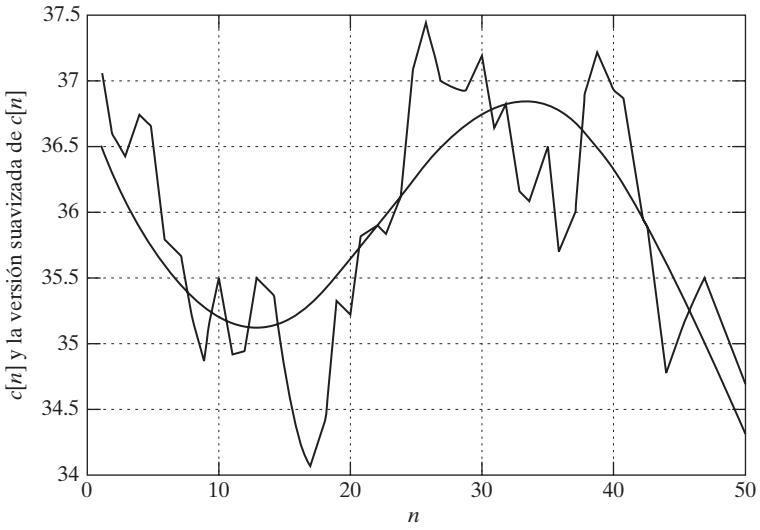



**FIGURA 4.40**
$c[n]$ y la versión suavizada de $c[n]$.

y, por lo tanto, las acciones no deben adquirirse en el cierre del día 50. La versión suavizada de $c[n]$ puede recalcularse cuando se tengan disponibles nuevos valores para $c[n]$. Una señal de compra se generaría cuando la pendiente de $\hat{c}[n]$ se vuelva positiva. Una señal de venta se generaría si la pendiente de $\hat{c}[n]$ pasa de positiva a negativa. Este método para negociar no siempre funciona bien, ya que, como vimos previamente, la pendiente de $\hat{c}[n]$ puede no ser una indicación precisa de la tendencia de $c[n]$ en $n = N - 1$. El lector interesado debe practicar bastante esta estrategia, utilizando datos históricos antes de intentar utilizarlos para una tendencia actual.

## 4.6 RESUMEN DEL CAPÍTULO

La transformada de Fourier de tiempo discreto (DTFT) se utiliza para determinar el contenido de frecuencia de señales de tiempo discreto. La DTFT de una señal $x[n]$ es una función $X(\Omega)$ de la variable frecuencia $\Omega$, definida como

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

La DTFT resultante es periódica, con periodo $2\pi$. Para una señal $x[n]$ valuada en reales, la función magnitud $|X(\Omega)|$ es una función par de $\Omega$, y la función ángulo $\angle X(\Omega)$ es una función impar de $\Omega$. Por lo tanto, el espectro de frecuencia puede graficarse sólo sobre el intervalo $0 \leq \Omega \leq \pi$. La frecuencia que aparece en algunas de las gráficas es normalizada por $\pi$, lo que resulta en un intervalo de frecuencia de 0 a 1. Algunas propiedades útiles de la DTFT incluyen la linealidad, los desplazamientos en el tiempo por la izquierda y por la derecha, la multiplicación por una sinusoide, y la convolución en el dominio del tiempo.

Cuando la señal de tiempo discreto $x[n]$ es limitada por el tiempo, es decir, $x[n] = 0$ para $n < 0$ y $n \geq N$ para algún entero positivo $N$, la transformada discreta de Fourier (DFT) es igual a la DTFT en las frecuencias discretas $\Omega = 2\pi k/N$, con los valores de la transformada dada por

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, \ldots, N - 1$$

La DFT con frecuencia se utiliza en lugar de la DTFT, cuando el contenido de frecuencia de una señal $x[n]$ necesita calcularse de manera numérica. Este cálculo en realidad es una aproximación de la DTFT, cuando la señal no es limitada por el tiempo, y necesita truncarse para realizar la DFT. Los errores de aproximación pueden hacerse pequeños si los valores de las partes truncadas de la señal son despreciables, o si la señal es periódica y la longitud de la señal truncada es un múltiplo entero del periodo.

La DFT es muy útil para el análisis numérico de datos de tiempo continuo, que se ha grabado digitalmente mediante el muestreo de señales. La FFT, un algoritmo rápido para calcular la DFT, se utiliza por lo regular en aplicaciones de ingeniería, donde se lleva a cabo el procesamiento de señales de información medida. En estos casos, el ingeniero o científico está en realidad interesado en el contenido de frecuencia de una señal de tiempo continuo. La FFT de la señal muestreada puede utilizarse para calcular de manera aproximada la transformada de Fourier de tiempo continuo de una señal. La aproximación mejora si el periodo de muestreo $T$ disminuye, y la resolución de la gráfica mejora si el producto $NT$ se incrementa donde $N$ corresponde al número de puntos en el registro de datos. Si la señal es periódica, entonces la fuga en el pico alrededor de la frecuencia fundamental puede dismi-

nuirse si se hace que $N$ sea igual a un múltiplo entero del periodo fundamental de la señal. Esto se ilustra en el ejemplo que involucra información sobre manchas solares, en la sección 4.5. En dicha sección, también se muestra que la DFT (o la FFT) puede utilizarse para extraer las componentes cíclicas dominantes de una señal, con el objetivo de realizar un análisis de señales.

## PROBLEMAS

**4.1.** Calcule las DTFT de las señales de tiempo discreto que aparecen en la figura P4.1. Exprese las DTFT en la forma más sencilla posible. Grafique los espectros de amplitud y de fase, para cada señal.

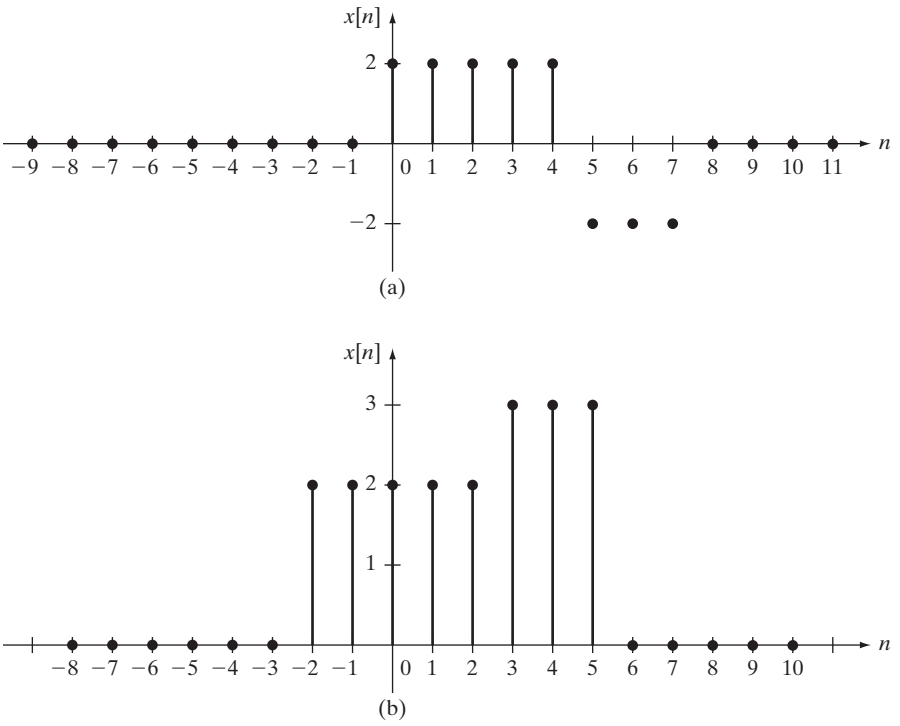



**FIGURA P4.1**

**4.2.** Demuestre la siguiente relación:

$$\sum_{n=q_1}^{q_2} r^n = \frac{r^{q_1} - r^{q_2+1}}{1 - r}$$

*Pista:* multiplique ambos lados de la ecuación por $(1 - r)$.

**4.3.** Dividiendo la DTFT $X(\Omega)$ en tres sumatorias, (de $n = -\infty$ a $n = -1; n = 0;$ y $n = 1$ a $n = \infty$) y aplicando la fórmula de Euler, demuestre lo siguiente:

**(a)** Si $x[n]$ es una función par de $n$, entonces $X(\Omega) = x[0] + \sum_{n=1}^{\infty} 2x[n] \cos \Omega n$.

**(b)** Si $x[n]$ es una función impar de $n$, entonces $X(\Omega) = x[0] - \sum_{n=1}^{\infty} j2x[n] \text{ sen } \Omega n$.

**4.4.** Calcule la DTFT de las siguientes señales de tiempo discreto; grafique los espectros de amplitud y de fase para cada señal:

**(a)** $x[n] = (0.8)^n u[n]$

**(b)** $x[n] = (0.5)^n \cos 4n\, u[n]$

**(c)** $x[n] = n(0.5)^n u[n]$

**(d)** $x[n] = n(0.5)^n \cos 4n\, u[n]$

**(e)** $x[n] = 5(0.8)^n \cos 2n\, u[n]$

**(f)** $x[n] = (0.5)^{|n|}, -\infty < n < \infty$

**(g)** $x[n] = (0.5)^{|n|} \cos 4n, -\infty < n < \infty$

**4.5.** Una señal de tiempo discreto $x[n]$ tiene una DTFT

$$X(\Omega) = \frac{1}{e^{j\Omega} + b}$$

donde $b$ es una constante cualquiera. Determine la DTFT $V(\Omega)$ de las siguientes:

**(a)** $v[n] = x[n - 5]$

**(b)** $v[n] = x[-n]$

**(c)** $v[n] = nx[n]$

**(d)** $v[n] = x[n] - x[n - 1]$

**(e)** $v[n] = x[n] * x[n]$

**(f)** $v[n] = x[n] \cos 3n$

**(g)** $v[n] = x^2[n]$

**(h)** $v[n] = x[n]e^{j2n}$

**4.6.** Utilice (4.28) o las propiedades de la DTFT para calcular la DTFT inversa de las funciones de frecuencia $X(\Omega)$ que aparecen en la figura P4.6.

**4.7.** Determine la DTFT inversa de las siguientes funciones de frecuencia:

**(a)** $X(\Omega) = \text{sen } \Omega$

**(b)** $X(\Omega) = \cos \Omega$

**(c)** $X(\Omega) = \cos^2 \Omega$

**(d)** $X(\Omega) = \text{sen } \Omega \cos \Omega$

**4.8.** La autocorrelación de una señal de tiempo discreto $x[n]$ se define como

$$R_x[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]x[n + i]$$

Sea $P_x(\Omega)$ quien denote la DTFT de $R_x[n]$.

**(a)** Deduzca una expresión para $P_x(\Omega)$ en términos de la DTFT $X(\Omega)$ de $x[n]$.

**(b)** Deduzca una expresión para $R_x[-n]$ en términos de $R_x[n]$.

**(c)** Exprese $P_x(0)$ en términos de $x[n]$.

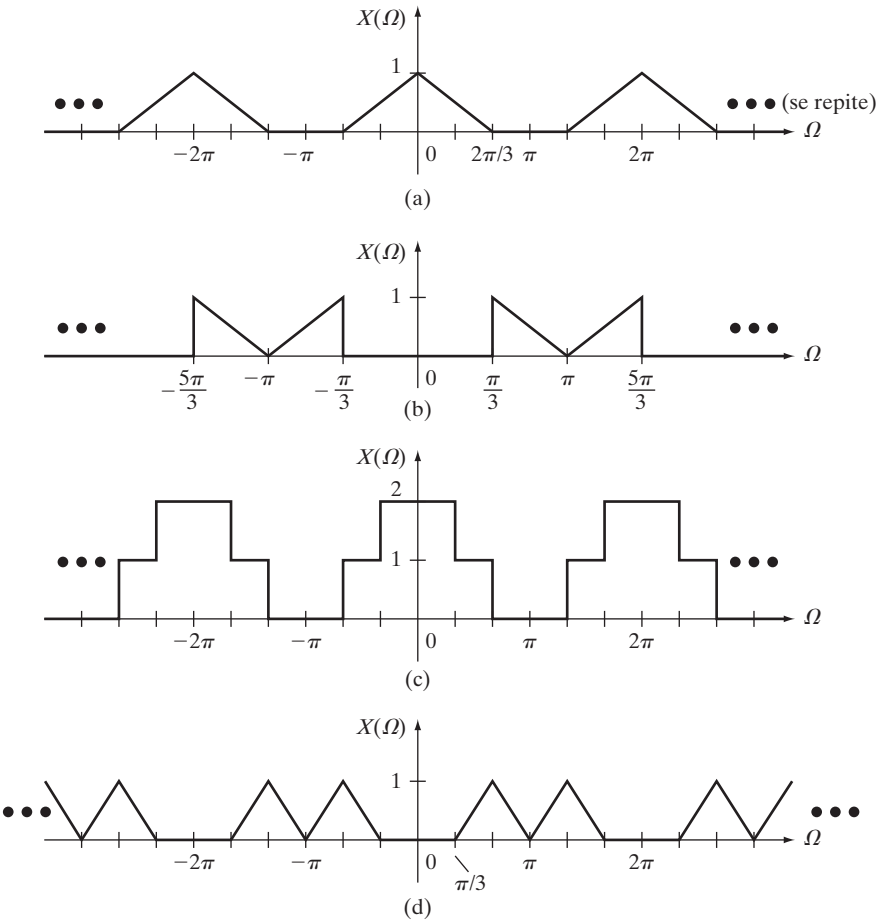



FIGURA P4.6

**4.9.** Calcule la forma rectangular de la DFT de cuatro puntos, de las siguientes señales, donde todas ellas son cero para $n < 0$ y $n \geq 4$:

**(a)** $x[0] = 1, x[1] = 0, x[2] = 1, x[3] = 0$

**(b)** $x[0] = 1, x[1] = 0, x[2] = -1, x[3] = 0$

**(c)** $x[0] = 1, x[1] = 1, x[2] = -1, x[3] = -1$

**(d)** $x[0] = -1, x[1] = 1, x[2] = 1, x[3] = 1$

**(e)** $x[0] = -1, x[1] = 0, x[2] = 1, x[3] = 2$

**(f)** $x[0] = 1, x[1] = -1, x[2] = 1, x[3] = -1$

**(g)** Calcule la DFT para cada una de las señales anteriores, utilizando el archivo M `dft` de MATLAB. Compare estos resultados con los obtenidos de forma analítica en los incisos (a) a (f).

**4.10.** Verifique la relación dada en la ecuación (4.42).

**4.11.** Deduzca la forma sinusoidal (4.45) en el caso en que $N$ es par.

**4.12.** Calcule la forma sinusoidal de las señales del problema 4.9.

**4.13.** Utilizando el archivo M `dft` de MATLAB, calcule la DFT de 32 puntos de las señales (a)-(f). Exprese su respuesta graficando la amplitud $|X_k|$ y la fase $\angle X_k$ de las DFT.

**(a)** $x[n] = 1, 0 \le n \le 10, x[n] = 0$ para cualquier otra $n$

**(b)** $x[n] = 1, 0 \le n \le 10, x[n] = -1, 11 \le n \le 20, x[n] = 0$ para cualquier otra $n$

**(c)** $x[n] = n, 0 \le n \le 20, x[n] = 0$ para cualquier otra $n$

**(d)** $x[n] = n, 0 \le n \le 10, x[n] = 20 - n, 11 \le n \le 20, x[n] = 0$ para cualquier otra $n$

**(e)** $x[n] = \cos(10\pi n/11), 0 \le n \le 10, x[n] = 0$ para cualquier otra $n$

**(f)** $x[n] = \cos(9\pi n/11), 0 \le n \le 10, x[n] = 0$ para cualquier otra $n$

**4.14.** Utilizando el archivo M `dft` de MATLAB, calcule la magnitud de la DFT de 32 puntos $X_k$ de las siguientes señales:

**(a)** $$x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \dfrac{1}{n}, & n = 1, 2, 3, \ldots, 31, \\ 0, & n = 32, 33, \ldots \end{cases}$$

**(b)** $$x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \dfrac{1}{n^2}, & n = 1, 2, 3, \ldots, 31 \\ 0, & n = 32, 33, \ldots \end{cases}$$

**(c)** $$x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \dfrac{1}{n!}, & n = 1, 2, 3, \ldots, 31 \\ 0, & n = 32, 33, \ldots \end{cases}$$

**(d)** Compare los resultados obtenidos para los incisos (a) a (c). Explique las diferencias en los resultados.

**4.15.** Considere la señal de tiempo discreto

$$x[n] = \begin{cases} r[n] - 0.5, & n = 0, 1, 2, \ldots, 31 = N - 1 \\ 0, & \text{todas las demás } n \end{cases}$$

donde $r$ es una secuencia de números aleatorios distribuidos de manera uniforme entre 0 y 1. Esta secuencia puede generarse mediante el comando de MATLAB `rand(N,1)`. La señal $x[n]$ puede interpretarse como ruido aleatorio. Utilizando el archivo M `dft de Matlab`, calcule la magnitud de la DFT de 32 puntos de $x[n]$. ¿Qué frecuencias esperaría ver en el espectro de amplitud de $x[n]$? Explique.

**4.16.** Utilice el archivo M `dft` de MATLAB con $N = 10$ para aproximar la DFT de la señal graficada en la figura P4.1a. Grafique el espectro de amplitud y el de fase para $X_k$ contra $\Omega = 2\pi k/N$. Compare este resultado con la DTFT obtenida en el problema 4.1, sobre el intervalo de frecuencia $\Omega = 0$ a $\Omega = 2\pi$. Repita para $N = 20$.

**4.17.** Repita el problema 4.16 para la señal graficada en la figura P4.1.b.

**4.18.** Para determinar el efecto de truncado al calcular la aproximación de una DTFT mediante una DFT, considere la señal definida por $x[n] = n(0.5)^n u[n]$.

**(a)** Determine el valor mínimo de $N$ para que la señal tenga magnitud $|x[n]| \le 20\%$ de su valor máximo, para toda $n \ge N$.

**(b)** Utilice MATLAB para calcular la DFT de 50 puntos de la señal truncada $\tilde{x}[n]$ definida por

$$\tilde{x}[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{todas las demás } n \end{cases}$$

donde $N$ se determinó en el inciso (a). Grafique el espectro de amplitud y el de fase de $X_k$ contra $\Omega = 2\pi k/50$.

**(c)** Compare el resultado obtenido en el inciso (b) con la DTFT de $x[n]$ que encontró en el problema 4.4(c).

**(d)** Repita los incisos (a) a (c) para el valor de $N$, tal que la señal tenga la magnitud $|x[n]| \le 5\%$ de su valor máximo, para toda $n \ge N$.

**4.19.** Este problema explora el uso de la FFT para aproximar la transformada de Fourier de señales de tiempo continuo.

**(a)** Calcule la transformada de Fourier de $x(t) = 4e^{-4t}u(t)$.

**(b)** Genere en MATLAB una versión muestreada de la señal $x(t)$ para los casos (i)-(iv), donde $T$ es el tiempo muestreado y $N$ es el número total de puntos. Utilice el archivo M `contfft.m` del libro para calcular la aproximación a $X(\omega)$. Grafique $|X(\omega)|$ contra $\omega$ para la transformada de Fourier exacta obtenida en el inciso (a), y para la transformada de Fourier aproximada obtenida de `contfft`, ambas en la misma gráfica. (Utilice el intervalo $0 \le \omega \le 50$ rad/s).

**(i)** $T = 0.5, N = 10$

**(ii)** $T = 0.1, N = 50$

**(iii)** $T = 0.05, N = 100$

**(iv)** $T = 0.05, N = 400$

**(c)** Identifique las tendencias en precisión y resolución de las gráficas, conforme $T$ disminuye y $NT$ aumenta.

**4.20.** Sea $spd[n]$ quien denote la información mensual de las manchas solares, para el periodo de 33 años de enero de 1875 a diciembre de 1907. Observe que existe un total de (12)(33) = 396 puntos de datos.

**(a)** Descargue la información de la Web, utilizando el procedimiento descrito en la sección 4.5, y genere una gráfica de MATLAB de $spd[n]$ para el periodo de 33 años.

**(b)** Sustraiga la componente constante de $spd[n]$, y después genere una gráfica de MATLAB del espectro de amplitud para $spd[n]$.

**(c)** De su resultado en el inciso (b), verifique que la frecuencia de la componente cíclica dominante tenga el valor esperado.

**(d)** Determine una versión suavizada de $spd[n]$, utilizando sólo la componente constante de $spd[n]$ y su componente cíclica dominante. Genere una gráfica de MATLAB de la versión suavizada de $spd[n]$.

**(e)** Genere una gráfica de MATLAB que conste tanto de $spd[n]$ como de la versión suavizada de $spd[n]$. ¿Qué tanto coincide la versión suavizada con los datos? Explique sus conclusiones respecto a esta coincidencia.

**4.21.** Utilizando el método proporcionado en la sección 4.5, determine una versión suavizada del precio de cierre $c[n]$ de QQQQ para el periodo de 60 días hábiles, del 27 de abril de 2004 al 22 de julio de 2004.

CAPÍTULO

5

# Análisis de Fourier aplicado a sistemas

En este capítulo el análisis de Fourier se aplica al estudio de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo continuo y discreto. El desarrollo comienza en la siguiente sección con el caso de tiempo continuo. En la sección 5.1, el resultado de que la transformada de Fourier de la respuesta a una entrada sea el producto de la transformada de la entrada y la transformada de la respuesta al impulso se utiliza para mostrar que la respuesta de salida resultante de una entrada sinusoidal también es una sinusoide con la misma frecuencia que la entrada, pero cuya amplitud es escalada y su fase desplazada. Esto nos lleva a la idea de la función de respuesta en frecuencia de un sistema. Esta descripción en el dominio de la frecuencia del comportamiento de un sistema nos ilustra en gran medida la manera en que un sistema procesa una entrada dada para producir una salida resultante.

En la sección 5.2 estudiamos las respuestas a señales de entrada periódicas y no periódicas, mediante la representación en el dominio de Fourier. En las secciones 5.3 y 5.4 aplicamos la teoría de Fourier al filtrado ideal y al muestreo. La sección 5.4 incluye una demostración del famoso teorema de muestreo. Este resultado importante establece que una señal de tiempo continuo y de banda limitada puede ser reconstruida en su totalidad a partir de una versión muestreada de la señal si la frecuencia de muestreo es convenientemente rápida.

En la sección 5.5, la representación en el dominio de la transformada de Fourier de tiempo discreto (DTFT) se genera para un sistema lineal e invariante en el tiempo discreto. La representación en el dominio de la DTFT es la contraparte de tiempo discreto de la representación de la transformada de Fourier de un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo. En la sección 5.6 ilustramos la representación en el dominio de la DTFT, aplicando la teoría a ejemplos específicos de filtros digitales. En la sección 5.7 presentamos un resumen del capítulo.

## 5.1 ANÁLISIS DE FOURIER DE LOS SISTEMAS DE TIEMPO CONTINUO

Considere un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo con respuesta al impulso $h(t)$. Como explicamos en la sección 2.6, la respuesta de salida $y(t)$ resultante de una entrada $x(t)$ está dada por la relación de convolución

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t - \lambda)\, d\lambda \tag{5.1}$$

En este capítulo no asumimos que el sistema sea necesariamente causal y, por lo tanto, la respuesta al impulso $h(t)$ puede ser diferente de cero para $t < 0$. A lo largo de este capítulo suponemos que la respuesta al impulso $h(t)$ es totalmente integrable, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty \tag{5.2}$$

La condición (5.2) es una clase de *condición de estabilidad* del sistema dado. Un punto clave a resaltar es que los resultados de este capítulo *no son válidos en general*, a menos que se satisfaga la condición (5.2). Como un resultado de la condición de integrabilidad (5.2), la transformada ordinaria de Fourier $H(\omega)$ de la respuesta $h(t)$ está dada por

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}\,dt \tag{5.3}$$

Como vimos en la sección 3.6, la transformada de Fourier de la convolución de dos señales de tiempo continuo es igual al producto de las transformadas de las señales. Por lo tanto, si tomamos la transformada de Fourier de ambos lados de (5.1), obtenemos

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \tag{5.4}$$

donde $X(\omega)$ es la transformada de Fourier de la entrada $x(t)$. La ecuación (5.4) es la representación en el dominio de Fourier (o dominio de $\omega$) del sistema dado. Ésta es una representación en el *dominio de la frecuencia* del sistema dado, ya que las cantidades en (5.4) son funciones de la variable frecuencia $\omega$.

A partir de la representación en el dominio de $\omega$ (5.4), vemos que el espectro de frecuencia de la salida $Y(\omega)$, es igual al producto $H(\omega)$ por el espectro de frecuencia de la entrada $X(\omega)$. Si consideramos la magnitud y el ángulo de ambos lados de (5.4), vemos que el espectro de amplitud $|Y(\omega)|$ de la respuesta de salida $y(t)$, está dado por

$$|Y(\omega)| = |H(\omega)||X(\omega)| \tag{5.5}$$

y el espectro de fase $\angle Y(\omega)$, está dado por

$$\angle Y(\omega) = \angle H(\omega) + \angle X(\omega) \tag{5.6}$$

La ecuación (5.5) muestra que el espectro de amplitud de la salida es igual al producto de $|H(\omega)|$ por el espectro de amplitud de la entrada, y (5.6) muestra que el espectro de fase de la salida es igual a la suma de $\angle H(\omega)$ y el espectro de fase de la entrada. Como veremos, estas relaciones nos proporcionan una idea de cómo un sistema procesa las entradas.

### 5.1.1 Respuesta a una entrada sinusoidal

Suponga que la entrada $x(t)$ al sistema definido por (5.1) es la sinusoide

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta), -\infty < t < \infty \tag{5.7}$$

donde $A$ es un número real positivo o negativo, la frecuencia $\omega_0$ se supone positiva, y la fase $\theta$ es cualquiera. Para encontrar la respuesta de salida $y(t)$ resultante de $x(t)$, primero observe que, de la tabla 3.2, la transformada de Fourier $X(\omega)$ de $x(t)$ está dada por

$$X(\omega) = A\pi[e^{-j\theta}\delta(\omega + \omega_0) + e^{j\theta}\delta(\omega - \omega_0)]$$

Si utilizamos (5.4), obtenemos

$$Y(\omega) = A\pi H(\omega)[e^{-j\theta}\delta(\omega + \omega_0) + e^{j\theta}\delta(\omega - \omega_0)]$$

Ahora, $H(\omega)\delta(\omega + c) = H(-c)\delta(\omega + c)$ para cualquier constante $c$ y, por lo tanto,

$$Y(\omega) = A\pi[H(-\omega_0)e^{-j\theta}\delta(\omega + \omega_0) + H(\omega_0)e^{j\theta}\delta(\omega - \omega_0)] \tag{5.8}$$

Debido a que la respuesta al impulso $h(t)$ es valuada en reales, por los resultados de la sección 3.3, $|H(-\omega_0)| = |H(\omega_0)|$ y $\angle H(-\omega_0) = -\angle H(\omega_0)$, y por lo tanto, $H(-\omega_0)$ y $H(\omega_0)$ tienen las formas polares

$$H(-\omega_0) = |H(\omega_0)|e^{-j\angle H(\omega_0)} \text{ y } H(\omega_0) = |H(\omega_0)|e^{j\angle H(\omega_0)} \tag{5.9}$$

Al sustituir (5.9) en (5.8) obtenemos

$$Y(\omega) = A\pi|H(\omega_0)|[e^{-j(\angle H(\omega_0)+\theta)}\delta(\omega + \omega_0) + e^{j(\angle H(\omega_0)+\theta)}\delta(\omega - \omega_0)] \tag{5.10}$$

De la tabla 3.2, la transformada inversa de Fourier de (5.10) es

$$y(t) = A|H(\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \theta + \angle H(\omega_0)), -\infty < t < \infty \tag{5.11}$$

Entonces, la respuesta resultante a la entrada sinusoidal $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$ también es una sinusoide con la misma frecuencia $\omega_0$, pero con la amplitud escalada por el factor $|H(\omega_0)|$ y con la fase desplazada por la cantidad $\angle H(\omega_0)$. Éste es un resultado bastante notable y, de hecho, forma la base del método en el dominio de la frecuencia al estudio de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo.

Debido a que la magnitud y fase de la respuesta sinusoidal están dadas directamente en términos de $|H(\omega)|$ y $\angle H(\omega)$, a $|H(\omega)|$ se le conoce como *función magnitud* del sistema y a $\angle H(\omega)$ como *función fase* del sistema. Además, debido a que la respuesta del sistema a una sinusoide con frecuencia $\omega_0$ puede determinarse directamente a partir de $H(\omega)$, a $H(\omega)$ en general se le conoce como *función de respuesta en frecuencia* del sistema (o *función del sistema*).

### Ejemplo 5.1 Respuesta a entradas sinusoidales

Respuesta a entradas sinusoidales

Suponga que la función de respuesta en frecuencia $H(\omega)$ está dada por $|H(\omega)| = 1.5$ para $0 \leq \omega \leq 20$, $|H(\omega)| = 0$ para $\omega > 20$, y $\angle H(\omega) = -60°$ para toda $\omega$. Entonces, si la entrada $x(t)$ es igual a $2\cos(10t + 90°) + 5\cos(25t + 120°)$ para $-\infty < t < \infty$, la respuesta está dada por $y(t) = 3\cos(10t + 30°)$ para $-\infty < t < \infty$.

### Ejemplo 5.2 Análisis de frecuencia de un circuito *RC*

Considere el circuito *RC* que muestra la figura 5.1. Como indica la figura, la entrada $x(t)$ es el voltaje $v(t)$ aplicado al circuito, y la salida $y(t)$ es el voltaje $v_C(t)$ a través del capacitor. Como vimos en la sección 2.4, la ecuación diferencial de entrada y salida del circuito es

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t) \tag{5.12}$$

Si utilizamos la propiedad de derivación de la transformada de Fourier (vea la tabla 3.1), y después la transformada de Fourier de ambos lados de (5.12), obtenemos el siguiente resultado:

$$j\omega Y(\omega) + \frac{1}{RC}Y(\omega) = \frac{1}{RC}X(\omega) \tag{5.13}$$

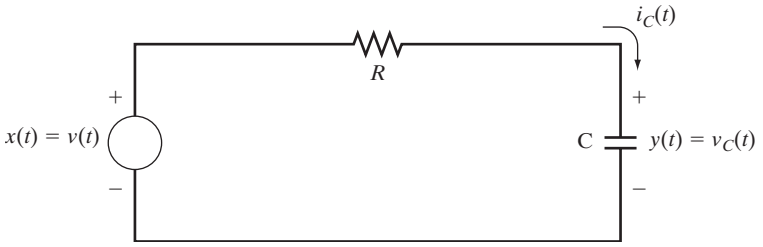



**FIGURA 5.1**
Circuito *RC* del ejemplo 5.2.

Al resolver (5.13) para $Y(\omega)$ obtenemos la representación en el dominio de $\omega$ para el circuito:

$$Y(\omega) = \frac{1/RC}{j\omega + 1/RC} X(\omega) \tag{5.14}$$

Si comparamos (5.4) y (5.14) vemos que la función de respuesta en frecuencia $H(\omega)$ para el circuito *RC* está dada por

$$H(\omega) = \frac{1/RC}{j\omega + 1/RC} \tag{5.15}$$

De (5.15), vemos que la función magnitud $|H(\omega)|$ del circuito está dada por

$$|H(\omega)| = \frac{1/RC}{\sqrt{\omega^2 + (1/RC)^2}}$$

y la función fase $\angle H(\omega)$ está dada por

$$\angle H(\omega) = -\tan^{-1} \omega RC$$

Para cualquier valor deseado de $1/RC$, podemos calcular las funciones magnitud y fase mediante MATLAB. Por ejemplo, en el caso en que $1/RC = 1000$, los comandos de MATLAB para generar las funciones magnitud y fase (ángulo) son

```
RC = 0.001;
w = 0:50:5000;
H = (1/RC)./(j*w+1/RC);
magH = abs(H);
angH = 180*angle(H)/pi;
```

Al utilizar estos comandos y los comandos de graficación obtenemos como resultado las gráficas de $|H(\omega)|$ y $\angle H(\omega)$ que aparecen en la figura 5.2. A partir de la figura, observe que

$$|H(0)| = 1, \quad \angle H(0) = 0 \tag{5.16}$$

$$|H(1000)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707, \quad \angle H(1000) = -45^\circ \tag{5.17}$$

$$|H(3000)| = 0.316, \quad \angle H(3000) = -71.6^\circ \tag{5.18}$$

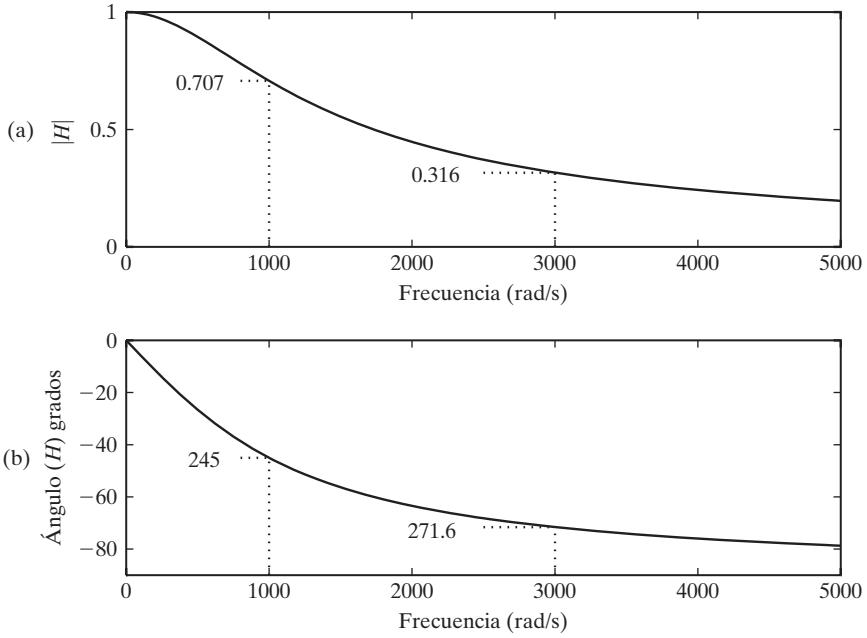



**FIGURA 5.2**
Funciones de (a) magnitud y (b) fase del circuito *RC* del ejemplo 5.2 para el caso 1/*RC* 5 1000.

y

$$|H(\omega)| \to 0 \text{ cuando } \omega \to \infty, \quad \angle H(\omega) \to -90^\circ \text{ cuando } \omega \to \infty \tag{5.19}$$

Ahora podemos calcular la respuesta de salida $y(t)$ del circuito *RC*, resultante de una entrada sinusoidal específica $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$, sustituyendo los valores adecuados de $|H(\omega_0)|$ y $\angle H(\omega_0)$ en la expresión (5.11). Por ejemplo, suponga que $1/RC = 1000$. Entonces, si $\omega_0 = 0$, mediante (5.16) vemos que la respuesta de salida es

$$y(t) = A(1)\cos(0t + \theta + 0) = A\cos\theta, -\infty < t < \infty \tag{5.20}$$

Si $\omega_0 = 1000$ rad/s y utilizamos (5.17) obtenemos la respuesta

$$y(t) = A(0.707)\cos(1000t + \theta - 45^\circ), -\infty < t < \infty \tag{5.21}$$

y si $\omega_0 = 3000$ rad/s y utilizamos (5.18) obtenemos

$$y(t) = A(0.316)\cos(3000t + \theta - 71.6^\circ), -\infty < t < \infty \tag{5.22}$$

Por último, de (5.19) vemos que la respuesta de salida $y(t)$ tiende a cero cuando $\omega_0 \to \infty$.

De (5.20), vemos que cuando $\omega_0 = 0$, de manera que la entrada es la señal constante $x(t) = A\cos\theta$, la respuesta es igual a la entrada. Por lo tanto, el circuito *RC* pasa una entrada de cd sin atenuarla y sin producir desplazamiento de fase alguno. De (5.21), vemos que cuando $\omega_0 = 1000$ rad/s, el circuito *RC* atenúa la entrada sinusoidal por un factor de 0.707, y la fase desplaza la entrada sinusoidal $-45^\circ$; y mediante (5.22) vemos que cuando $\omega_0 = 3000$ rad/s, el factor de atenuación es de 0.316 y el desplazamiento de fase es $-71.6^\circ$. Por último, cuando $\omega_0 \to \infty$, la magnitud de la salida tiende a cero, mientras el desplazamiento de fase tiende a $-90^\circ$.

El comportamiento del circuito *RC* se resume mediante la observación de que pasa señales de baja frecuencia sin una atenuación significativa y sin producir algún desplazamiento importante de fase. Conforme se incrementa la frecuencia, las atenuaciones y los desplazamientos de fase se vuelven más grandes. Por último, cuando $\omega_0 \to \infty$, el circuito *RC* "bloquea" por completo la entrada sinusoidal. Como resultado de este comportamiento, el circuito *RC* es un ejemplo de un *filtro pasa baja*, es decir, el circuito "pasa", sin mucha atenuación, entradas sinusoidales cuyas frecuencias $\omega_0$ son menores que 1000 rad/s, y de manera importante atenúa entradas sinusoidales cuyas frecuencias están muy por encima de los 1000 rad/s. Como explicamos en el capítulo 8, el intervalo de frecuencia de 0 a 1000 rad/s (en el caso $1/RC = 1000$) se conoce como *ancho de banda* del circuito *RC*.

Para ilustrar más las características del filtro pasa baja del circuito *RC*, ahora suponga que la entrada es la suma de dos sinusoides:

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2)$$

Debido a la linealidad del circuito *RC*, la respuesta correspondiente $y(t)$ es la suma de las respuestas a las sinusoides individuales:

$$y(t) = A_1|H(\omega_1)| \cos(\omega_1 t + \theta_1 + \angle H(\omega_1)) + A_2|H(\omega_2)| \cos(\omega_2 t + \theta_2 + \angle H(\omega_2))$$

Para demostrar el efecto del filtrado pasa baja, calcularemos la respuesta a la entrada

$$x(t) = \cos 100t + \cos 3000t$$

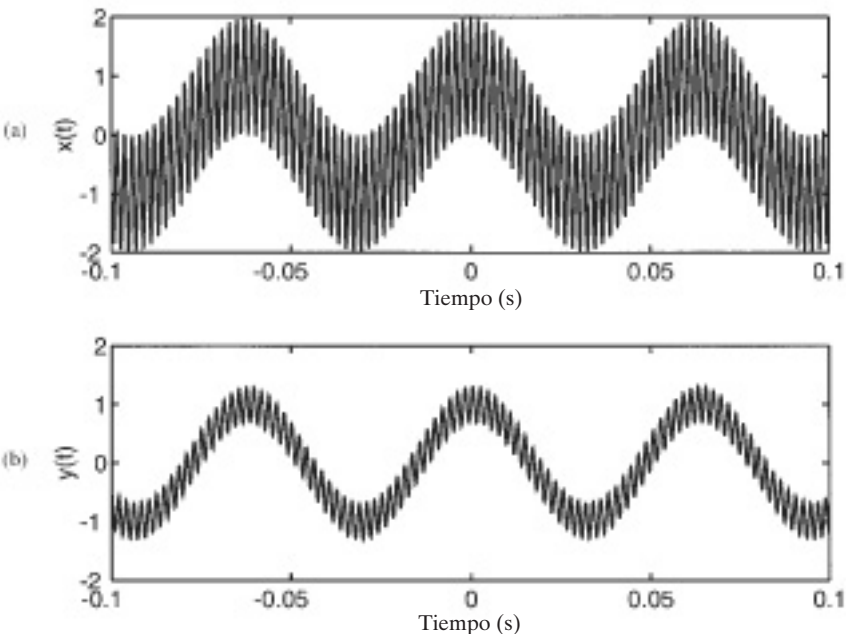



**FIGURA 5.3**
(a) Entrada y (b) salida del circuito *RC*, cuando $1/RC = 1000$.

en el caso en que $1/RC = 1000$. Los comandos de MATLAB utilizados para generar $y(t)$ son

```
RC = 0.001;
t = -.1:.2/1000:.1;
w1 = 100; w2 = 3000;
Hw1 = (1/RC)/(j*w1+1/RC);
Hw2 = (1/RC)/(j*w2+1/RC);
x = cos(w1*t)+cos(w2*t);
 y = abs(Hw1)*cos(w1*t+angle(Hw1)) +
abs(Hw2)*cos(w2*t+angle(Hw2));
```

Las gráficas para $x(t)$ y $y(t)$ aparecen en la figura 5.3. Observe que la amplitud de la señal de baja frecuencia es casi la misma en ambas gráficas. Sin embargo, la componente de alta frecuencia en $x(t)$ es muy evidente, pero es mucho menos importante en $y(t)$, debido a la atenuación del circuito de las señales de alta frecuencia.

### Ejemplo 5.3 Sistema masa-resorte-amortiguador

Sistema de masa-resorte-amortiguador

Considere el sistema masa-resorte-amortiguador que definimos en la sección 1.4 del capítulo 1 (vea la figura 1.25). La ecuación diferencial de entrada y salida del sistema, está dada por

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2} + D\frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = x(t) \tag{5.23}$$

donde $M$ es la masa, $D$ es la constante de amortiguamiento, $K$ es la constante de rigidez, $x(t)$ es la fuerza aplicada a la masa, y $y(t)$ es el desplazamiento de la masa respecto a la posición de equilibrio. Al tomar la transformada de Fourier de ambos lados de (5.23) y al resolver para $Y(\omega)$ obtenemos la siguiente representación en el dominio de $\omega$ para el sistema masa-resorte-amortiguador:

$$Y(\omega) = \frac{1}{M(j\omega)^2 + D(j\omega) + K}X(\omega) = \frac{1}{K - M\omega^2 + jD\omega}X(\omega)$$

Por lo tanto, la función de respuesta en frecuencia del sistema es

$$H(\omega) = \frac{1}{K - M\omega^2 + jD\omega}$$

La magnitud $|H(\omega)|$ de $H(\omega)$ puede determinarse sobre un intervalo de frecuencia, desde una frecuencia inicial hasta una final realizando un barrido senoidal (una sinusoide cuya frecuencia es variada desde la frecuencia inicial hasta la final). Esto puede realizarse con el demo en línea del sistema masa-resorte-amortiguador. Al intentar esto con diversos valores de $M$, $D$ y $K$, obtendrá diferentes formas de la función magnitud $|H(\omega)|$. De hecho, para diferentes valores de $M$, $D$ y $K$, la función magnitud $|H(\omega)|$ tendrá un pico en algún valor positivo de $\omega$. Como explicamos en el capítulo 8, el pico se debe a la resonancia en el sistema masa-resorte-amortiguador.

## 5.2 RESPUESTA A ENTRADAS PERIÓDICAS Y NO PERIÓDICAS

Suponga que la entrada $x(t)$ al sistema definida por (5.1), es periódica tal que $x(t)$ tenga la serie trigonométrica de Fourier dada por la ecuación (3.8):

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k), \quad -\infty < t < \infty$$

Aquí, $\omega_0$ es la frecuencia fundamental de la señal, y $a_0$, $A_k$ y $\theta_k$ son constantes respecto a $t$. De (5.11) se desprende directamente que la respuesta de salida resultante de una entrada sinusoidal $A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$ es $A_k|H(k\omega_0)| \cos(k\omega_0 t + \theta_k + \angle H(k\omega_0))$. De manera similar, la respuesta debida a la entrada constante $a_0$ es $a_0 H(0)$. Entonces, por linealidad, la respuesta a la entrada periódica $x(t)$ es

$$y(t) = a_0 H(0) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k |H(k\omega_0)| \cos(k\omega_0 t + \theta_k + \angle H(k\omega_0)), \quad -\infty < t < \infty \tag{5.24}$$

Debido a que el lado derecho de esta expresión es una forma trigonométrica de la serie de Fourier, se desprende que la respuesta $y(t)$ es periódica. Además, ya que la frecuencia fundamental de $y(t)$ es $\omega_0$, que es la frecuencia fundamental de la entrada $x(t)$, el periodo de $y(t)$ es igual al periodo de $x(t)$. Por lo tanto, la respuesta a una entrada periódica con periodo fundamental $T$, es periódica con periodo fundamental $T$. Ahora, sea $A_k^x$ y $\theta_k^x$ quienes denoten los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier para $x(t)$, y sea $A_k^y$ y $\theta_k^y$ quienes denoten los coeficientes de la serie trigonométrica para la salida resultante $y(t)$. De (5.24),

$$A_k^y = A_k^x |H(k\omega_0)| \quad \text{y} \quad \theta_k^y = \theta_k^x + \angle H(k\omega_0) \tag{5.25}$$

Por lo tanto, la serie de Fourier de la salida puede calcularse directamente de los coeficientes de la serie de Fourier de la entrada.

Como vimos en la sección 3.3, la serie compleja de Fourier dada en (3.19) se relaciona con la serie trigonométrica a través de la relación entre los coeficientes dados en (3.27). Si combinamos (3.27) y (5.25) obtenemos las siguientes expresiones, las cuales podemos graficar para obtener el espectro de línea de $y(t)$:

$$|c_k^y| = \tfrac{1}{2}|H(k\omega_0)| A_k^x \quad \text{y} \quad \angle c_k^y = \theta_k^x + \angle H(k\omega_0) \tag{5.26}$$

Ilustramos este proceso con el siguiente ejemplo:

---

### Ejemplo 5.4 Respuesta a un tren de pulsos rectangulares

Respuesta a entradas periódicas

De nuevo considere el circuito *RC* que analizamos en el ejemplo 5.2 y que aparece en la figura 5.1. El objetivo es determinar el voltaje $y(t)$ en el capacitor resultante del tren de pulsos rectangulares $x(t)$, que aparece en la figura 5.4. De los resultados en el ejemplo 3.2, $x(t)$ tiene la serie trigonométrica de Fourier

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\pi t), \quad -\infty < t < \infty$$

donde $a_0 = 0.5$, y

$$a_k = \frac{2}{k\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} \dfrac{2}{k\pi}(-1)^{(k-1)/2}, & k = 1, 3, 5, \ldots \\ 0, & k = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

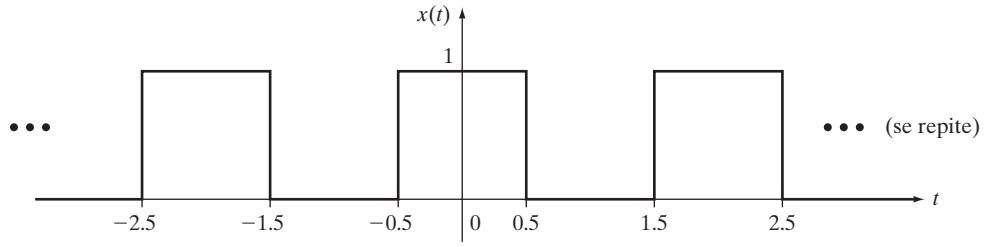



**FIGURA 5.4**
Señal periódica de entrada del ejemplo 5.4.

Al utilizar (3.23), vemos que la magnitud $|c_k^x|$ de los coeficientes de la serie de Fourier para el tren de pulsos rectangulares, está dada por

$$|c_k^x| = \begin{cases} 0.5, & k = 0 \\ 0, & k = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots \\ \dfrac{1}{k\pi}, & k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots \end{cases}$$

El espectro de amplitud (la gráfica de $|c_k^x|$ contra $\omega = k\omega_0 = k\pi$) del tren de pulsos rectangulares aparece en la figura 5.5. La gráfica muestra que $x(t)$ tiene componentes de frecuencia desde cd hasta infinito, con las componentes de alta frecuencia con menos importancia. En particular, de la grafica queda claro que la mayor parte del contenido espectral de $x(t)$ se encuentra en el intervalo de frecuencia de 0 a 40 rad/s. Las "esquinas" que rodean el tren de pulsos rectangulares son resultado de las líneas espectrales en el límite, cuando $k \to \infty$.

Como calculamos en el ejemplo 5.2, la función de respuesta en frecuencia del circuito *RC* es

$$H(\omega) = \frac{1/RC}{j\omega + 1/RC}$$

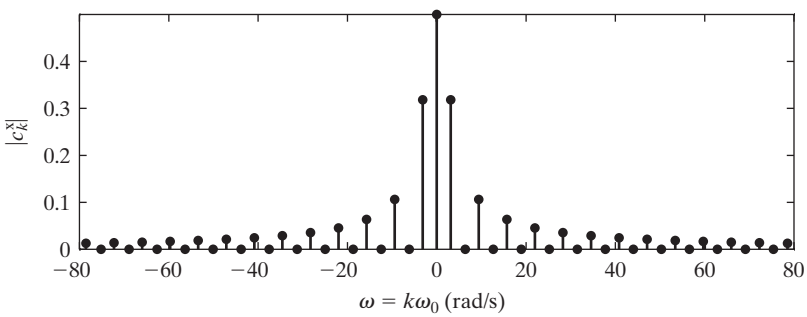



**FIGURA 5.5**
Espectro de amplitud de la entrada periódica del ejemplo 5.4.

Por lo tanto,

$$H(k\omega_0) = H(k\pi) = \frac{1/RC}{jk\pi + 1/RC}$$

y

$$|H(k\pi)| = \frac{1/RC}{\sqrt{k^2\pi^2 + (1/RC)^2}}$$

$$\angle H(k\pi) = -\tan^{-1} k\pi RC$$

Observe que la función magnitud $|H(k\pi)|$ decae conforme el entero $k$ aumenta. Esto es, por supuesto, debido a la característica pasa baja del circuito $RC$. Como explicamos en el ejemplo 5.2, en el caso en que $1/RC = 1000$, el ancho de banda del circuito $RC$ es 1000 rad/s. Para valores positivos cualesquiera de $R$ y $C$, el ancho de banda es igual a $1/RC$ rad/s. Las componentes de frecuencia de una entrada por debajo de $1/RC$ pasan sin atenuaciones importantes, mientras que las componentes de frecuencia por arriba de $1/RC$ se atenúan. Por lo tanto, entre más grande sea el valor de $1/RC$, mayor será el ancho de banda del circuito $RC$, lo que resulta en componentes de más alta frecuencia de la entrada que está pasando a través del circuito.

Para encontrar los coeficientes de la serie de Fourier en la forma de coseno con fase (3.8), utilizamos (3.9) y (3.10), lo que arroja

$$A_k^x = \begin{cases} \dfrac{2}{k\pi}, & k = 1, 3, 5, \ldots \\ 0, & k = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

$$\theta_k^x = \begin{cases} \pi, & k = 3, 7, 11, \ldots \\ 0, & \text{cualquier otra } k \end{cases}$$

Después, al sustituir las expresiones para $A_k^x, \theta_k^x, |H(k\pi)|$, y $\angle H(k\pi)$ en (5.25), obtenemos las siguientes expresiones para los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier para la salida:

$$a_0^y = H(0)a_0^x = 0.5 \tag{5.27}$$

$$A_k^y = \begin{cases} \dfrac{2}{k\pi} \dfrac{1/RC}{\sqrt{k^2\pi^2 + (1/RC)^2}}, & k \text{ impar} \\ 0, & k \text{ par} \end{cases} \tag{5.28}$$

$$\theta_k^y = \begin{cases} \pi - \tan^{-1} k\pi RC, & k = 3, 7, 11, \ldots \\ -\tan^{-1} k\pi RC, & \text{cualquier otra } k \end{cases} \tag{5.29}$$

Podemos ver el efecto del ancho de banda del circuito sobre la salida si graficamos el espectro de amplitud ($|c_k^y| = \frac{1}{2}A_k^y$ contra $\omega = k\pi$) de la salida para diversos valores de $1/RC$. La figura 5.6a a 5.6c muestra el espectro de amplitud de la salida para los valores $1/RC = 1$, $1/RC = 10$, y $1/RC = 100$. Al comparar las figuras 5.5 y 5.6a se revela que cuando el ancho de banda del circuito es 1 rad/s (es decir, $1/RC = 1$), el circuito atenúa mucho del contenido espectral del tren de pulsos rectangulares. Por otra parte, al comparar las figuras 5.5 y 5.6c vemos que se atenúa muy

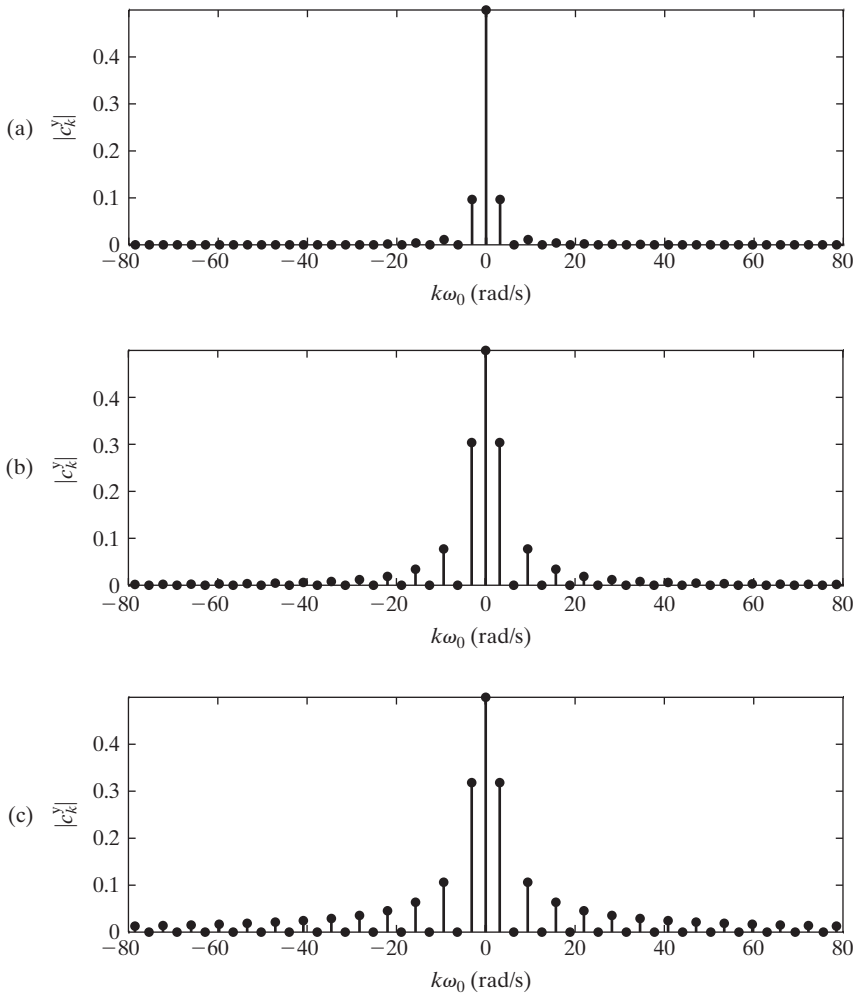



**FIGURA 5.6**
Espectro de amplitud de la salida cuando (a) $1/RC = 1$; (b) $1/RC = 10$; (c) $1/RC = 100$.

poco a las componentes espectrales de la entrada cuando el ancho de banda es de 100 rad/s (es decir, $1/RC = 100$). Por lo tanto, esperaríamos que cuando $1/RC = 1$, el circuito distorsionará de manera importante el tren de pulsos, mientras que cuando $1/RC = 100$ no lo haría demasiado. Para verificar esto, primero calcularemos la respuesta de salida calculando la serie de Fourier de la salida.

De (5.24), (5.27), y (5.28), la serie trigonométrica de Fourier de la salida está dada por

$$y(t) = 0.5 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impar}}}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \frac{1/RC}{\sqrt{k^2\pi^2 + (1/RC)^2}} \cos(k\pi t + \theta_k^y) \tag{5.30}$$

Por definición de $\theta_k^y$ [vea (5.29)], se desprende que

$$\cos(k\pi t + \theta_k^y) = (-1)^{(k-1)/2}\cos(k\pi t - \tan^{-1} k\pi RC), k = 1, 3, 5, \ldots \tag{5.31}$$

Entonces, si sustituimos (5.31) en (5.30) obtenemos la siguiente forma de la serie de Fourier para la salida:

$$y(t) = 0.5 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impar}}}^{\infty} \frac{2}{k\pi}(-1)^{(k-1)/2}\frac{1/RC}{\sqrt{k^2\pi^2 + (1/RC)^2}}\cos(k\pi t - \tan^{-1} k\pi RC) \tag{5.32}$$

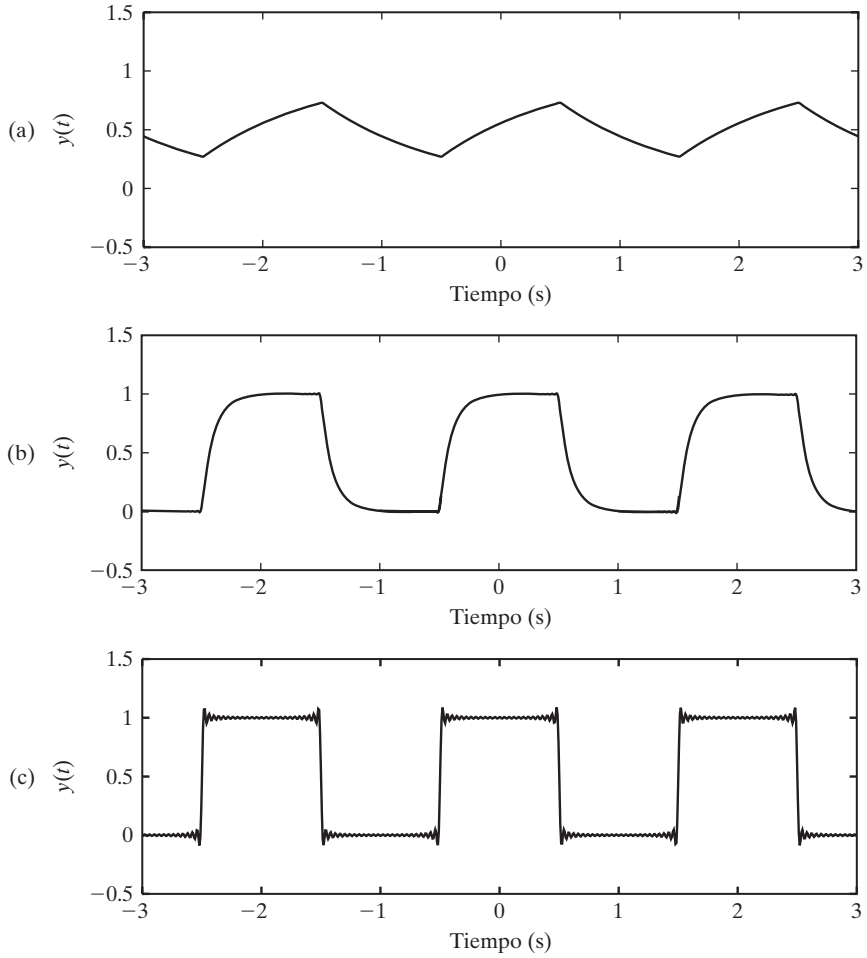



**FIGURA 5.7**
Gráfica de la salida cuando (a) $1/RC = 1$; (b) $1/RC = 10$; (c) $1/RC = 100$.

Debido a que los coeficientes de la serie de Fourier (5.32) para $y(t)$ se vuelven muy pequeños conforme $k$ se incrementa, es posible determinar los valores de $y(t)$ evaluando un número conveniente de los términos comprendidos por (5.32). Los comandos de MATLAB que utilizamos para obtener $y(t)$, para el caso en que $1/RC = 1$ son

```
RC = 1; a0 = .5; H0 = 1; N = 50; w0=pi;
y = a0*H0*ones(1,length(t));
for k=1:2:N,
  Bk = 2/pi/k*(-1)^((k-1)/2);
  H = (1/RC)/(j*k*w0 + 1/RC);
  y = y + Bk*abs(H)*cos(k*w0*t+angle(H));
end
```

Elegimos el valor de $N = 50$ para que fuera lo suficientemente grande y lograr así una buena precisión en la forma de onda de $y(t)$.

La figura 5.7 muestra la respuesta $y(t)$ para los valores $1/RC = 1, 1/RC = 10$, y $1/RC = 100$. En la figura vemos que la respuesta se asemeja más al tren de pulsos de entrada conforme incrementamos el ancho de banda del circuito $RC$, de 1 rad/s (figura 5.7a) a 100 rad/s (figura 5.7c). De nuevo, esperamos este resultado, ya que el circuito pasa más del contenido espectral del tren de pulsos de entrada a medida que se incrementa el ancho de banda del circuito.

### 5.2.1 Respuesta a entradas no periódicas

Podemos calcular la respuesta $y(t)$ que resulta de cualquier entrada $x(t)$ si primero encontramos la transformada de Fourier $Y(\omega)$ de $y(t)$ mediante (5.4). Entonces podemos calcular la salida si consideramos la transformada inversa de Fourier de $H(\omega)X(\omega)$; es decir, $y(t)$ está dada por

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \tag{5.33}$$

En general, calcular $y(t)$ mediante (5.33) resulta complicado debido a la forma integral. En algunos casos es posible determinar $y(t)$ trabajando con los pares de transformadas de la tabla, en lugar de evaluar la integral en (5.33).

#### Ejemplo 5.5 Respuesta del circuito *RC* a un pulso

De nuevo considere el circuito $RC$ de la figura 5.1. En este ejemplo el objetivo es analizar la respuesta al pulso rectangular que muestra la figura 5.8. En el ejemplo 3.9 encontramos que (estableciendo $\tau = 1$) la transformada de Fourier de $x(t)$ es

$$X(\omega) = \text{senc}\frac{\omega}{2\pi} = \frac{\text{sen}(\omega/2)}{\omega/2} = 2\frac{\text{sen}(\omega/2)}{\omega}$$

El espectro de amplitud del pulso aparece en la figura 5.9.

De (5.4), la transformada de Fourier de la salida es

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

donde, de nuevo,

$$H(\omega) = \frac{1/RC}{j\omega + 1/RC}$$

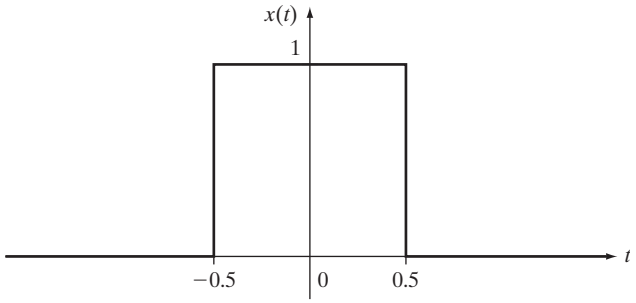



**FIGURA 5.8**
Pulso de entrada del ejemplo 5.5.

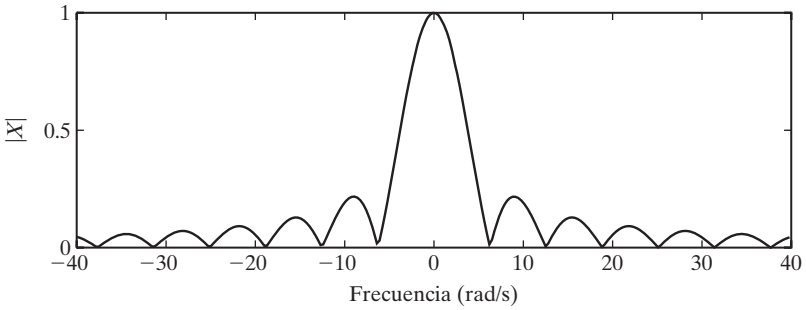



**FIGURA 5.9**
Espectro de amplitud del pulso de entrada.

El espectro de amplitud de la respuesta de salida $y(t)$ aparece en la figura 5.10a, para el caso $1/RC = 1$, y en la figura 5.10b, para el caso $1/RC = 10$. Obtuvimos el espectro de amplitud $|Y(\omega)|$ multiplicando $|H(\omega)|$ por $|X(\omega)|$ en cada frecuencia. Los comandos de MATLAB para obtener $|Y(\omega)|$ cuando $1/RC = 1$ son

```
RC = 1;
w = -40:.3:40;
X = 2*sin(w/2)./w;
H = (1/RC)./(j*w+1/RC);
Y = X.*H;
magY = abs(Y);
```

Como vimos en los ejemplos 5.2 y 5.4, entre más grande sea el valor de $1/RC$, más grande será el ancho de banda del circuito $RC$, lo que significa que los lóbulos laterales de $X(\omega)$ se atenúan menos al pasar por el filtro. En particular, en las figuras 5.9 y 5.10a vemos que cuando $1/RC = 1$, se atenúan de manera importante el lóbulo principal y los lóbulos laterales de $|Y(\omega)|$, en comparación con los de $|X(\omega)|$, lo que es el resultado de establecer demasiado bajo el ancho de banda del circuito (en el caso en que $1/RC = 1$). Como muestra la figura 5.10b, al incrementar el ancho de

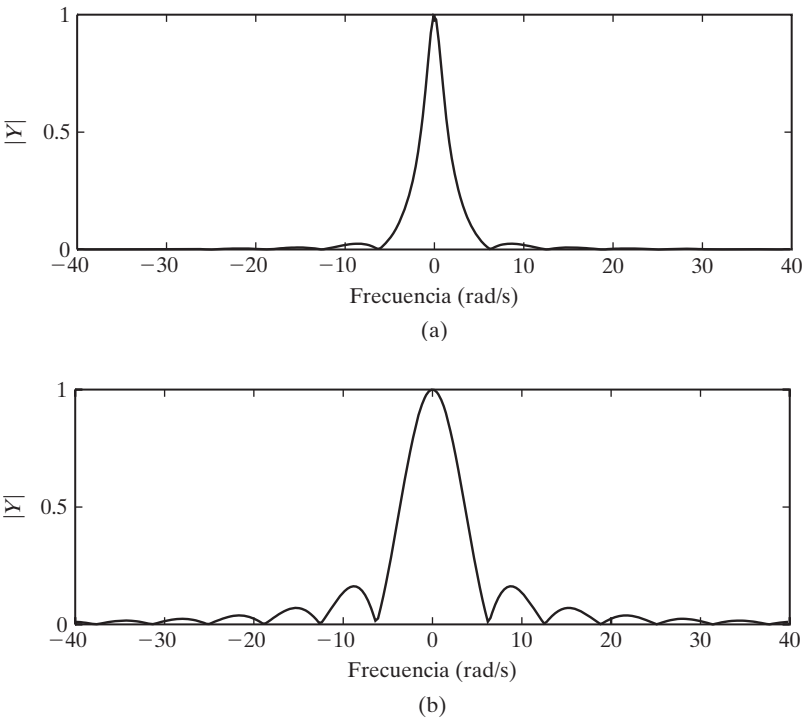



**FIGURA 5.10**
Espectro de amplitud de $y(t)$ cuando (a) $1/RC = 1$, y (b) $1/RC = 10$.

banda estableciendo $1/RC = 10$ da como resultado una menor atenuación de los lóbulos laterales de $|Y(\omega)|$; es decir, existe menos atenuación de las componentes de alta frecuencia de $x(t)$ al pasar por el filtro cuando el ancho de banda es de 10 rad/s. El efecto de filtrar puede analizarse en el dominio de tiempo calculando $y(t)$ para diversos valores de $1/RC$.

Podemos calcular la salida $y(t)$ si consideramos la transformada inversa de Fourier de $H(\omega)X(\omega)$, como está dada por (5.33). Sin embargo, este cálculo resulta tedioso para el presente ejemplo. En su lugar, podemos calcular la respuesta con Symbolic Math Toolbox utilizando los siguientes comandos:

```
syms X H Y y w
X = 2*sin(w/2)./w;
H = (1/RC)./(j*w+1/RC);
Y = X.*H;
y = ifourier(Y);
ezplot(y,[-1 5])
axis([-1 5 0 1.5])
```

También podemos calcular de manera numérica la respuesta de salida si resolvemos la ecuación diferencial para el circuito dado en (5.12), mediante los métodos descritos en la sección 2.5, como el comando `ode45`. Las respuestas en el dominio de tiempo para el caso $1/RC = 1$ y $1/RC = 10$ aparecen en la figura 5.11. Observe que en el caso de un ancho de banda más grande ($1/RC = 10$),

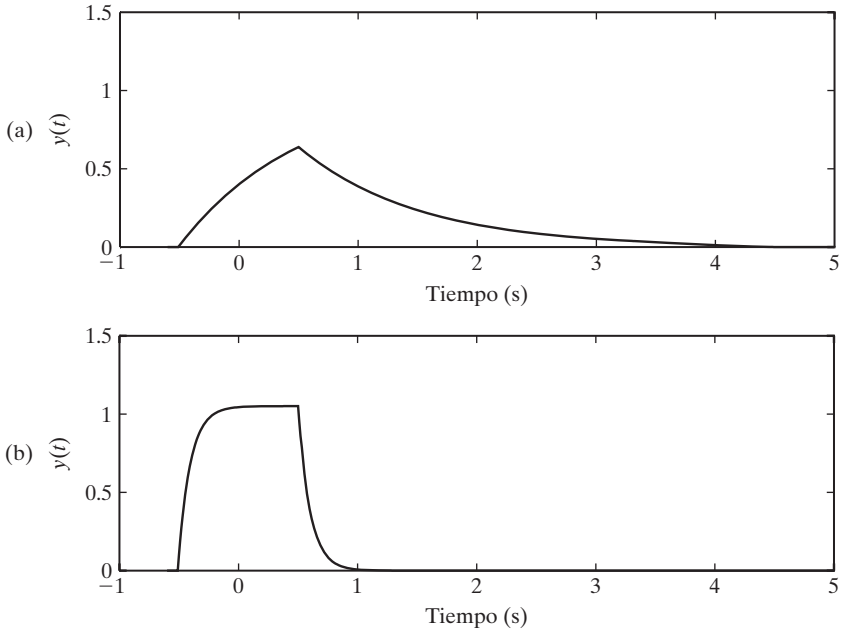



**FIGURA 5.11**
Respuesta de salida cuando (a) $1/RC = 1$ y (b) $1/RC = 10$.

cuanto más pasan por el circuito el lóbulo principal y los lóbulos laterales de $X(\omega)$, la respuesta de salida luce más como el pulso de entrada. Sin embargo, incluso en este caso, cortar las componentes de alta frecuencia de $X(\omega)$ ocasiona que las esquinas del pulso rectangular se suavicen en la respuesta de salida.

## 5.3 ANÁLISIS DE FILTROS IDEALES

Dado un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo con función en frecuencia $H(\omega)$, en la sección 5.1 mostramos que la respuesta de salida $y(t)$ resultante de la entrada sinusoidal $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$, $-\infty < t < \infty$, está dada por

$$y(t) = A|H(\omega_0)|\cos(\omega_0 t + \theta + \angle H(\omega_0)), \quad -\infty < t < \infty \tag{5.34}$$

De (5.34) resulta claro que podemos evitar que una sinusoide con una frecuencia particular $\omega_0$ "pase" por el sistema si seleccionamos $H(\omega)$ tal que $|H(\omega_0)|$ sea cero o muy pequeña. El proceso de "rechazar" sinusoides con frecuencias o intervalos de frecuencia particulares se conoce como *filtrado*, y un sistema que tiene esta característica se conoce como *filtro*.

En el capítulo 1, en el caso de tiempo discreto, consideramos por primera vez el concepto de filtrado cuando estudiamos el filtro PM (promedio móvil). En el caso de tiempo continuo, en las secciones 5.1 y 5.2 mostramos el circuito *RC* a manera de ejemplo de un filtro. En esta sección consideraremos los filtros ideales de tiempo continuo.

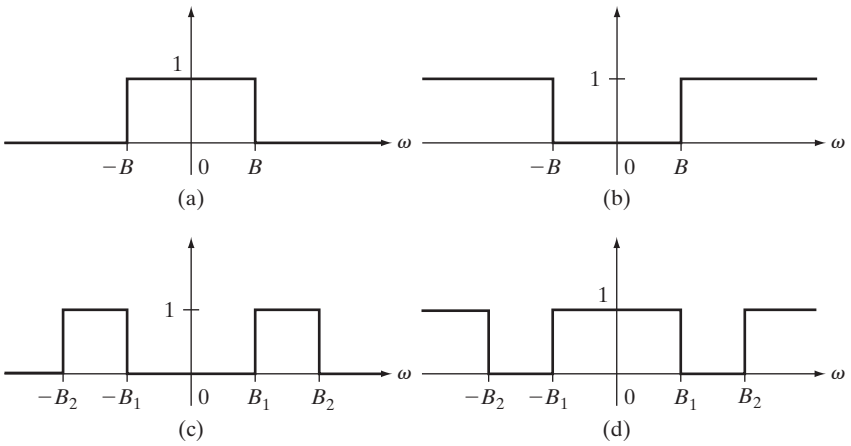



**FIGURA 5.12**
Magnitud de filtros ideales: (a) pasa baja; (b) pasa alta; (c) pasa banda; (d) rechaza banda.

Un *filtro ideal* es un sistema que rechaza por completo las entradas sinusoidales de la forma $x(t) = A \cos \omega_0 t$, $-\infty < t < \infty$, para $\omega_0$ en ciertos intervalos de frecuencia, y no atenúa entradas sinusoidales cuyas frecuencias se encuentran fuera de estos intervalos. Existen cuatro tipos básicos de filtros ideales: pasa baja, pasa alta, pasa banda, y rechaza banda. La magnitud de las funciones de estos cuatro tipos de filtros aparecen en la figura 5.12. Las expresiones matemáticas para estas funciones en magnitud son las siguientes:

$$\text{Ideal pasa baja:} \quad |H(\omega)| = \begin{cases} 1, & -B \le \omega \le B \\ 0, & |\omega| > B \end{cases} \tag{5.35}$$

$$\text{Ideal pasa alta:} \quad |H(\omega)| = \begin{cases} 0, & -B < \omega < B \\ 1, & |\omega| \ge B \end{cases} \tag{5.36}$$

$$\text{Ideal pasa banda:} \quad |H(\omega)| = \begin{cases} 1, & B_1 \le |\omega| \le B_2 \\ 0, & \text{cualquier otra } \omega \end{cases} \tag{5.37}$$

$$\text{Ideal rechaza banda:} \quad |H(\omega)| = \begin{cases} 0, & B_1 \le |\omega| \le B_2 \\ 1, & \text{cualquier otra } \omega \end{cases} \tag{5.38}$$

La *banda de rechazo* de un filtro ideal se define como el conjunto de todas las frecuencias $\omega_0$ para el cual el filtro elimina totalmente la entrada sinusoidal $x(t) = A \cos \omega_0 t$, $-\infty < t < \infty$. La *banda de paso* del filtro es el conjunto de todas las frecuencias $\omega_0$ para el cual la entrada $x(t)$ pasa sin atenuación alguna.

De (5.34) y (5.35), vemos que el filtro ideal pasa baja pasa, sin atenuación, entradas sinusoidales con frecuencias que se encuentran en el intervalo $\omega = 0$ (rad/s) a $\omega = B$ (rad/s), mientras que elimina totalmente las entradas sinusoidales con frecuencias por encima de $\omega = B$. Se dice que el filtro es *pasa baja*, ya que pasa las sinusoides de baja frecuencia y detiene las sinusoides de alta frecuencia. El intervalo de frecuencia $\omega = 0$ a $\omega = B$ es la banda de paso

del filtro, y el intervalo $\omega = B$ a $\omega = \infty$ es la banda de rechazo del filtro. El ancho $B$ de la banda de paso se define como el ancho de banda del filtro.

De (5.34) y (5.36) vemos que el filtro pasa alta detiene sinusoides con frecuencias por debajo de $B$, mientras que pasa aquéllas con frecuencias por encima de $B$; de ahí el término *pasa alta*. La banda de rechazo del filtro pasa alta es el intervalo de frecuencia $\omega = 0$ a $\omega = B$, y la banda de paso es el intervalo de frecuencia de $\omega = B$ a $\omega = \infty$.

La ecuación (5.37) muestra que la banda de paso del filtro pasa banda es el intervalo de frecuencias $\omega = B_1$ a $\omega = B_2$, mientras que la banda de rechazo es el intervalo $\omega = 0$ a $\omega = B_1$, y el intervalo de $\omega = B_2$ a $\omega = \infty$. El ancho de banda del filtro pasa banda es el ancho de la banda de paso (es decir, $B_2 - B_1$). Mediante (5.38) vemos que la banda de rechazo del filtro rechaza banda es el intervalo de $\omega = B_1$ a $\omega = B_2$, mientras que la banda de paso es el intervalo de $\omega = 0$ a $\omega = B_1$, y el intervalo $\omega = B_2$ a $\omega = \infty$.

Es posible elaborar ejemplos más complicados de filtros ideales si realizamos una cascada de filtros ideales pasa baja, pasa alta, pasa banda y rechaza banda. Por ejemplo, si ponemos en cascada filtros rechaza banda con diversos valores de $B_1$ y $B_2$, es posible construir un filtro *peine*, cuya función magnitud aparece en la figura 5.13.

### 5.3.1 Función fase

En la explicación anterior sobre filtros no mencionamos nada respecto a la fase de los filtros. Es evidente que, para evitar la distorsión de fase en el proceso de filtrado, un filtro debe tener la característica de fase lineal sobre la banda de paso del filtro. En otras palabras, la función fase (en radianes) debe tener la forma

$$\angle H(\omega) = -\omega t_d \text{ para toda } \omega \text{ en la banda de paso del filtro} \tag{5.39}$$

donde $t_d$ es un número positivo fijo. Si $\omega_0$ se encuentra en la banda de paso de un filtro de fase lineal, por (5.34) y (5.39) la respuesta resultante de la entrada $x(t) = A \cos \omega_0 t$, $-\infty < t < \infty$, está dada por

$$y(t) = A|H(\omega_0)| \cos(\omega_0 t - \omega_0 t_d), \quad -\infty < t < \infty$$

$$y(t) = A|H(\omega_0)| \cos[\omega_0(t - t_d)], \quad -\infty < t < \infty$$

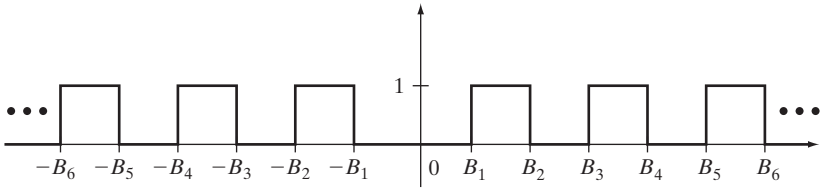



**FIGURA 5.13**
Función magnitud de un filtro peine ideal.

Por lo tanto, la característica de fase lineal resulta en un retraso de tiempo de $t_d$ segundos a través del filtro.

Observe que si la entrada es

$$x(t) = A_0 \cos \omega_0 t + A_1 \cos \omega_1 t, -\infty < t < \infty \tag{5.40}$$

donde $\omega_0$ y $\omega_1$ se encuentran en la banda de paso del filtro, por linealidad la respuesta es

$$y(t) = A_0|H(\omega_0)| \cos[\omega_0(t - t_d)] + A_1|H(\omega_1)| \cos[\omega_1(t - t_d)], -\infty < t < \infty$$

Entonces de nuevo, la salida es un retraso de la entrada de $t_d$ segundos; en particular, no existe distorsión de la entrada. En contraste, si la función fase no es lineal, habrá distorsión de fase en la salida del filtro. Para ver esto, suponga que la función fase $\angle H(\omega)$ es igual a alguna constante $C$ diferente de cero. En este caso, la respuesta a la entrada (5.40) es

$$y(t) = A_0|H(\omega_0)| \cos(\omega_0 t + C) + A_1|H(\omega_1)| \cos(\omega_1 t + C), \quad -\infty < t < \infty$$

Esta salida no es una versión retrasada de la entrada, por lo que existe distorsión en el proceso de filtrado. Por lo tanto, para un filtrado sin distorsión, la función fase del filtro debe acercarse lo más posible a la linealidad sobre la banda de paso del filtro.

### 5.3.2 Filtro ideal pasa baja de fase lineal

Considere el filtro ideal pasa baja con la función en frecuencia

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_d}, & -B \le \omega \le B \\ 0, & \omega < -B, \omega > B \end{cases} \tag{5.41}$$

donde $t_d$ es un número real positivo. La ecuación (5.41) es la representación en forma polar de $H(\omega)$. De (5.41) vemos que

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 1, & -B \le \omega \le B \\ 0, & \omega < -B, \omega > B \end{cases}$$

y la fase en radianes es

$$\angle H(\omega) = \begin{cases} -\omega t_d, & -B \le \omega \le B \\ 0, & \omega < -B, \omega > B \end{cases}$$

La función fase $\angle H(\omega)$ del filtro aparece en la figura 5.14. Observe que sobre el intervalo de frecuencia 0 a $B$, la función fase del sistema es lineal con una pendiente igual a $-t_d$.

Podemos calcular la respuesta al impulso del filtro pasa baja definida por (5.41) si consideramos la transformada inversa de Fourier de la función en frecuencia $H(\omega)$. Primero, si utilizamos la definición de pulso rectangular, podemos expresar $H(\omega)$ en la forma

$$H(\omega) = p_{2B}(\omega)e^{-j\omega t_d}, \quad -\infty < \omega < \infty \tag{5.42}$$

En la tabla 3.2 podemos encontrar el siguiente par de transformadas

$$\frac{\tau}{2\pi}\text{senc}\frac{\tau t}{2\pi} \leftrightarrow p_\tau(\omega) \tag{5.43}$$

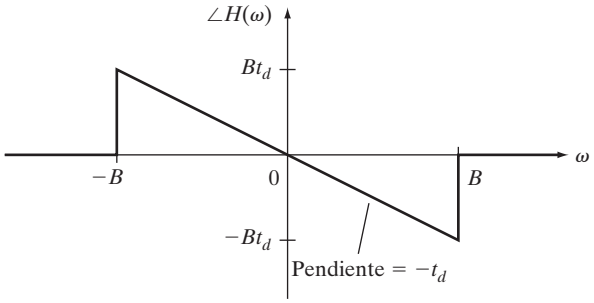



**FIGURA 5.14**
Función de fase del filtro ideal pasa baja de fase lineal definido por (5.41).

Al establecer $\tau = 2B$ en (5.43) obtenemos

$$\frac{B}{\pi}\text{senc}\left(\frac{B}{\pi}t\right) \leftrightarrow p_{2B}(\omega) \tag{5.44}$$

Si aplicamos la propiedad de desplazamiento en el tiempo al par de transformadas (5.44) llegamos a

$$\frac{B}{\pi}\text{senc}\left[\frac{B}{\pi}(t - t_d)\right] \leftrightarrow p_{2B}(\omega)e^{-j\omega t_d} \tag{5.45}$$

Debido a que el lado derecho del par de transformadas (5.45) es igual a $H(\omega)$, la respuesta al impulso del filtro ideal pasa baja es

$$h(t) = \frac{B}{\pi}\text{senc}\left[\frac{B}{\pi}(t - t_d)\right], \quad -\infty < t < \infty \tag{5.46}$$

La respuesta al impulso $h(t)$ aparece en la figura 5.15.

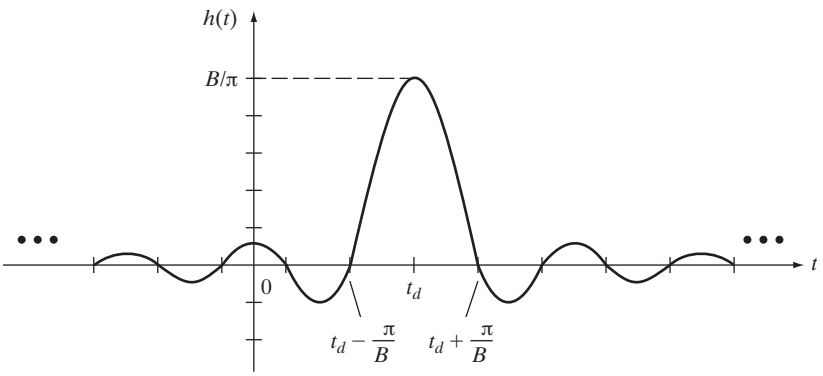



**FIGURA 5.15**
Respuesta al impulso del filtro ideal pasa baja de fase lineal.

De la figura 5.15 resulta claro que la respuesta al impulso $h(t)$ no es cero para $t < 0$, y por lo tanto el filtro es no causal. Como resultado, no es posible implementar (en tiempo real) un filtro ideal pasa baja. De hecho, cualquier filtro ideal es no causal y, por lo tanto, no puede operarse en tiempo real. Para un filtrado en tiempo real, es necesario considerar filtros causales, como el circuito *RC* que vimos en la sección anterior.

### 5.3.3 Filtros ideales pasa banda de fase lineal

El análisis que realizamos anteriormente puede ampliarse a los otros tipos de filtros ideales mencionados en la primera parte de esta sección. Por ejemplo, la función en frecuencia de un filtro ideal pasa banda de fase lineal está dada por

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_d}, & B_1 \leq |\omega| \leq B_2 \\ 0, & \text{cualquier otra } \omega \end{cases}$$

donde $t_d$, $B_1$ y $B_2$ son números reales positivos. La función magnitud $|H(\omega)|$ aparece en la figura 5.12c, y la función fase $\angle H(\omega)$ (en radianes) en la 5.16. Debido a que la banda de paso del filtro es de $B_1$ a $B_2$, para cualquier señal de entrada $x(t)$ cuyas componentes de frecuencia se encuentren en la región $B_1$ a $B_2$, el filtro pasará la señal sin distorsión, aunque habrá un retraso de $t_d$ segundos.

### 5.3.4 Filtros causales

El estudio de los filtros causales de tiempo continuo se basa en la formulación de la función de transferencia, la cual está definida en términos de la transformada de Laplace que presentaremos en el capítulo 6. Por lo tanto, retrasaremos un capítulo la explicación del filtrado causal de tiempo continuo.

## 5.4 MUESTREO

Una importante aplicación de la transformada de Fourier es en el estudio del muestreo de señales de tiempo continuo $x(t)$, lo cual surge en diversas áreas de la tecnología como las comunicaciones, los controladores y el procesamiento digital de señales. En esta sección, el proceso de muestreo se caracteriza en términos de la transformada de Fourier, lo cual reve-

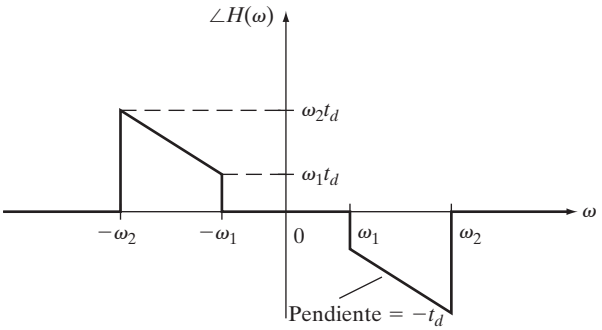



**FIGURA 5.16**
Función fase del filtro ideal pasa banda de fase lineal.

la cómo una señal dada de tiempo continuo $x(t)$ puede reconstruirse a partir de una versión muestreada de la señal.

El muestreo es parte del proceso de discretización donde una señal de tiempo continuo $x(t)$ se convierte en una señal de tiempo discreto $x[n]$. En el muestreo uniforme, el caso que aquí nos interesa, los valores muestra de $x(t)$ son iguales a los valores $x(nT)$, donde $n$ es el índice entero, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, y $T$ es el intervalo de muestreo. La señal de tiempo discreto correspondiente se define como $x[n] = x(nT)$. Para simplificar el análisis del muestreo, la versión muestreada de $x(t)$ generalmente se expresa en la forma $x(t)p(t)$, donde $p(t)$ es el tren de impulsos dado por

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \tag{5.47}$$

Entonces, la curva muestreada $x(t)p(t)$ está dada por

$$x(t)p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) \tag{5.48}$$

Por lo tanto, la curva muestreada $x(t)p(t)$ es un tren de impulsos cuyas ponderaciones (áreas) son los valores muestra $x(nT)$ de la señal $x(t)$. El proceso de muestreo dado por (5.48) se conoce como "muestreo ideal".

Para determinar la transformada de Fourier de $x(t)p(t)$, primero observe que debido a que el tren de impulsos $p(t)$ es una señal periódica con periodo fundamental $T$, $p(t)$ tiene la serie exponencial compleja de Fourier

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_s t} \tag{5.49}$$

donde $\omega_s = 2\pi/T$ es la *frecuencia de muestreo* en rad/s. Los coeficientes $c_k$ de la serie de Fourier se calculan como sigue:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} p(t)e^{-jk\omega_s t}\,dt, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)e^{-jk\omega_s t}\,dt \\ &= \frac{1}{T}[e^{-jk\omega_s t}]_{t=0} \\ &= \frac{1}{T} \end{aligned}$$

Al sustituir $c_k = 1/T$ en (5.49) obtenemos

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jk\omega_s t}$$

y por lo tanto

$$x(t)p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} x(t) e^{jk\omega_s t} \tag{5.50}$$

Entonces podemos calcular la transformada de Fourier de $x(t)p(t)$ si transformamos el lado derecho de (5.50) mediante la propiedad de la transformada de Fourier que involucra la multiplicación por una exponencial compleja [vea (3.50)]. Con $X(\omega)$ igual a la transformada de Fourier de $x(t)$, el resultado es

$$X_s(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(\omega - k\omega_s) \tag{5.51}$$

donde $X_s(\omega)$ es la transformada de Fourier de la curva muestreada $x_s(t) = x(t)p(t)$.

De (5.51) vemos que la transformada de Fourier de $X_s(\omega)$ consiste en la suma de réplicas de $X(\omega)$ con magnitud escalada, establecidas en múltiplos enteros $k\omega_s$ de $\omega_s$ para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Por ejemplo, suponga que $x(t)$ tiene la transformada de Fourier de banda limitada $X(\omega)$ que aparece en la figura 5.17a. Si $\omega_s - B > B$ o $\omega_s > 2B$, la transformada de Fourier $X_s(\omega)$ de la señal muestreada $x_s(t) = x(t)p(t)$ es como aparece en la figura 5.17b. Observe que en este caso, las réplicas de $X(\omega)$ en $X_s(\omega)$ no se traslapan en frecuencia. Como resultado, se hace evidente que podemos reconstruir $x(t)$ a partir de la señal muestreada utilizando un filtro pasa baja. A continuación estudiamos el proceso de reconstrucción.

### 5.4.1 Reconstrucción de señales

Dada una señal $x(t)$, la reconstrucción de $x(t)$ a partir de la curva muestreada $x(t)p(t)$ puede realizarse de la siguiente forma. Primero, suponga que $x(t)$ tiene un ancho de banda $B$; es decir,

$$|X(\omega)| = 0 \text{ para } \omega > B$$

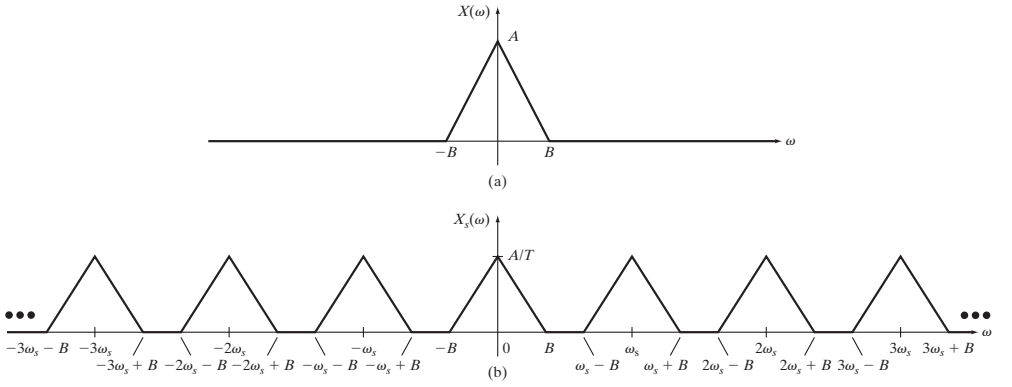



**FIGURA 5.17**
Transformada de Fourier de (a) $x(t)$ y (b) $x_s(t) = x(t)p(t)$.

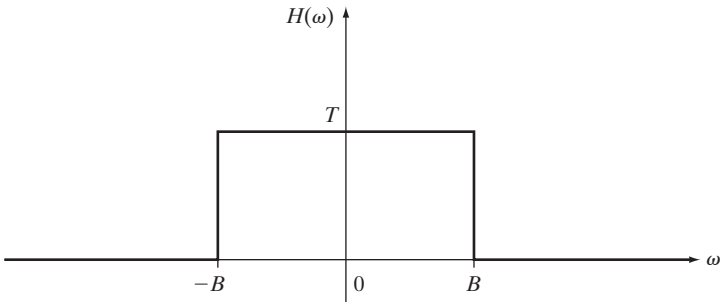



**FIGURA 5.18**
Función de respuesta en frecuencia del filtro ideal pasa baja con ancho de banda $B$.

Después si $\omega_s \geq 2B$, en la expresión (5.51) para $X_s(\omega)$ las réplicas de $X(\omega)$ no traslapan sus frecuencias. Por ejemplo, si $X(\omega)$ tiene la forma que aparece en la figura 5.17a, entonces $X_s(\omega)$ tiene la forma que muestra la figura 5.17b cuando $\omega_s \geq 2B$. Por lo tanto, si la señal muestreada $x_s(t)$ se aplica a un filtro ideal pasa baja con la función en frecuencia de la figura 5.18, la única componente de $X_s(\omega)$ que pasa es $X(\omega)$. Por lo tanto, la salida del filtro es igual a $x(t)$, lo cual muestra que la señal original $x(t)$ puede reconstruirse total y exactamente a partir de la curva muestreada $x_s(t)$. Así, la reconstrucción de $x(t)$ a partir de la señal muestreada $x_s(t) = x(t)p(t)$ puede realizarse mediante un sencillo filtrado pasa baja de la señal muestreada. La figura 5.19 ilustra el proceso. El filtro en esta figura algunas veces se conoce como *filtro de interpolación*, ya que reproduce $x(t)$ a partir de valores de $x(t)$ en los puntos de tiempo $t = nT$.

A través de este resultado, que se conoce como *teorema de muestreo*, puede reconstruirse una señal con un ancho de banda $B$ por completo y con exactitud a partir de la señal muestreada $x_s(t) = x(t)p(t)$, mediante un filtro pasa baja con una frecuencia de corte $B$ si se elige la frecuencia de muestreo $\omega_s$ mayor o igual que $2B$. La frecuencia mínima de muestreo $\omega_s = 2B$ se conoce como *frecuencia de muestreo de Nyquist*.

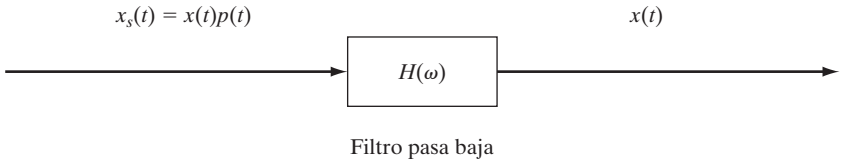



**FIGURA 5.19**
Reconstrucción de $x(t)$ a partir de $x_s(t) = x(t)p(t)$.

**Ejemplo 5.6 Frecuencia de muestreo de Nyquist para voz**

El espectro de una señal de voz es esencialmente cero para todas las frecuencias por encima de 10 KHz y, por lo tanto, el ancho de banda de una señal de voz puede tomarse como $2\pi \times 10^4$ rad/s. Entonces, la frecuencia de muestreo de Nyquist para voz es

$$\omega_s = 2B = 4\pi \times 10^4 \text{ rad/s}$$

Debido a que $\omega_s = 2\pi/T$, el intervalo de muestreo $T$ es igual a $2\pi/\omega_s = 50\ \mu$s. Entonces, el intervalo de muestreo correspondiente al muestreo de Nyquist es muy pequeño.

### 5.4.2 Fórmula de interpolación

De la figura 5.18 resulta claro que la función de respuesta en frecuencia $H(\omega)$ del filtro de interpolación está dada por

$$H(\omega) = \begin{cases} T, & -B \le \omega \le B \\ 0, & \text{cualquier otra } \omega \end{cases}$$

De los resultados de la sección 5.3, la respuesta al impulso $h(t)$ de este filtro está dada por

$$h(t) = \frac{BT}{\pi}\text{senc}\left(\frac{B}{\pi}t\right), \qquad -\infty < t < \infty \tag{5.52}$$

y la salida $y(t)$ del filtro de interpolación está dada por

$$y(t) = h(t) * x_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_s(\tau)h(t-\tau)\,d\tau \tag{5.53}$$

Pero también tenemos que

$$x_s(\tau) = x(\tau)p(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(\tau - nT)$$

y si sustituimos esto en (5.53), arroja

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(\tau - nT)h(t-\tau)\,d\tau \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(\tau - nT)h(t-\tau)\,d\tau \end{aligned} \tag{5.54}$$

De la propiedad de desplazamiento del impulso, (5.54) se reduce a

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h(t - nT) \tag{5.55}$$

Por último, sustituir (5.52) en (5.55) resulta en

$$y(t) = \frac{BT}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\ \text{senc}\left[\frac{B}{\pi}(t - nT)\right] \tag{5.56}$$

Pero $y(t) = x(t)$ y, entonces, (5.56) arroja

$$x(t) = \frac{BT}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\ \text{senc}\left[\frac{B}{\pi}(t - nT)\right] \tag{5.57}$$

La expresión (5.57) se conoce como *fórmula de interpolación* para la señal $x(t)$. En particular, muestra cómo la señal original $x(t)$ puede reconstruirse a partir de valores de muestra $x(nT), n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

### 5.4.3 Aliasing

Muestreo y aliasing

En el capítulo 3 observamos que una señal limitada en el tiempo no puede ser de banda limitada. Debido a que las señales reales son limitadas en el tiempo, no pueden ser de banda limitada. Por lo tanto, si se muestrea una señal limitada en el tiempo con un intervalo de muestreo $T$, no importa qué tan pequeño sea $T$, las réplicas de $X(\omega)$ en (5.51) se traslaparán. Como resultado del traslape de las componentes de frecuencia, no es posible reconstruir exactamente a $x(t)$ aplicando un filtrado pasa baja a la señal muestreada $x_s(t) = x(t)p(t)$.

Aunque las señales limitadas en el tiempo no son de banda limitada, el espectro de amplitud $|X(\omega)|$ de una señal limitada en el tiempo $x(t)$ será pequeño para los valores convenientemente grandes de $\omega$. Por lo tanto, para alguna $B$ finita, todas las componentes importantes de $X(\omega)$ estarán en el intervalo $-B \leq \omega \leq B$. Por ejemplo, la señal $x(t)$ puede tener el espectro de amplitud que muestra la figura 5.20. Si se elige $B$ para que tenga el valor indicado, y si $x(t)$ se muestrea con una frecuencia $\omega_s = 2B$, el espectro de amplitud de la señal muestreada resultante, $x_s(t)$ es el que aparece en la figura 5.21.

Ahora, si a la señal muestreada $x_s(t)$ se le aplica un filtro pasa baja con frecuencia de corte $B$, el espectro de salida del filtro contendrá componentes de alta frecuencia de $x(t)$ traspuestos con componentes de baja frecuencia. A este fenómeno se le conoce como *aliasing*.

El aliasing ocasionará una versión distorsionada de la señal original $x(t)$. Esto puede eliminarse (en teoría) aplicando un filtro pasa baja a $x(t)$ antes de muestrear $x(t)$: si a $x(t)$ se le aplica un filtrado pasa baja, de tal manera que las componentes de frecuencia con valores

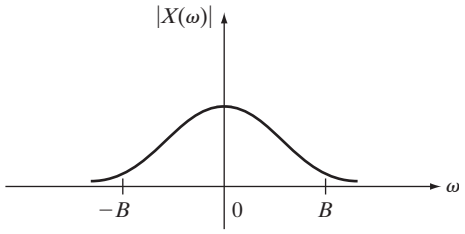



**FIGURA 5.20**
Espectro de amplitud de una señal limitada en el tiempo.

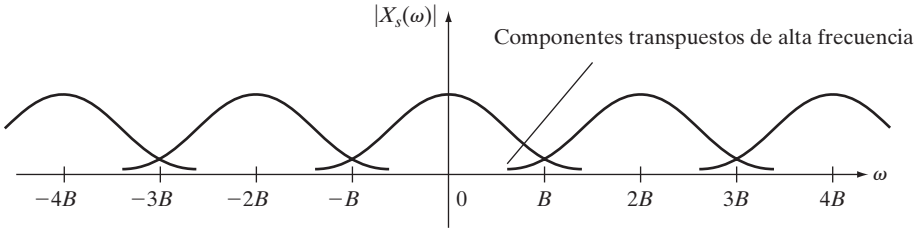



**FIGURA 5.21**
Espectro de amplitud de una señal muestreada.

mayores que $B$ sean eliminadas, no habrá traslape de las componentes de frecuencia en el espectro $X_s(\omega)$ de la señal muestreada $x_s(t)$ si además suponemos que la $x(t)$ se muestrea a la frecuencia de Nyquist $\omega_s = 2B$.

En la práctica, el aliasing no puede eliminarse totalmente, ya que un filtro pasa baja que corta todas las componentes de frecuencia por encima de cierta frecuencia no puede sintetizarse (es decir, construirse). Sin embargo, la magnitud de las componentes con este efecto pueden reducirse si la señal $x(t)$ se filtra con un pasa baja antes de ser muestreada. Este método es factible siempre y cuando el filtrado pasa baja de $x(t)$ no elimine el "contenido de información" de la señal $x(t)$.

---

### Ejemplo 5.7 Filtrado de voz

De nuevo, suponga que $x(t)$ es una onda de voz. Aunque una onda de voz puede contener componentes considerables de frecuencia por encima de los 4 KHz, el reconocimiento de voz es posible para señales de voz que se han filtrado a un ancho de banda de 4 KHz. Si elegimos $B$ tal que sea de 4 KHz para filtrado de voz, la frecuencia de muestreo de Nyquist resultante es

$$\omega_s = 2(2\pi)(4 \times 10^3) = 16\pi \times 10^3 \text{ rad/s}$$

Para esta frecuencia de muestreo, el intervalo de muestreo $T$ es

$$T = \frac{2\pi}{\omega_s} = 0.125 \text{ ms}$$

Éste es un intervalo de muestreo mucho mayor que el requerido de 50 $\mu s$ para transmitir un ancho de banda de 10 KHz de voz. En general, entre más amplio sea el ancho de banda de una señal, será más caro transmitirla. Así, resulta más "barato" enviar voces filtradas por enlaces de comunicación.

---

En muchas aplicaciones, la señal $x(t)$ no puede filtrarse con un filtro pasa baja sin eliminar información contenida en $x(t)$. En dichos casos, el ancho de banda $B$ de la señal debe ser lo suficientemente grande para que las componentes traslapadas no distorsionen seriamente la señal reconstruida. De igual manera, para un valor dado de $B$, el muestreo puede realizarse a una frecuencia mayor que la de Nyquist. Por ejemplo, en aplicaciones para muestrear datos de control, la frecuencia de muestreo puede ser tan grande como 10 o 20 veces $B$, donde $B$ es el ancho de banda del sistema que se está controlando.

## 5.5 ANÁLISIS DE FOURIER DE SISTEMAS DE TIEMPO DISCRETO

Considere un sistema lineal e invariante en el tiempo discreto, con una respuesta al pulso unitario $h[n]$. Por los resultados del capítulo 2, la respuesta de salida $y[n]$ resultante de aplicar la entrada $x[n]$ está dada por

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i]x[n - i] \tag{5.58}$$

En esta sección no suponemos que el sistema sea necesariamente causal y, por lo tanto, $h[n]$ puede ser diferente de cero para valores de $n < 0$. Suponemos que la respuesta al pulso unitario, $h[n]$, satisface la condición de que se pueda sumar totalmente

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \tag{5.59}$$

Como resultado de la condición de suma total (5.59), la DTFT ordinaria, $H(\Omega)$, de la respuesta al pulso unitario $h[n]$ existe y está dada por

$$H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega n}$$

Ahora, como indica la tabla 4.2, la DTFT de una convolución de dos señales es igual al producto de las DTFT de las dos señales. Por lo tanto, si tomamos la DTFT de ambos lados de la relación de entrada y salida (5.58) obtenemos

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega) \tag{5.60}$$

donde $Y(\Omega)$ es la DTFT de la salida $y[n]$, y $X(\Omega)$ es la DTFT de la entrada $x[n]$. La ecuación (5.50) es la representación en el dominio de la DTFT (o dominio $\Omega$) del sistema de tiempo discreto dado.

La función $H(\Omega)$ en (5.60) se conoce como *función de respuesta en frecuencia* del sistema definido por (5.58). Por lo tanto, la DTFT de la respuesta al pulso unitario, $h[n]$, es igual a la función de respuesta en frecuencia del sistema. La función en frecuencia $H(\Omega)$ es la contraparte en el tiempo discreto de la función de respuesta en frecuencia $H(\omega)$ de un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo (como definimos en la sección 5.1).

Dado un sistema de tiempo discreto con función en frecuencia $H(\Omega)$, la magnitud $|H(\Omega)|$ es la función magnitud del sistema, y $\angle H(\Omega)$, es la función fase del sistema. Al considerar la magnitud y el ángulo de ambos lados de (5.60), se obtiene

$$|Y(\Omega)| = |H(\Omega)||X(\Omega)| \tag{5.61}$$

$$\angle Y(\Omega) = \angle H(\Omega) + \angle X(\Omega) \tag{5.62}$$

Por (5.61), el espectro de amplitud $|Y(\Omega)|$ de la salida es el producto del espectro de amplitud $|X(\Omega)|$ de la entrada y de la función magnitud del sistema $|H(\Omega)|$. Por (5.62), el espectro de fase $\angle Y(\Omega)$ de la salida es la suma del espectro de fase $\angle X(\Omega)$ de la entrada y de la función fase del sistema $\angle H(\Omega)$.

### 5.5.1 Respuesta a una entrada sinusoidal

Suponga que la entrada $x[n]$ al sistema definido por (5.58) es la sinusoide

$$x[n] = A\cos(\Omega_0 n + \theta), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

donde $\Omega_0 \geq 0$. Para encontrar la respuesta de salida, $y[n]$ resultante de $x[n]$, primero observe que de la tabla 4.1, la DTFT $X(\Omega)$ de $x[n]$ está dada por

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A\pi[e^{-j\theta}\delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi k) + e^{j\theta}\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k)]$$

De la ecuación (5.60) vemos que la DTFT $Y(\Omega)$ de $y[n]$ es igual al producto de $H(\Omega)$ y $X(\Omega)$ y, entonces

$$Y(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A\pi H(\Omega)[e^{-j\theta}\delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi k) + e^{j\theta}\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k)]$$

Ahora, $H(\Omega)\delta(\Omega + c) = H(-c)\delta(\Omega + c)$ para cualquier constante $c$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} Y(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A\pi[&H(-\Omega_0 + 2\pi k)e^{-j\theta}\delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi k) \\ &+ H(\Omega_0 + 2\pi k)e^{j\theta}\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k)] \end{aligned} \tag{5.63}$$

Ya que $H(\Omega)$ es periódica con periodo $2\pi$, $H(-\Omega_0 + 2\pi k) = H(-\Omega_0)$, y $H(\Omega_0 + 2\pi k) = H(\Omega_0)$. Además, ya que $h[n]$ es valuada en reales, $|H(-\Omega)| = |H(\Omega)|$, y $\angle H(-\Omega) = -\angle H(\Omega)$ y, por lo tanto, las formas polares de $H(-\Omega_0)$ y $H(\Omega_0)$ están dadas por

$$H(-\Omega_0) = |H(\Omega_0)|e^{-j\angle H(\Omega_0)} \text{ y } H(\Omega_0) = |H(\Omega_0)|e^{j\angle H(\Omega_0)}$$

Así, (5.63) se vuelve

$$\begin{aligned} Y(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A\pi|H(\Omega_0)|[&e^{-j(\angle H(\Omega_0)+\theta)}\delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi k) \\ &+ e^{j(\angle H(\Omega_0)+\theta)}\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k)] \end{aligned} \tag{5.64}$$

Si tomamos la DTFT inversa de (5.64) obtenemos

$$y[n] = A|H(\Omega_0)|\cos(\Omega_0 n + \theta + \angle H(\Omega_0)), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{5.65}$$

La ecuación (5.65) es la contraparte de tiempo discreto de la respuesta de salida de un sistema de tiempo continuo a una entrada sinusoidal, como dedujimos en la sección 5.1 [vea (5.11)].

### Ejemplo 5.8 Respuesta a una entrada sinusoidal

Suponga que $H(\Omega) = 1 + e^{-j\Omega}$ y el objetivo es encontrar la respuesta resultante $y[n]$ a partir de la entrada sinusoidal $x[n] = 2 + 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right)$. Por linealidad, $y[n]$ es igual a la suma de las respuestas a $x_1[n] = 2$, y $x_2[n] = 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right)$. La respuesta a $x_1[n] = 2 = 2\cos(0n)$ es

$$y_1[n] = 2|H(0)|\cos(0n + \angle H(0)) = 4$$

La respuesta a $x_2[n] = 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ es

$$y_2[n] = 2\left|H\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|\cos\left(\frac{\pi}{2}\text{n} + \angle H\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

donde $H\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + e^{-j\pi/2} = \sqrt{2}e^{-j\pi/4}$. Por lo tanto, vemos que

$$y_2[n] = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{4}\right)$$

Al combinar $y_1[n]$ y $y_2[n]$ obtenemos

$$y[n] = 4 + 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{4}\right)$$

### Ejemplo 5.9 Filtro PM

Considere el filtro PM de $N$ puntos dado por la relación de entrada y salida

$$y[n] = \frac{1}{N}\Big[x[n] + x[n-1] + x[n-2] + \cdots + x[n-N+1]\Big] \tag{5.66}$$

Si utilizamos la propiedad de desplazamiento de la DTFT (vea la tabla 4.2), y si tomamos la DTFT de ambos lados de (5.66), obtenemos el siguiente resultado:

$$Y(\Omega) = \frac{1}{N}[X(\Omega) + X(\Omega)e^{-j\Omega} + X(\Omega)e^{-j2\Omega}\cdots + X(\Omega)e^{-j(N-1)\Omega}]$$

$$Y(\Omega) = \frac{1}{N}[1 + e^{-j\Omega} + e^{-j2\Omega}\ldots + e^{-j(N-1)\Omega}]X(\Omega) \tag{5.67}$$

Al comparar (5.60) y (5.67) vemos que la función de respuesta en frecuencia $H(\Omega)$ del filtro PM está dada por

$$H(\Omega) = \frac{1}{N}[1 + e^{-j\Omega} + e^{-j2\Omega} \cdots + e^{-j(N-1)\Omega}] = \frac{1}{N}\sum_{q=0}^{N-1} e^{-jq\Omega} \tag{5.68}$$

La sumatoria del lado derecho de (5.68) puede escribirse de forma cerrada mediante la relación (4.5). Esto arroja

$$H(\Omega) = \frac{1}{N}\left[\frac{1 - e^{-jN\Omega}}{1 - e^{-j\Omega}}\right]$$

$$H(\Omega) = \frac{1}{N}\left[\frac{e^{-jN\Omega/2}(e^{jN\Omega/2} - e^{-jN\Omega/2})}{e^{-j\Omega/2}(e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2})}\right]$$

$$H(\Omega) = \left[\frac{\text{sen}(N\Omega/2)}{N\,\text{sen}(\Omega/2)}\right]e^{-j(N-1)\Omega/2} \tag{5.69}$$

De (5.69) podemos ver que la función magnitud $|H(\Omega)|$ del filtro PM está dada por

$$|H(\Omega)| = \left|\frac{\text{sen}(N\Omega/2)}{N\,\text{sen}(\Omega/2)}\right| \tag{5.70}$$

y la función fase $\angle H(\Omega)$ está dada por

$$\angle H(\Omega) = -\frac{N-1}{2}\Omega, 0 \le \Omega < \frac{2\pi}{N} \tag{5.71}$$

$$\angle H(\Omega) = -\frac{N-1}{2}\Omega + \pi, \frac{2\pi}{N} < \Omega < \frac{4\pi}{N} \tag{5.72}$$

$$\angle H(\Omega) = -\frac{N-1}{2}\Omega, \frac{4\pi}{N} < \Omega < \frac{6\pi}{N} \tag{5.73}$$

y así sucesivamente. Observe que la adición de $\pi$ a la función fase, al pasar de (5.71) a (5.72), es un resultado del cambio de signo al sen($N\Omega/2$). También observe que la fase es una función lineal de $\Omega$ para $0 \le \Omega < \frac{2\pi}{N}$. Se desprende que cuando $0 \le \Omega_0 < \frac{2\pi}{N}$, el filtro PM de $N$ puntos retrasa $(N-1)/2$ unidades de tiempo a la entrada sinusoidal $x[n] = A\cos(\Omega_0 n + \theta), n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Para cualquier valor entero positivo de $N$, las funciones magnitud y fase del filtro PM pueden calcularse con MATLAB. Por ejemplo, cuando $N = 2$, los comandos de MATLAB son

```
W=0:.01:1;
H=(1/2).*(1-exp(-j*2*pi*W))./(1-exp(-j*pi*W));
magH=abs(H);
angH=180*angle(H)/pi;
```

Al utilizar estos comandos obtenemos las gráficas de la magnitud y fase que muestra la figura 5.22. En estas gráficas la frecuencia es la frecuencia normalizada ($\Omega/\pi$ radianes por unidad de tiempo). De la figura 5.22a, vemos que $H(\pi) = 0$ y, por lo tanto, si la entrada es $x[n]$

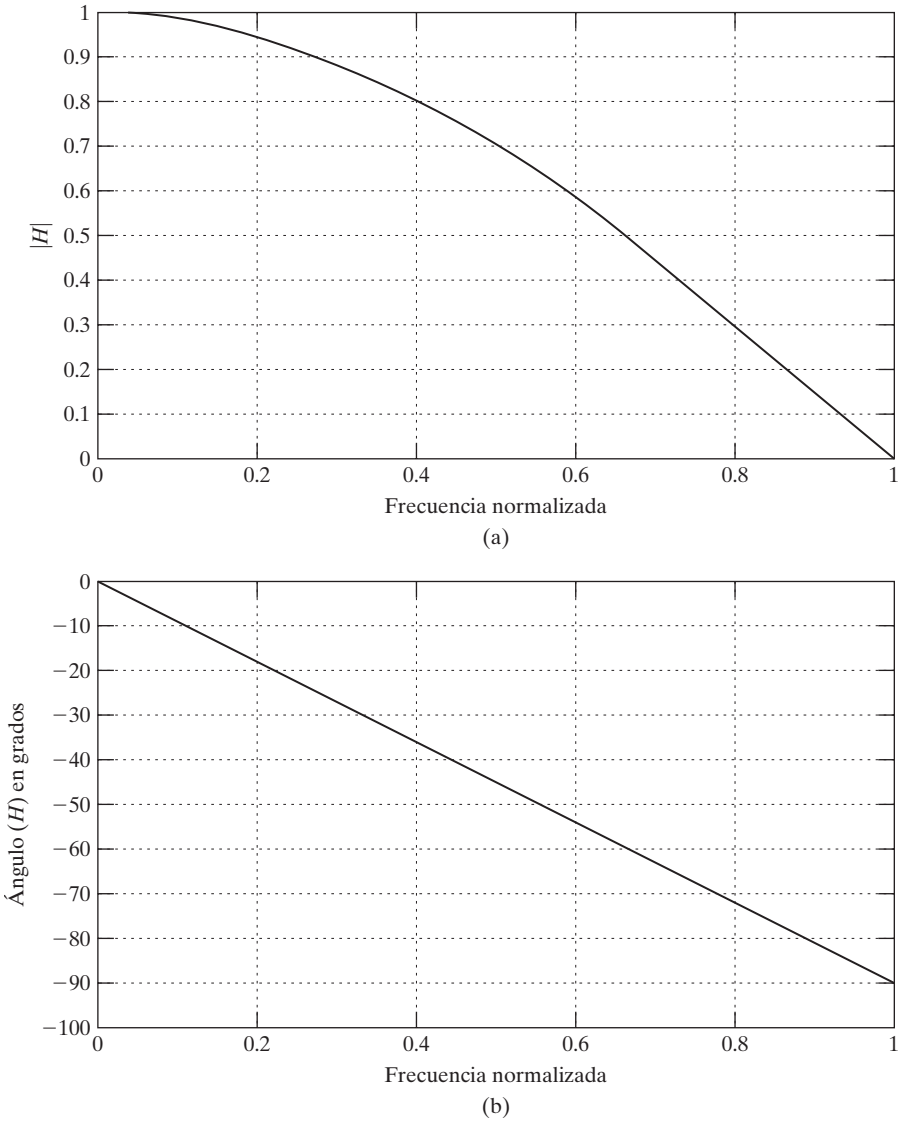



**FIGURA 5.22**
Funciones (a) magnitud y (b) fase del filtro PM de 2 puntos.

$= A\cos(\pi n + \theta)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, la salida resultante $y[n]$ es igual a cero para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. La figura 5.22a muestra que el filtro PM de 2 puntos, es un filtro pasa baja de tiempo discreto, y la figura 5.22b muestra que el filtro tiene una fase lineal. La característica de fase lineal también se observa si en (5.71) se establece $N = 2$. En $\Omega = \pi$, $\angle H(\Omega) = -90^\circ = -\pi/2$ radianes. Por lo tanto, la pendiente de la función fase es igual a $-{}^1/_2$, lo que muestra que el filtro PM de 2 puntos retrasa ${}^1/_2$ unidad de tiempo a cualquier entrada $x[n]$.

## 5.6 APLICACIÓN AL FILTRADO DIGITAL PASA BAJA

En el capítulo 1 vimos que una señal $x[n]$ con ruido generalmente puede expresarse en la forma aditiva $x[n] = s[n] + e[n]$, donde $s[n]$ es la parte lenta de $x[n]$ y $e[n]$ es la parte errática o ruidosa de $x[n]$. El espectro $E(\Omega)$ de $e[n]$ consiste básicamente en componentes de alta frecuencia, cuyas frecuencias están en las cercanías de $\Omega = \pi$. El espectro $S(\Omega)$ de la parte lenta $s[n]$ consiste básicamente en componentes de baja frecuencia, cuyos valores se encuentran en las cercanías de $\Omega = 0$. Por lo tanto, si el objetivo es filtrar $x[n]$ para que la parte ruidosa $e[n]$ se elimine, o al menos se reduzca de manera importante en magnitud, es necesario un filtro pasa baja. En esta sección aplicaremos el análisis de Fourier a los filtros pasa baja causales y no causales de tiempo discreto.

Esta sección comienza con el análisis de un filtro pasa baja no causal de tiempo discreto, y después considera ejemplos específicos de filtros pasa baja causales de tiempo discreto. Diseñaremos un tipo especial de filtro causal y después lo aplicaremos al problema de determinar la tendencia de información sobre el precio de acciones. A partir de este punto en el libro, nos referiremos al filtro de tiempo discreto como *filtro digital*.

### 5.6.1 Análisis de un filtro digital ideal pasa baja

Como ejemplo de su uso, aplicaremos la representación de la DTFT al estudio de un filtro digital ideal pasa baja. Considere el sistema de tiempo discreto con la función en frecuencia

$$H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{2B}(\Omega + 2\pi k) \tag{5.74}$$

donde $B < \pi$. La función $H(\Omega)$ aparece en la figura 5.23. Observe que en este ejemplo, la función magnitud $|H(\Omega)|$ es igual a $H(\Omega)$, y la función fase $\angle H(\Omega)$ es idénticamente cero.

La relación (5.65) puede utilizarse para determinar la respuesta de salida $y[n]$ que resulta de la entrada sinusoidal $x[n] = A\cos(\Omega_0 n)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Como muestra la figura 5.23, $H(\Omega) = 1$ para $0 \leq \Omega_0 < B$ y, por lo tanto, de (5.65) la respuesta de salida es $y[n] = A\cos(\Omega_0 n)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Entonces, $y[n] = x[n]$ cuando $0 \leq \Omega_0 < B$, y en este caso el filtro pasa la entrada sin atenuación y sin desplazamiento de fase. De la figura 5.23, $H(\Omega) = 0$ para $B < \Omega_0 < \pi$ y, por lo tanto, al utilizar (5.65) obtenemos $y[n] = 0$ para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

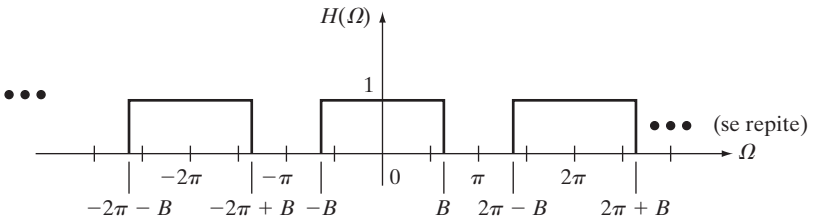



**FIGURA 5.23**
Función en frecuencia $H(\Omega)$ dada por (5.74).

Entonces, en este caso el sistema bloquea la entrada por completo. Al resumir estos resultados obtenemos la siguiente expresión para la respuesta de salida:

$$y[n] = \begin{cases} A\cos(\Omega_0 n), & 0 \leq \Omega < B \\ 0, & B < \Omega_0 < \pi \end{cases} \tag{5.75}$$

La ecuación (5.75) muestra que el sistema de tiempo discreto con función de respuesta en frecuencia $H(\Omega)$ dada por (5.74) es un filtro digital ideal pasa baja. Aquí, el término "ideal" se refiere al afilado corte de $H(\Omega)$ en $\Omega = B$. La banda de paso del filtro es el intervalo de frecuencias de $\Omega = 0$ a $\Omega = B$, y la banda de rechazo del filtro es el intervalo de frecuencias de $\Omega = B$ a $\Omega = \pi$.

Como resultado de la periodicidad de $H(\Omega)$, la respuesta de salida $y[n]$ es igual a $A\cos\Omega_0 n$ cuando

$$2\pi k - B \leq \Omega_0 \leq 2\pi k + B, k = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.76}$$

Para cualquier otro valor positivo de $\Omega_0$, la respuesta $y[n]$ es cero. Es importante observar que, como resultado de la periodicidad de la función de respuesta en frecuencia $H(\Omega)$, este filtro digital no es un "verdadero" filtro pasa baja, ya que pasa sinusoides $A\cos\Omega_0 n$ con $\Omega_0$ pertenecientes a los intervalos dados por (5.76). Si $\Omega_0$ se restringe al intervalo $0 \leq \Omega_0 < \pi$, el filtro puede considerarse como un filtro digital ideal pasa baja con ancho de banda $B$.

### 5.6.2 Creación de un filtro digital a partir de un filtro analógico ideal pasa baja

El filtro con función en frecuencia (5.74) puede utilizarse como un filtro digital creado a partir de un filtro analógico ideal pasa baja de fase cero, con ancho de banda $B$. Para ver esto, suponga que la entrada

$$x(t) = A\cos\omega_0 t, -\infty < t < \infty$$

se aplica a un filtro analógico con función en frecuencia $p_{2B}(\omega)$. A partir de los resultados de la sección 5.3, la salida del filtro es igual a $x(t)$ cuando $\omega_0 \leq B$, y es igual a cero cuando $\omega_0 > B$.

Ahora suponga que la versión muestreada de la entrada

$$x[n] = x(t)|_{t=nT} = A\cos\Omega_0 n, \text{ donde } \Omega_0 = \omega_0 T$$

se aplica al filtro digital con función en frecuencia (5.74). Entonces, por (5.75), la salida es igual a $x[n]$ cuando $\Omega_0 < B$, y es igual a cero cuando $B < \Omega_0 < \pi$. Entonces, mientras $\Omega_0 < \pi$ o $\omega_0 < \pi/T$, la salida $y[n]$ del filtro de tiempo discreto será igual a la versión muestreada de la salida del filtro analógico. Una señal analógica puede entonces generarse a partir de la salida muestreada, mediante un circuito de retención, como explicamos en el capítulo 10. Así, esto resulta en la creación de un filtro digital a partir del filtro analógico dado.

El requerimiento de que la frecuencia $\omega_0$ de la sinusoide de entrada $A\cos\omega_0 t$ sea menor que $\pi/T$ no es una restricción infranqueable, ya que $\pi/T$ puede aumentarse al disminuir el intervalo de muestreo $T$, lo cual es equivalente a incrementar la frecuencia de muestreo $\omega_s = 2\pi/T$ (vea la sección 5.4). Por lo tanto, mientras se logre una velocidad de muestreo convenientemente rápida, el límite superior $\pi/T$ de la frecuencia de entrada $\omega_0$ no será un problema.

### 5.6.3 Respuesta al pulso unitario del filtro ideal pasa baja

A partir de los pares de transformadas de la tabla 4.1, la respuesta al pulso unitario $h[n]$ del filtro con función en frecuencia (5.74), está dada por

$$h[n] = \frac{B}{\pi}\text{senc}\left(\frac{B}{\pi}n\right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

La respuesta al pulso unitario aparece en la figura 5.24. Observe que la forma senc de la función de respuesta al pulso unitario es muy parecida a la forma de la respuesta al impulso de un filtro analógico ideal pasa baja (vea la sección 5.3).

De la figura 5.24 vemos que $h[n]$ no es cero para $n < 0$, y entonces el filtro es no causal. Por lo tanto, el filtro no puede implementarse en línea (en tiempo real); pero puede implementarse fuera de ella. En una implementación fuera de línea, el proceso de filtrado se aplica a los valores de aquellas señales que se almacenaron en la memoria de una computadora digital o en algún otro medio. Entonces, en el caso de tiempo discreto, los filtros ideales pueden utilizarse en la práctica, siempre y cuando el filtrado se lleve a cabo fuera de línea.

### 5.6.4 Filtros digitales causales pasa baja

Como vimos antes, un filtro digital ideal pasa baja no puede implementarse en tiempo real, ya que el filtro es no causal. Para "filtrado en tiempo real" es necesario considerar un filtro digital causal pasa baja. Un ejemplo muy sencillo es el filtro PM de 2 puntos, definido por la ecuación de entrada y salida

$$y[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[n-1])$$

Las funciones magnitud y fase de este filtro aparecen en la figura 5.22 (vea el ejemplo 5.9). Una buena característica de este filtro pasa baja es la fase lineal que muestra la figura 5.22b. Como vimos en el ejemplo 5.9, como consecuencia de la fase lineal, el filtro PM de 2 puntos retrasa cualquier entrada $x[n]$ por $^1/_2$ unidad de tiempo y, por lo tanto, no hay distorsión (sólo un retraso en el tiempo) de la señal de entrada cuando pasa por el filtro. Sin embargo, como

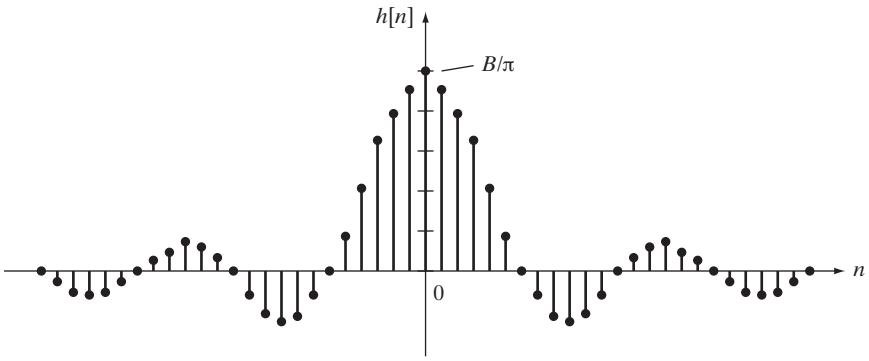



**FIGURA 5.24**
Respuesta al pulso unitario de un filtro digital ideal pasa baja.

vemos en la figura 5.22a, el filtro PM de 2 puntos no proporciona mucha atenuación a las sinusoides de alta frecuencia (por arriba de los $\pi/2$ radianes por unidad de tiempo).

Para lograr atenuar de mejor manera las componentes de alta frecuencia, uno puede intentar el uso de un filtro PM de $N$ puntos con $N > 2$. Por ejemplo, el filtro PM de 3 puntos tiene las funciones magnitud y fase que muestra la figura 5.25. En la figura 5.25a, vemos que la función de respuesta en magnitud $|H(\Omega)|$ tiene una caída pronunciada de $\Omega = 0$ a $\Omega = 2\pi/3$. Sin embargo, cuando $\Omega$ aumenta de $\Omega = 2\pi/3$ a $\Omega = \pi$, la función magnitud $|H(\Omega)|$ aumenta su valor, lo que no es una característica deseable para un filtro pasa baja. También, a partir de (5.72) con $N$ establecida en 3, y como podemos ver en la figura 5.25b, la función fase $\angle H(\Omega)$ es lineal cuando $0 \leq \Omega < 2\pi/3$, pero después hay un salto en la fase en $\Omega = 2\pi/3$, que corresponde a un cambio de signo en $H(\Omega)$. Por lo tanto, la función fase no es lineal sobre todo el intervalo 0 a $\pi$.

**Filtros de promedio móvil ponderado.** Un filtro digital de 3 puntos que no tiene el "lóbulo lateral" que aparece en la figura 5.25a puede generarse considerando el filtro digital con la relación de entrada y salida

$$y[n] = cx[n] + dx[n - 1] + fx[n - 2] \tag{5.77}$$

donde las ponderaciones $c$, $d$, y $f$ se determinan de la siguiente manera: primero, el sistema dado por (5.77) ejemplifica a un filtro de promedio móvil ponderado (PMP) de 3 puntos si

$$c + d + f = 1 \tag{5.78}$$

El filtro PMPE de 3 puntos es un caso especial de un filtro PMP de 3 puntos; es decir, (5.78) es satisfecha por el filtro PMPE de 3 puntos.

Agregaremos restricciones adicionales a las ponderaciones $c$, $d$ y $f$ en (5.77) para lograr las características deseadas del filtro. El análisis se basa en la función de respuesta en frecuencia $H(\Omega)$, que está dada por

$$H(\Omega) = c + de^{-j\Omega} + fe^{-j2\Omega} \tag{5.79}$$

Al establecer $\Omega = \pi$ en (5.79), obtenemos

$$H(\pi) = c - d + f \tag{5.80}$$

Es deseable tener a $H(\pi) = 0$ para que el filtro rechace por completo cualquier componente de alta frecuencia de la entrada en $\Omega = \pi$. Por lo tanto, si utilizamos (5.80) tenemos

$$c - d + f = 0 \tag{5.81}$$

Al restar (5.81) de (5.78) obtenemos $2d = 1$, y entonces $d = 0.5$. Al sumar (5.78) y (5.81) tenemos que

$$2(c + f) = 1 \tag{5.82}$$

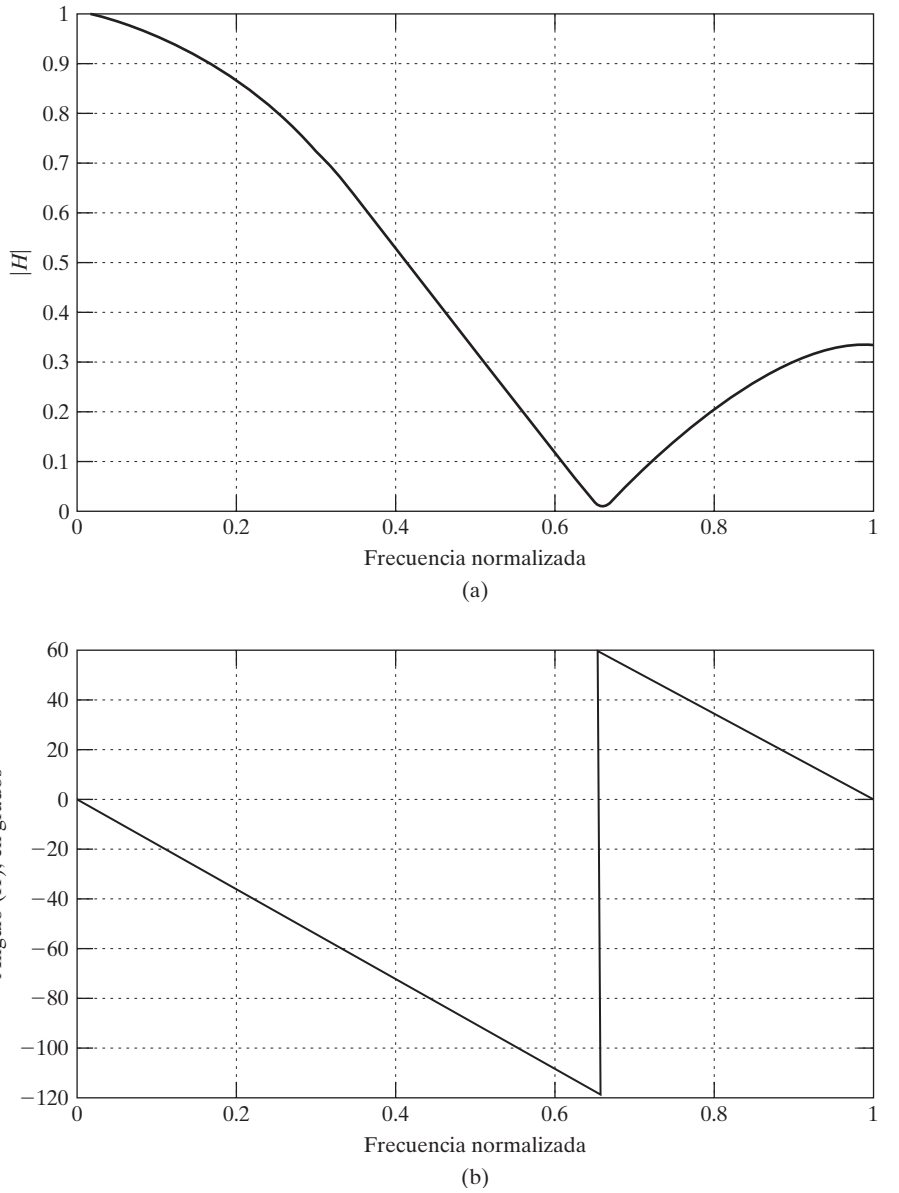



**FIGURA 5.25**
Funciones (a) magnitud y (b) fase del filtro PM de 3 puntos.

Al establecer $\Omega = \pi/2$ en (5.79) obtenemos

$$H(\pi/2) = c - jd - f \tag{5.83}$$

El objetivo es elegir $c$ y $f$ de tal manera que $|H(\pi/2)|$ sea tan pequeño como sea posible. De (5.83), tenemos que

$$|H(\pi/2)| = \sqrt{(c - f)^2 + d^2} \tag{5.84}$$

De (5.84) podemos ver que, debido a que $d = 0.5$, el valor más pequeño posible para $|H(\pi/2)|$ se obtiene cuando $c = f$. Al combinar esto con (5.82) tenemos que $c = f = 0.25$. Entonces, de (5.79), la función de respuesta en frecuencia del filtro PMP de 3 puntos está dada por

$$H(\Omega) = 0.25 + 0.5e^{-j\Omega} + 0.25e^{-j2\Omega} \tag{5.85}$$

Observe que (5.85) puede rescribirse de la forma

$$H(\Omega) = [0.25e^{j\Omega} + 0.5 + 0.25e^{-j\Omega}]e^{-j\Omega}$$

y si utilizamos la fórmula de Euler tenemos

$$H(\Omega) = 0.5[\cos \Omega + 1]e^{-j\Omega} \tag{5.86}$$

Debido a que $0.5(\cos \Omega + 1) \geq 0$ para $0 \leq \Omega < \pi$, de (5.86) podemos ver que la función magnitud $|H(\Omega)|$ está dada por

$$|H(\Omega)| = 0.5(\cos \Omega + 1), 0 \leq \Omega < \pi$$

La ecuación (5.86) también muestra que el filtro tiene una función fase lineal, y que el retraso a través del filtro es de una unidad de tiempo. La figura 5.26 muestra una gráfica de la función magnitud. Esta figura también muestra la función magnitud del filtro PM de 2 puntos, la cual aparece como curva punteada. Al comparar ambas curvas se revela que el filtro PMP de 3 puntos proporciona una caída más pronunciada en magnitud cuando $\Omega$ se incrementa de $\Omega = 0$ a $\Omega = \pi$, que el filtro PM de 2 puntos. Sin embargo, hay que pagar un precio por esto; es decir, el retraso a través del filtro PMP de 3 puntos es de una unidad de tiempo, lo cual es el doble del retraso de $^1/_2$ unidad de tiempo del filtro PM de 2 puntos.

**Un filtro PMP doble.** Para lograr una caída mucho más pronunciada en la función magnitud, el filtro PMP de 3 puntos que describimos antes puede colocarse en cascada con él mismo. El filtro resultante en algunas ocasiones se conoce como *filtro PMP doble*. Éste se da por la conexión en cascada que muestra la figura 5.27. Como indica la figura, la salida del primer filtro se denota como $v[n]$, y así la representación DTFT del primer filtro es $V(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega)$, y la representación DTFT del segundo filtro es $Y(\Omega) = H(\Omega)V(\Omega)$. Al combinar las dos representaciones obtenemos $Y(\Omega) = H(\Omega)^2X(\Omega)$. Entonces, la función de respuesta en frecuencia de la conexión en cascada es igual a $H(\Omega)^2$. De (5.86), tenemos que

$$H(\Omega)^2 = 0.25[\cos \Omega + 1]^2 e^{-j2\Omega} \tag{5.87}$$

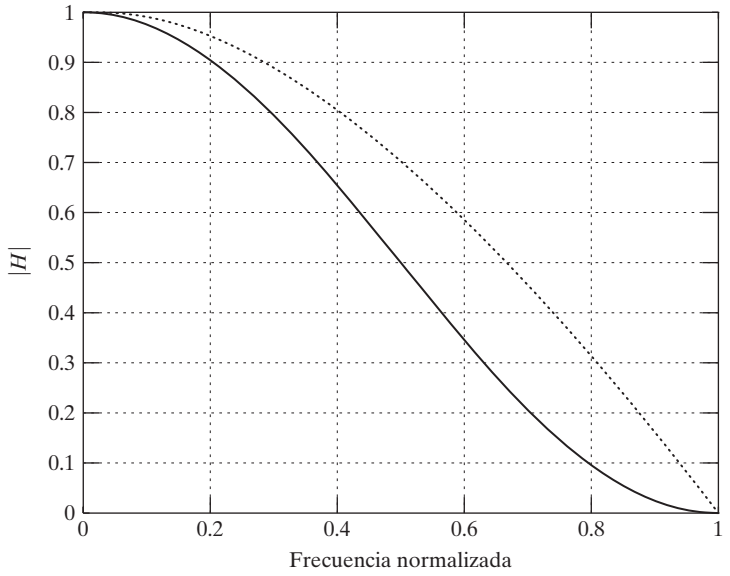



**FIGURA 5.26**
Funciones magnitud del filtro PMP de 3 puntos (línea continua), y del filtro PM de 2 puntos (línea punteada).

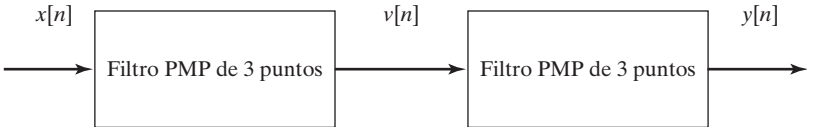



**FIGURA 5.27**
Conexión en cascada de dos filtros PMP de 3 puntos.

La ecuación (5.87) muestra que el filtro PMP doble también tiene una fase lineal; sin embargo, el retraso a través del filtro es de dos unidades de tiempo, al contrario del retraso de una unidad de tiempo del filtro PMP. La función de respuesta en magnitud $|H(\Omega)|^2$ del filtro PMP doble aparece en la figura 5.28. En la figura también aparece $|H(\Omega)|$, la cual se graficó con una curva punteada. Al comparar ambas curvas vemos que la función magnitud del filtro PMP doble tiene una caída mucho más pronunciada que el filtro PMP. Sin embargo, nuevamente existe un precio que pagar por esto, ya que el retraso en el filtro PMP doble es de dos unidades de tiempo.

Para implementar el filtro PMP doble, es necesario determinar la respuesta al pulso unitario. Si denotamos la función de respuesta al pulso unitario como $h2[n]$, debido a que la función de respuesta en frecuencia del filtro PMP doble es igual a $H(\Omega)^2$, y a partir de la propiedad de convolución de la DTFT (vea la tabla 4.2) se desprende que $h2[n]$ es igual a la convolución $h[n]*h[n]$, donde $h[n]$ es la respuesta al pulso unitario del filtro PMP de 3 puntos. Podemos calcular la convolución $h[n]*h[n]$ mediante los comandos de MATLAB

```
h = [0.25 0.5 0.25];
h2 = conv(h,h);
```

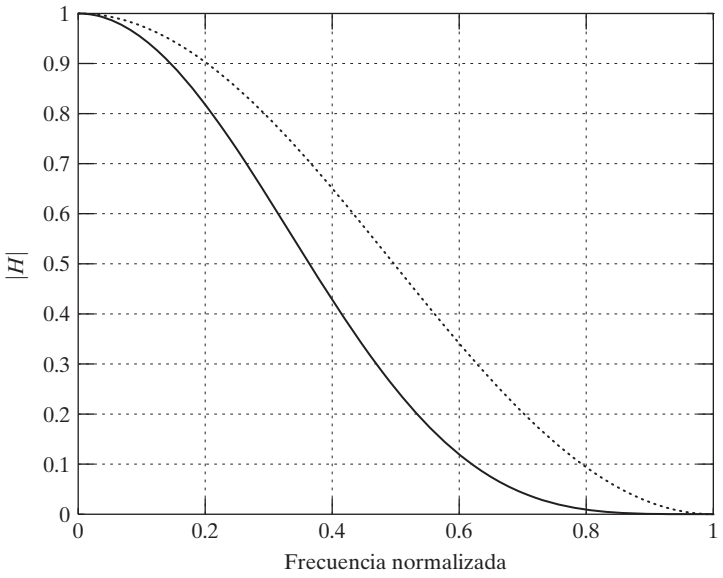



**FIGURA 5.28**
Funciones de respuestas en magnitud del filtro PMP de 3 puntos (línea punteada), y del filtro doble (línea continua).

Si ejecutamos estos comandos obtenemos `h2 5 [0.0625 0.2500 0.3750 0.2500 0.0625]`. Por lo tanto, la relación entrada y salida del filtro PMP doble es

$$y[n] = 0.0625x[n] + 0.25x[n-1] + 0.375x[n-2] + 0.25x[n-3] + 0.0625x[n-4] \tag{5.88}$$

Observe que el número de ponderaciones en (5.88) es igual a 5, la suma de las ponderaciones en el lado derecho de (5.88) es igual a 1 y, por lo tanto, el filtro PMP doble es un filtro PMP de 5 puntos.

**Aplicación a la información sobre el precio de acciones.** Considere el precio de cierre $c[n]$ de QQQQ para el periodo de 50 días hábiles, del 1 de marzo de 2004 hasta el 10 de mayo de 2004 (vea el ejemplo 1.4 en el capítulo 1). El precio de cierre se aplica al filtro PMP doble definido por (5.88). La salida $y[n]$ del filtro, y el precio de cierre $c[n]$, aparecen graficados para $n \geq 5$ en la figura 5.29. En la gráfica, los valores de $c[n]$ aparecen con o's, y los valores de $y[n]$ con *'s. La salida $y[n]$ del filtro PMP doble es una aproximación de la parte suavizada de $c[n]$, con un retraso de dos días. Al comparar la respuesta del filtro en la figura 5.29 con la respuesta del filtro PM en el día 11 dado en la sección 1.4, se revela que el filtro PM en el día 11 suaviza mucho más, aunque existe un retraso de 5 días a través del filtro. En la sección 7.5 mostraremos cómo generar una respuesta filtrada que sea casi tan suave como la del filtro PM en el día 11, pero que tenga sólo un retraso de 2.5 días a través del filtro.

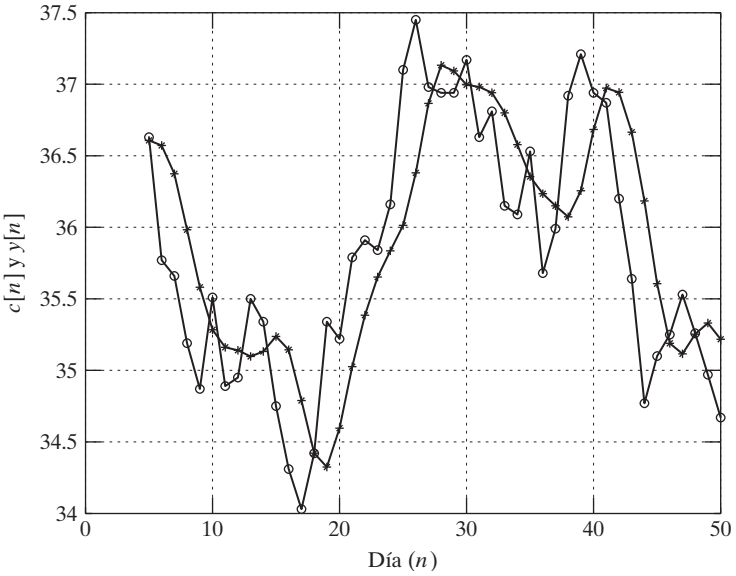



**FIGURA 5.29**
Gráfica del precio de cierre y del precio de cierre filtrado.

## 5.7 RESUMEN DEL CAPÍTULO

El análisis de Fourier se utiliza para examinar la manera en que un sistema procesa señales de entrada con diferentes frecuencias. Podemos encontrar la representación en el dominio de la frecuencia de un sistema, conocido como la respuesta en frecuencia, para un sistema de tiempo continuo si tomamos la magnitud de la transformada de Fourier de la respuesta al impulso, lo cual da como resultado la función de respuesta en frecuencia $|H(\omega)|$. Para un sistema de tiempo discreto, podemos encontrar la respuesta en frecuencia si tomamos la magnitud de la transformada de Fourier de tiempo discreto de la respuesta al pulso unitario, lo cual arroja la función de respuesta en frecuencia $|H(\Omega)|$.

Una de las características importantes de los sistemas lineales es que una entrada sinusoidal a un sistema resulta en una salida sinusoidal en la misma frecuencia, pero con diferente amplitud y ángulo de fase. La amplitud y el ángulo de fase de la señal de salida se encuentran como funciones de la respuesta en frecuencia de un sistema evaluado a la frecuencia de la señal de entrada. En particular, la amplitud de una sinusoide de salida es el producto de la amplitud de la sinusoide de entrada y la magnitud de la respuesta en frecuencia en la frecuencia de la señal de entrada. Si la magnitud de la respuesta en frecuencia es menor que uno, la señal sinusoidal de salida se atenúa, comparada con la señal de entrada. La señal de salida se amplifica si la magnitud de la respuesta en frecuencia es mayor que uno en esa frecuencia. La respuesta de un sistema a señales de entrada no periódicas está determinada por $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$ para sistemas de tiempo continuo, y $Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega)$ para sistemas de tiempo discreto.

Los filtros son sistemas diseñados para rechazar, o atenuar, las señales de entrada en ciertos intervalos de frecuencia, y para pasar señales en otros intervalos de frecuencia. Las características de filtrado de un sistema están determinadas por la forma de la función magnitud $|H(\omega)|$ para sistemas de tiempo continuo, o $|H(\Omega)|$ para sistemas de tiempo discreto.

Los tipos estándares de filtros incluyen los pasa baja, pasa alta y pasa banda. Los filtros ideales tienen funciones magnitud que son iguales a 1 en la banda de paso y a 0 en la banda de rechazo, y se les permiten las transiciones discontinuas entre las regiones de la banda de paso y de la banda de rechazo. Los filtros ideales no son causales debido a los cambios discontinuos en la respuesta en frecuencia. En cambio, los filtros causales se utilizan por lo general en aplicaciones físicas. Los filtros causales aproximan la respuesta en frecuencia de los filtros ideales, pero permiten regiones de transición diferentes de cero entre las regiones de la banda de paso y la banda de rechazo para permitir que la magnitud de la respuesta en frecuencia cambie continuamente. Además, no es necesario que la función magnitud del filtro sea exactamente 1 en la región de la banda de paso o 0 en la banda de rechazo. El filtro de promedio móvil es un ejemplo de un filtro causal pasa baja de tiempo discreto que se utiliza comúnmente para filtrar información con ruido de alta frecuencia.

Otra aplicación importante del análisis de Fourier en este capítulo es el análisis del muestreo. El muestreo es el proceso mediante el cual una señal de tiempo continuo se convierte en una de tiempo discreto. Si la velocidad de muestreo es muy baja, entonces la señal de tiempo continuo no podrá reconstruirse a partir de la señal muestreada de tiempo discreto debido al aliasing. Es más fácil apreciar el efecto del aliasing en el dominio de la frecuencia. El muestreo puede modelarse como una multiplicación de la señal por un tren de impulsos, lo cual es muy parecido a la modulación de amplitud de pulso que estudiamos en la sección 3.8. El espectro de frecuencia de la señal muestreada se forma colocando copias de una versión escalada del espectro original, en múltiplos enteros de la frecuencia de muestreo. Si la banda del espectro original no se limita a menos de $^1/_2$ de la frecuencia de muestreo, entonces las copias del espectro se traslaparán, lo que dará como resultado el aliasing. En el caso de una señal con aliasing, es imposible reconstruir la señal original a partir de la señal traslapada, debido al traslape en el espectro.

## PROBLEMAS

**5.1.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo tiene la función de respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & 2 \le |\omega| \le 7 \\ 0, & \text{cualquier otra } \omega \end{cases}$$

Calcule la respuesta de salida $y(t)$ resultante de la entrada $x(t)$ dada por

**(a)** $x(t) = 2 + 3\cos(3t) - 5\,\text{sen}(6t - 30°) + 4\cos(13t - 20°), \qquad -\infty < t < \infty$

**(b)** $x(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\cos(2kt), \qquad -\infty < t < \infty$

**(c)** $x(t)$ como muestra la figura P5.1

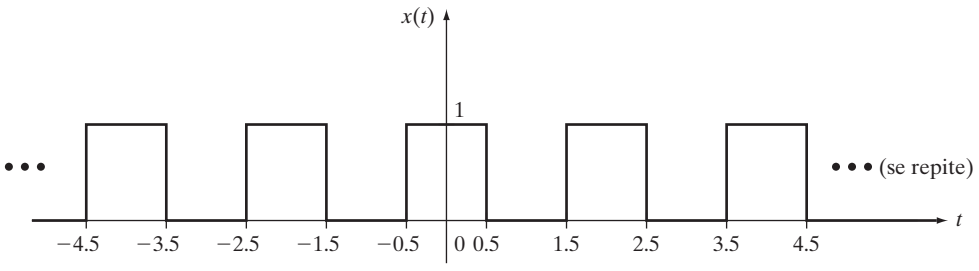



FIGURA P5.1

**5.2.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo tiene la función de respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = \begin{cases} 2\exp(-|6 - |\omega||)\exp(-j3\omega), & 4 \leq |\omega| \leq 12 \\ 0, & \text{cualquier otra } \omega \end{cases}$$

**(a)** Grafique las funciones magnitud y fase para $H(\omega)$.
**(b)** Calcule y grafique la respuesta de salida $y(t)$ que resulta de la entrada $x(t)$, definida en la figura P5.1.
**(c)** Grafique el espectro de amplitud y el de fase para $x(t)$ y $y(t)$, $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6$.

**5.3.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo tiene la función de respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

Calcule la respuesta de salida $y(t)$, para $-\infty < t < \infty$, cuando la entrada $x(t)$ es
**(a)** $x(t) = \cos t, -\infty < t < \infty$
**(b)** $x(t) = \cos(t + 45°), -\infty < t < \infty$

**5.4.** Considere el sistema con la respuesta en frecuencia dada por

$$H(\omega) = \frac{10}{j\omega + 10}$$

**(a)** Dada la salida $x(t) = 2 + 2\cos(50t + \pi/2)$.
**(b)** Esquematice $|H(\omega)|$. ¿Cuál es el ancho de banda del filtro?
**(c)** Esquematice la respuesta del filtro a una entrada de $x(t) = 2e^{-2t}\cos(4t)u(t) + e^{-2t}\cos(20t)u(t)$. (Vea la figura P5.4).

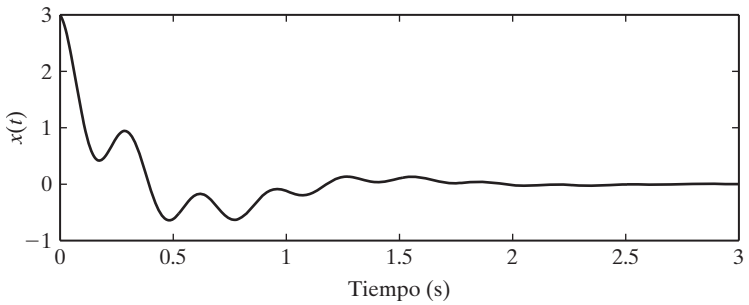



**FIGURA P5.4**

**5.5.** Repita el problema 5.4 para el sistema dado por

$$H(\omega) = \frac{40}{j\omega + 40}$$

**5.6.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo recibe la señal periódica $x(t)$, como muestra la figura P5.6. La función de respuesta en frecuencia está dada por

$$H(\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + 2}$$

**(a)** Grafique las funciones magnitud y fase para $H(\omega)$.

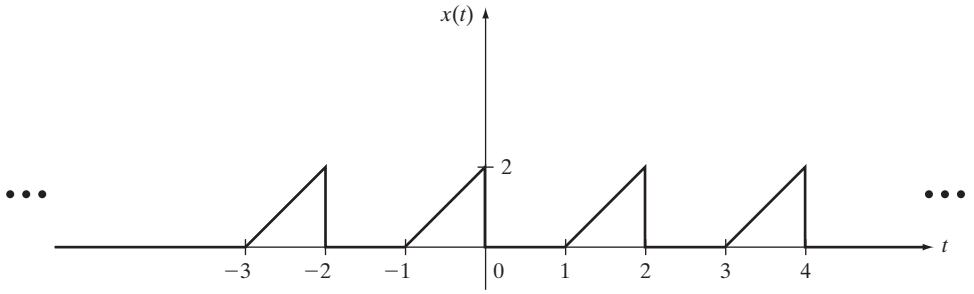



FIGURA P5.6

**(b)** Calcule la serie de Fourier exponencial compleja de la respuesta de salida $y(t)$, y después grafique los espectros de amplitud y fase para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$, para $x(t)$ y $y(t)$.

**(c)** Grafique una aproximación para $y(t)$, utilizando la serie exponencial compleja de Fourier truncada, desde $k = -5$ hasta $k = 5$.

**5.7.** Una señal periódica $x(t)$ con periodo $T$ tiene la componente constante $c_0^x = 2$. La señal $x(t)$ se aplica a un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo, con una función de respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = \begin{cases} 10e^{-j5\omega}, & \omega > \dfrac{\pi}{T}, \omega < -\dfrac{\pi}{T} \\ 0, & \text{cualquier otra } \omega \end{cases}$$

**(a)** Demuestre que la respuesta de salida resultante $y(t)$ puede expresarse de la forma

$$y(t) = ax(t - b) + c$$

Calcule las constantes $a$, $b$ y $c$.

**(b)** Calcule y grafique la respuesta de este sistema a la entrada $x(t)$ que muestra la figura P5.1.

**5.8.** El voltaje $x(t)$ que muestra la figura P5.8b se aplica al circuito $RL$ de la figura P5.8a.

**(a)** Encuentre el valor de $L$ tal que el pico de la componente de ca (armónica) más grande en la respuesta de salida $y(t)$ sea 1/30 de la componente de cd de la salida.

**(b)** Grafique una aproximación para $y(t)$, utilizando la serie exponencial compleja de Fourier truncada desde $k = -3$ hasta $k = 3$.

**5.9.** Considere el rectificador de onda completa que aparece en la figura P5.9. El voltaje de entrada $v(t)$ es igual a $156 \cos(120 \pi t)$, $-\infty < t < \infty$. El voltaje $x(t)$ es igual a $|v(t)|$.

**(a)** Elija valores para $R$ y $C$ tal que se satisfagan los dos siguientes criterios:

**(i)** La componente de cd de $y(t)$ es igual al 90% de la componente de cd de la entrada $x(t)$.

**(ii)** El valor pico de la armónica más grande en $y(t)$ es 1/30 de la componente de cd de $y(t)$.

**(b)** Grafique una aproximación para $y(t)$, utilizando la serie exponencial compleja de Fourier truncada desde $k = -3$ hasta $k = 3$.

**5.10.** La entrada

$$x(t) = 1.5 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k\pi} \operatorname{sen} k\pi t + \frac{2}{k\pi} \cos k\pi t \right), \qquad -\infty < t < \infty$$

se aplica a un sistema lineal e invariante en el tiempo, con función en frecuencia $H(\omega)$. Esta entrada produce la respuesta de salida $y(t)$ que aparece en la figura P5.10. Calcule $H(k\pi)$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$.

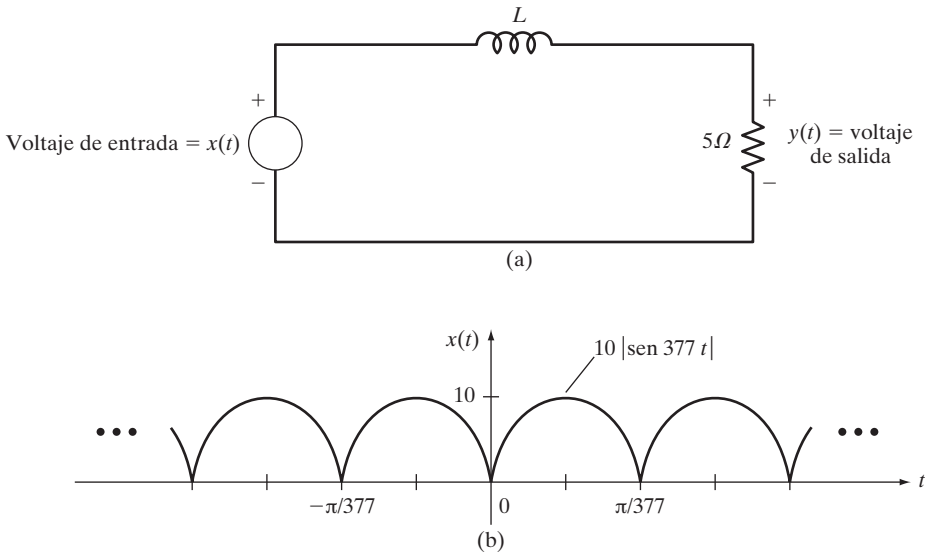



**FIGURA P5.8**

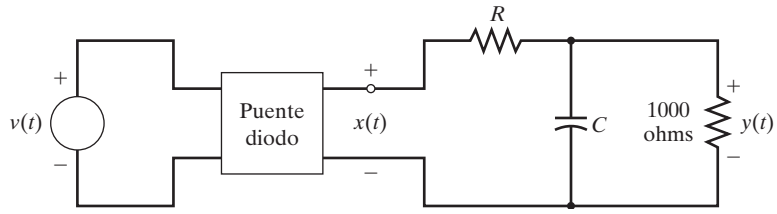



**FIGURA P5.9**

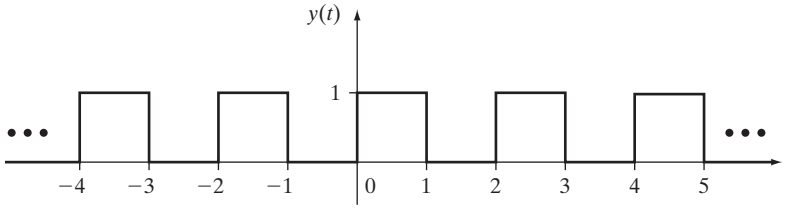



**FIGURA P5.10**

**5.11.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo tiene la función en frecuencia $H(\omega)$ que aparece en la figura P5.11a. Se sabe que el sistema convierte la onda diente de sierra de la figura P5.11b en la onda cuadrada de la figura P5.11c, es decir, la respuesta a la onda diente de sierra es una onda cuadrada. Calcule las constantes $a$ y $b$ en la gráfica de $H(\omega)$.

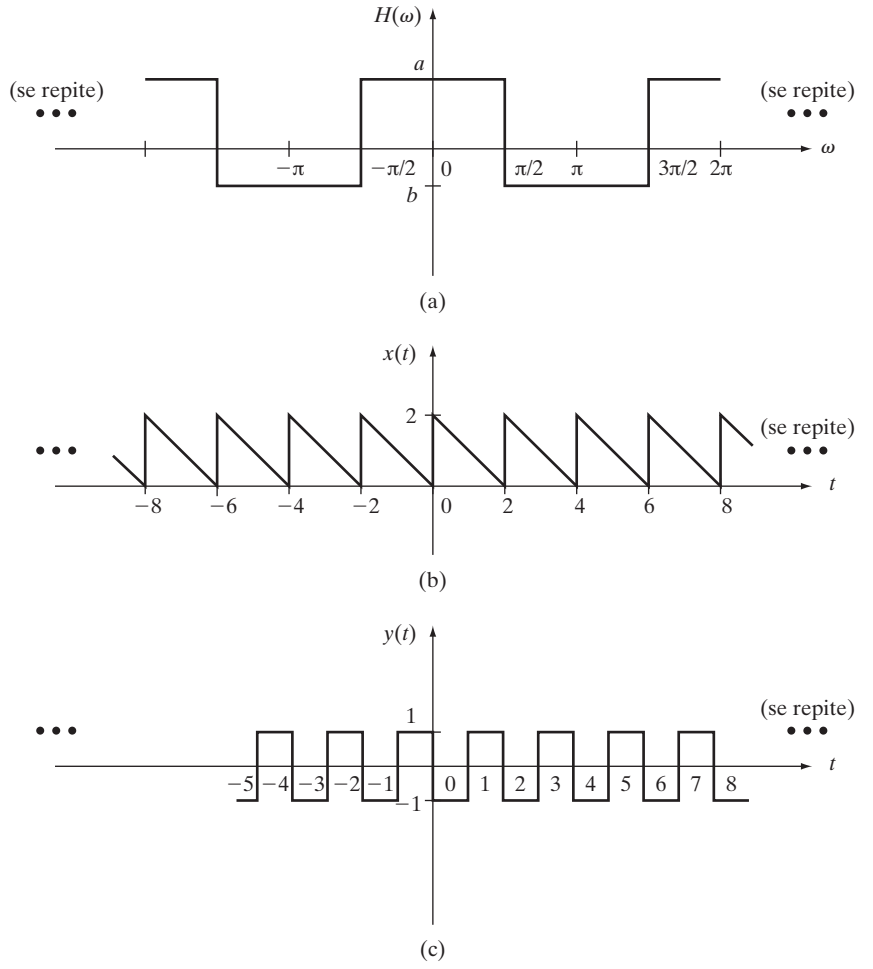



FIGURA P5.11

**5.12.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo tiene la función en frecuencia

$$H(\omega) = b - ae^{j\omega c}, -\infty < \omega < \infty$$

donde $a$, $b$ y $c$ son constantes (números reales). La entrada $x(t)$ que aparece en la figura P5.12a se aplica al sistema. Determine las constantes $a$, $b$ y $c$ para que la respuesta de salida $y(t)$ resultante de $x(t)$ esté dada por la gráfica en la figura P5.12b.

**5.13.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo tiene la función en frecuencia $H(\omega)$. Se sabe que la entrada

$$x(t) = 1 + 4\cos 2\pi t + 8\,\text{sen}(3\pi t - 90^\circ)$$

produce la respuesta

$$y(t) = 2 - 2\,\text{sen}\,2\pi t$$

**(a)** ¿Para cuáles valores de $\omega$ es posible determinar $H(\omega)$?
**(b)** Calcule $H(\omega)$ para cada uno de los valores de $\omega$ determinados en la parte (a).

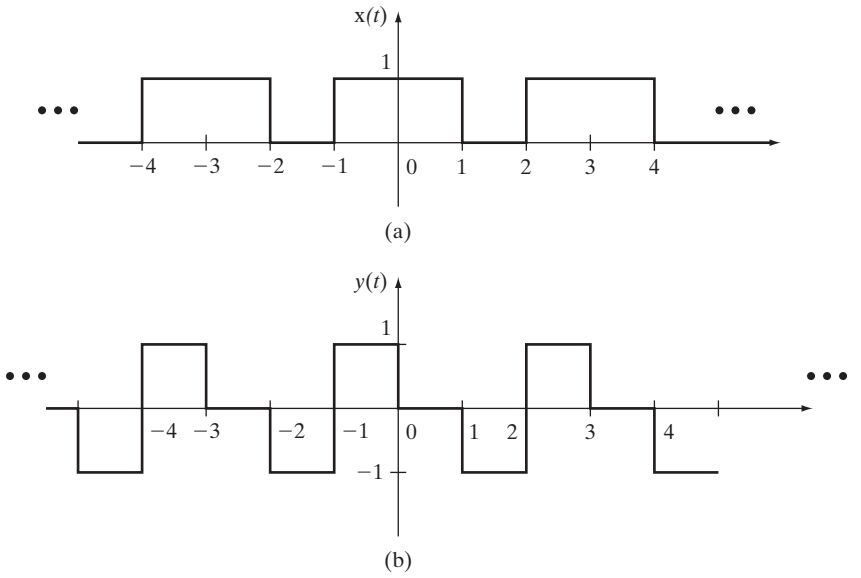



FIGURA P5.12

**5.14.** Un filtro ideal pasa baja de fase lineal tiene la función de respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega}, & -2 < \omega < 2 \\ 0, & \text{cualquier otra } \omega \end{cases}$$

Calcule la respuesta de salida del filtro, $y(t)$, para las diferentes entradas $x(t)$, dadas a continuación. Grafique cada entrada y su salida correspondiente $y(t)$. También grafique las funciones magnitud y fase para $X(\omega)$, $H(\omega)$ y $Y(\omega)$.

**(a)** $x(t) = 5\,\text{senc}(3t/2\pi), -\infty < t < \infty$

**(b)** $x(t) = 5\,\text{senc}(t/2\pi)\cos(2t), -\infty < t < \infty$

**(c)** $x(t) = \text{senc}^2(t/2\pi), -\infty < t < \infty$

**(d)** $x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\cos\left(\frac{k\pi}{2}t + 30^\circ\right), \quad -\infty < t < \infty$

**5.15.** El pulso triangular de la figura P5.15 se aplica a un filtro ideal pasa baja con función en frecuencia $H(\omega) = p_{2B}(\omega)$. Mediante la transformada de Fourier y la integración numérica, determine la salida del filtro para los valores de $B$ dados a continuación. Exprese sus

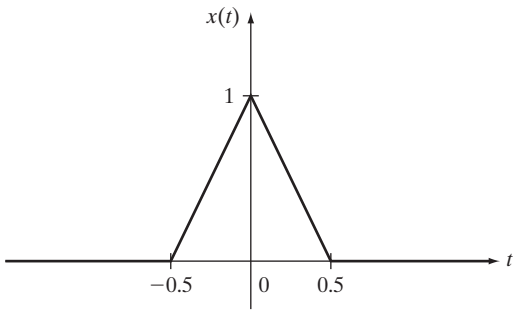



FIGURA P5.15

resultados graficando las respuestas de salida para $-1.5 \leq t \leq 1.5$. ¿Cuál es su conclusión? Tal vez deba utilizar el archivo M de MATLAB, `ode45`, el cual puede realizar la integración para cada valor de $t$ en la transformada inversa de Fourier o, bien, utilice el comando `int` del Symbolic Math Toolbox para calcular la transformada inversa como función de $t$.

**(a)** $B = 2\pi$
**(b)** $B = 4\pi$
**(c)** $B = 8\pi$

**5.16.** Un filtro pasa baja tiene la función de respuesta en frecuencia que aparece en la figura P5.16.

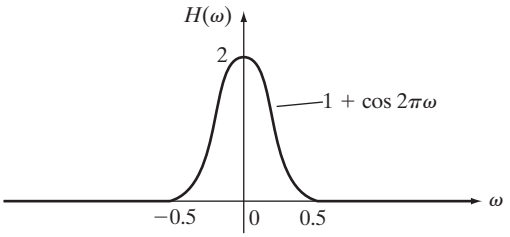



**FIGURA P5.16**

**(a)** Calcule la respuesta al impulso $h(t)$ del filtro.
**(b)** Calcule la respuesta $y(t)$ cuando la entrada es $x(t) = \text{senc}(t/2\pi)$, $-\infty < t < \infty$.
**(c)** Calcule la respuesta $y(t)$ cuando $x(t) = \text{senc}(t/4\pi)$, $-\infty < t < \infty$.
**(d)** Calcule la respuesta $y(t)$ cuando $x(t) = \text{senc}^2(t/2\pi)$, $-\infty < t < \infty$.
**(e)** Para los incisos (b)-(d), grafique $x(t)$ y la correspondiente $y(t)$.

**5.17.** Un filtro pasa baja tiene las curvas de respuesta en frecuencia que aparecen en la figura P5.17.
**(a)** Calcule la respuesta al impulso $h(t)$ del filtro.
**(b)** Calcule la respuesta $y(t)$ cuando $x(t) = 3\text{senc}(t/\pi)\cos(4t)$, $-\infty < t < \infty$.
**(c)** Grafique $x(t)$ y $y(t)$.

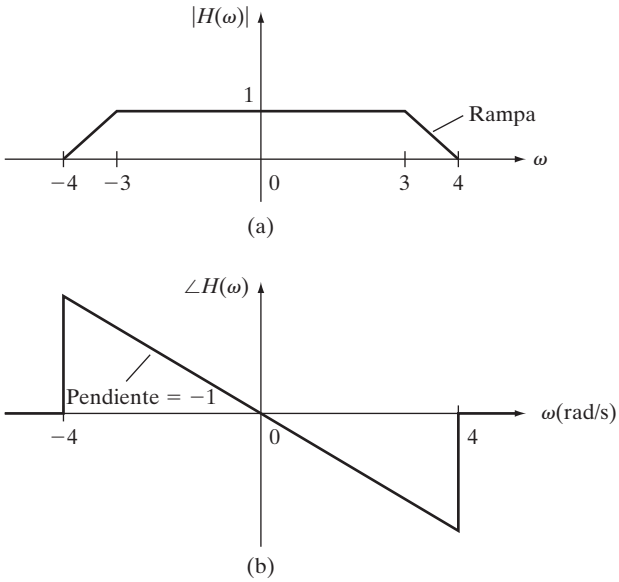



**FIGURA P5.17**

**5.18.** La entrada $x(t) = [\text{senc}(t/\pi)](\cos 2t)$, $-\infty < t < \infty$, se aplica a un filtro ideal pasa baja con función en frecuencia $H(\omega) = 1$, $-a < \omega < a$, $H(\omega) = 0$ para cualquier otra $\omega$. Determine el valor más pequeño posible de $a$ para el que la respuesta de salida resultante $y(t)$ sea igual a la entrada $x(t) = [\text{senc}(t/\pi Œ)](\cos 2t)$.

**5.19.** Un filtro ideal pasa baja de fase lineal tiene la función de respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = \begin{cases} 6e^{-j2\omega}, & \omega > 3, \omega < -3 \\ 0, & \text{cualquier otra } \omega \end{cases}$$

**(a)** Calcule la respuesta al impulso $h(t)$ del filtro.

**(b)** Calcule la respuesta de salida $y(t)$ cuando la entrada $x(t)$ está dada por $x(t) = \text{senc}(5t/\pi)$, $-\infty < t < \infty$. Grafique $x(t)$ y $y(t)$.

**(c)** Calcule la respuesta de salida $y(t)$ cuando la entrada $x(t)$ es la señal periódica que aparece en la figura P5.19. Grafique $y(t)$.

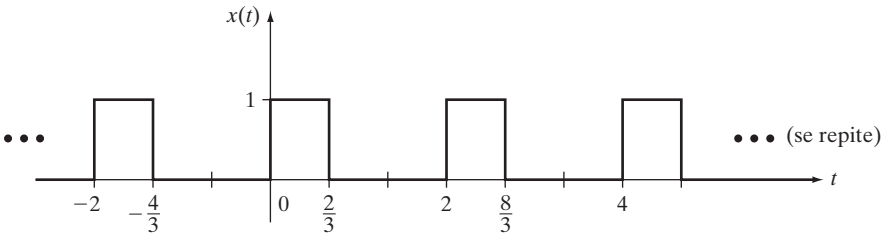
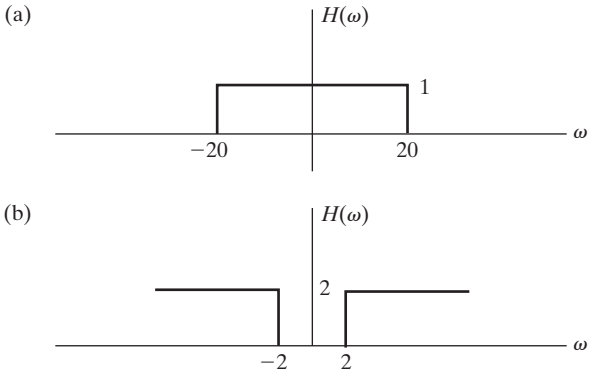



FIGURA P5.19

**5.20.** Dada la entrada

$$x(t) = 4 + 2\cos(10t + \pi/4) + 3\cos(30t - \pi/2)$$

encuentre la salida $y(t)$ para cada uno de los siguientes filtros:




**(c)** $H(\omega) = \text{senc}(\omega/20)$

**(d)** $H(\omega)$, como aparece en la figura 5.20.

**5.21.** Diseñe un filtro que arroje una respuesta $y(t) = 6\cos(30t)$, para la entrada dada en el problema 5.20.

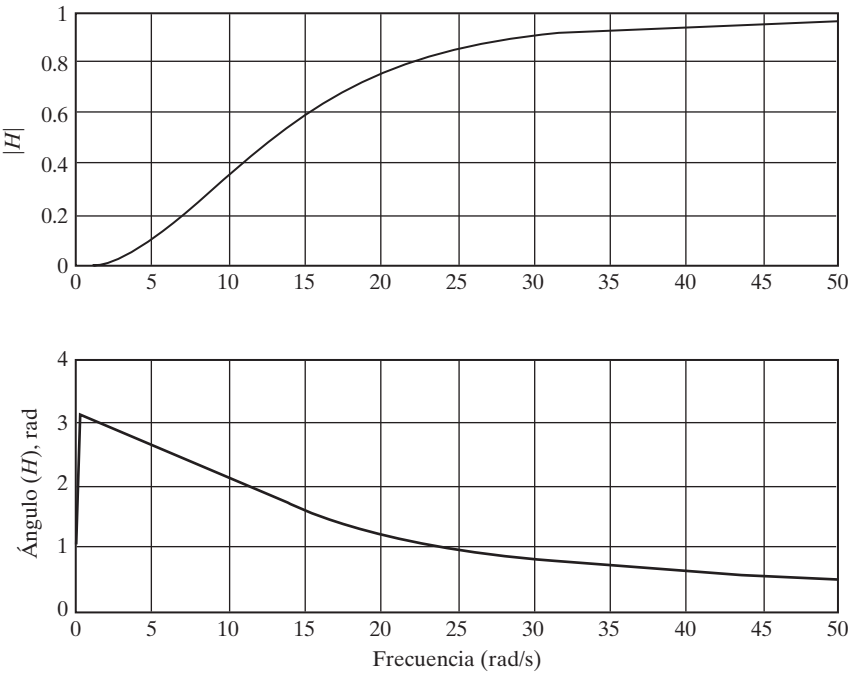



**FIGURA P5.20**

**5.22.** La entrada

$$x(t) = \text{senc}\left(\frac{t}{2\pi}\right)(\cos 3t)^2 + \text{senc}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\cos t, \quad -\infty < t < \infty$$

se aplica a un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo, con una función de respuesta en frecuencia $H(\omega)$. Determine $H(\omega)$ para que la respuesta de salida $y(t)$ que resulta de esta entrada, esté dada por

$$y(t) = \text{senc}\left(\frac{t}{2\pi}\right)$$

**(a)** Exprese su respuesta presentando $H(\omega)$ en forma analítica.
**(b)** Grafique $x(t)$ y $y(t)$ para $-30 < t < 30$, para ver el efecto del filtrado de $H(\omega)$ en el dominio de tiempo. [Para obtener suficiente resolución en $x(t)$, utilice un incremento de tiempo de 0.1 segundos].

**5.23.** Un filtro lineal ideal pasa baja de fase lineal tiene la respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = \begin{cases} 10e^{-j4\omega}, & -4 < \omega < -2, 2 < \omega < 4 \\ 0, & \text{cualquier otra } \omega \end{cases}$$

Calcule la respuesta $y(t)$ del filtro cuando la entrada $x(t)$ es
**(a)** $x(t) = \text{senc}(2t/\pi), -\infty < t < \infty$
**(b)** $x(t) = \text{senc}(3t/\pi), -\infty < t < \infty$
**(c)** $x(t) = \text{senc}(4t/\pi), -\infty < t < \infty$

**(d)** $x(t) = \text{senc}(2t/\pi)\cos t, -\infty < t < \infty$
**(e)** $x(t) = \text{senc}(2t/\pi)\cos 3t, -\infty < t < \infty$
**(f)** $x(t) = \text{senc}(2t/\pi)\cos 6t, -\infty < t < \infty$
**(g)** $x(t) = \text{senc}^2(t/\pi)\cos 2t, -\infty < t < \infty$

Grafique $x(t)$ y la correspondiente salida $y(t)$ para cada uno de los casos calculados en los incisos (a)-(g). En la gráfica, utilice un incremento de tiempo lo suficientemente pequeño para capturar el contenido de alta frecuencia de la señal.

**5.24.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo tiene la función de respuesta en frecuencia $H(\omega) = p_2(\omega + 4) + p_2(\omega - 4)$. Calcule la respuesta de salida para las siguientes entradas:

**(a)** $x(t) = \delta(t)$
**(b)** $x(t) = \cos t \text{ sen } \pi t, -\infty < t < \infty$
**(c)** $x(t) = \text{senc}(4t/\pi), -\infty < t < \infty$
**(d)** $x(t) = \text{senc}(4t/\pi)\cos 3t, -\infty < t < \infty$

Grafique $x(t)$ y la salida $y(t)$ correspondiente para cada uno de los casos calculados (a)-(d). Utilice un incremento de tiempo lo suficientemente pequeño para capturar el contenido de alta frecuencia de la señal.

**5.25.** Una señal periódica $x(t)$ con periodo $T = 2$ tiene los coeficientes de Fourier

$$c_k = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ 0 & \text{si } k \text{ es par} \\ 1 & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

La señal $x(t)$ se aplica a un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo con las curvas de magnitud y fase que aparecen en la figura P5.25. Determine la salida del sistema.

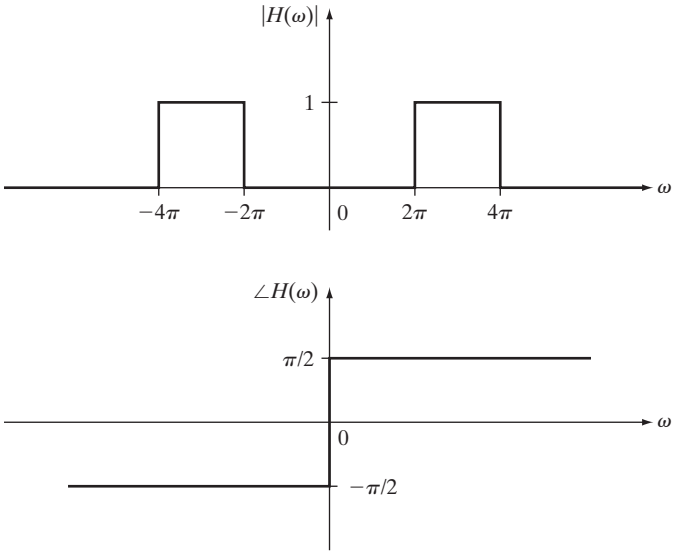



FIGURA P5.25

**5.26.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo tiene la función en frecuencia $H(\omega) = 5\cos 2\omega, -\infty < \omega < \infty$.

**(a)** Esquematice la función magnitud $|H(\omega)|$ y la función fase $\angle H(\omega)$.
**(b)** Calcule la respuesta al impulso del sistema, $h(t)$.
**(c)** Deduzca una expresión para la respuesta de salida $y(t)$, resultante de cualquier entrada $x(t)$.

**5.27.** Un *transformador Hilbert* es un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo con una respuesta al impulso $h(t) = 1/t$, $-\infty < t < \infty$. Utilizando el método de la transformada de Fourier, determine la respuesta de salida resultante de la entrada $x(t) = A \cos \omega_0 t$, $-\infty < t < \infty$, donde $\omega_0$ es cualquier número real estrictamente positivo.

**5.28.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo tiene una función de respuesta en frecuencia $H(\omega) = j\omega e^{-j\omega}$. La entrada $x(t) = \cos(\pi t/2)p_2(t)$ se aplica al sistema para $-\infty < t < \infty$.
**(a)** Determine el espectro de entrada $X(\omega)$, y el espectro de salida correspondiente $Y(\omega)$.
**(b)** Calcule la salida $y(t)$.

**5.29.** Considere el sistema de la figura P5.29, donde $p(t)$ es un tren de impulsos con periodo $T$, y $H(\omega) = Tp_2(\omega)$. Calcule $y(t)$ cuando

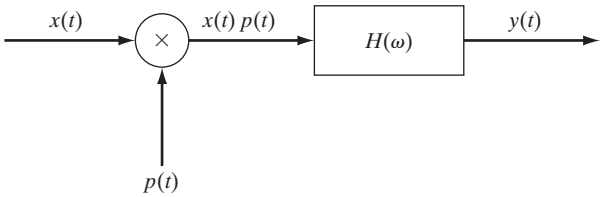



FIGURA P5.29

**(a)** $x(t) = \text{senc}^2(t/2\pi)$ para $-\infty < t < \infty, T = \pi$
**(b)** $x(t) = \text{senc}^2(t/2\pi)$ para $-\infty < t < \infty, T = 2\pi$
**(c)** Para (a) y (b), compare las gráficas de $x(t)$ y la $y(t)$ correspondiente.
**(d)** Repita la parte (a), utilizando la fórmula de interpolación para resolver $y(t)$, y grafique sus resultados con $n$ en el intervalo de $n = -5$ hasta $n = 5$.

**5.30.** Considere la señal cuya transformada de Fourier aparece en la figura P5.30. Sea $x_s(t) = x(t)p(t)$ quien represente a la señal muestreada. Dibuje $|X_s(\omega)|$ para los siguientes casos:

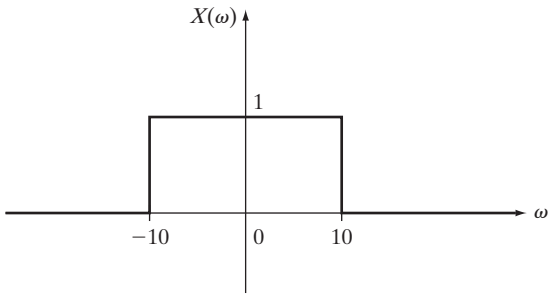



FIGURA P5.30

**(a)** $T = \pi/15$
**(b)** $T = 2\pi/15$

**5.31.** Repita el problema 5.30 para la señal cuya transformada aparece en la figura P5.31.

**5.32.** Considere la señal con el espectro de amplitud que aparece en la figura P5.32. Sea $x_s(t) = x(t)p(t)$ quien represente a la señal muestreada. Dibuje $|X_s(\omega)|$ para los siguientes casos:
**(a)** $T = \pi/4$ s
**(b)** $T = \pi/2$ s
**(c)** $T = 2\pi/3$ s

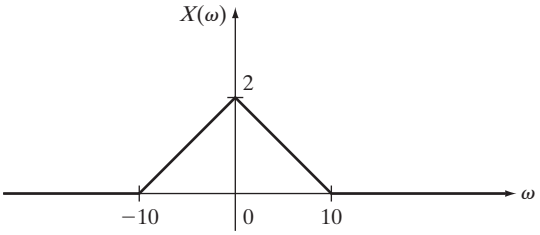



**FIGURA P5.31**

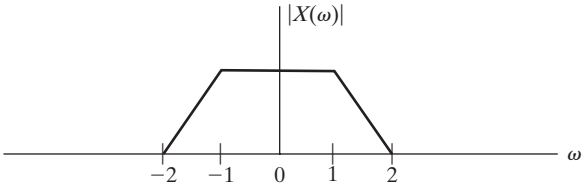



**FIGURA P5.32**

**5.33.** Repita el problema 5.32, en el que ahora la señal es $x(t) = e^{-t/4}\cos(t)u(t)$. Puede graficar las curvas a mano, o utilizar MATLAB para obtener una gráfica más precisa. Para analizar los efectos del aliasing en el dominio de tiempo, grafique $x(t)$ para cada uno de los tiempos de muestreo, desde $t = 0$ a lo largo de 15 segundos. En MATLAB, puede hacerlo si define el vector tiempo con el incremento establecido en el periodo de muestreo deseado. MATLAB entonces "reconstruye" la señal conectando los puntos muestreados mediante líneas rectas (este procedimiento se conoce como interpolación lineal). Compare sus señales muestreada/reconstruida con una señal más precisa, una que genere utilizando un periodo de muestreo muy pequeño (como $T = 0.05$ s), esquematizándolas en la misma gráfica.

**5.34.** Considere la siguiente configuración de muestreo y reconstrucción:

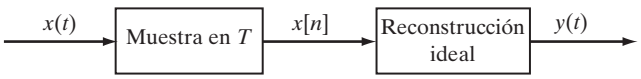
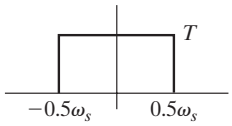



**FIGURA P5.34**

Puede encontrar la salida $y(t)$ de la reconstrucción ideal si envía la señal muestreada $x_s(t) = x(t)p(t)$ a través de un filtro ideal pasa baja con función de respuesta en frecuencia



Sea $x(t) = 2 + \cos(50\pi t)$ y $T = 0.01$ s.

**(a)** Dibuje $|X_s(\omega)|$, donde $x_s(t) = x(t)p(t)$. Determine si se presenta el aliasing.

**(b)** Determine la expresión para $y(t)$.

**(c)** Determine una expresión para $x[n]$.

**5.35.** Repita el problema 5.34 para $x(t) = 2 + \cos(50\pi t)$ y $T = 0.025$ s.

**5.36.** Repita el problema 5.34 para $x(t) = 1 + \cos(20\pi t) + \cos(60\ \pi t)$ y $T = 0.01$ s.

**5.37.** Considere la siguiente configuración de muestreo y reconstrucción

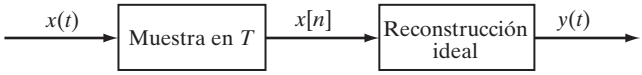
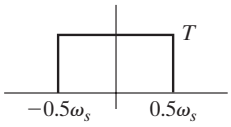



**FIGURA P5.37**

Puede encontrar la salida $y(t)$ de la reconstrucción ideal si envía la señal muestreada $x_s(t) = x(t)p(t)$ a través de un filtro ideal pasa baja con función de respuesta en frecuencia




**(a)** Sea $x(t) = 1 + \cos(15\pi t)$ y $T = 0.1$ s. Dibuje $|X_s(\omega)|$, donde $x_s(t) = x(t)p(t)$. Determine la expresión para $y(t)$.

**(b)** Sea $X(\omega) = 1/(j\omega + 1)$ y $T = 1$ s. Dibuje $|X_s(\omega)|$, donde $x_s(t) = x(t)p(t)$. ¿Se presenta el aliasing? (Justifique su respuesta).

**5.38.** Un filtro digital ideal pasa baja tiene la función en frecuencia $H(\Omega)$ dada por

$$H(\Omega) = \begin{cases} 1, & 0 \le |\Omega| \le \dfrac{\pi}{4} \\ 0, & \dfrac{\pi}{4} < |\Omega| \le \pi \end{cases}$$

**(a)** Determine la respuesta al pulso unitario $h[n]$ del filtro.

**(b)** Calcule la respuesta de salida $y[n]$ del filtro cuando la entrada $x[n]$ está dada por

**(i)** $x[n] = \cos(\pi n/8), n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**(ii)** $x[n] = \cos(3\pi n/4) + \cos(\pi n/16), n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**(iii)** $x[n] = \text{senc}(n/2), n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**(iv)** $x[n] = \text{senc}(n/4), n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**(v)** $x[n] = \text{senc}(n/8)\cos(\pi n/8), n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**(vi)** $x[n] = \text{senc}(n/8)\cos(\pi n/4), n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**(c)** Para cada señal definida en el inciso (b), grafique la entrada $x[n]$ y la salida correspondiente $y[n]$ para determinar el efecto del filtro.

**5.39.** Un filtro digital ideal de fase lineal tiene la función en frecuencia $H(\Omega)$, donde para un periodo, $H(\Omega)$ está dada por

$$H(\Omega) = \begin{cases} e^{-j3\Omega}, & \dfrac{\pi}{2} \leq |\Omega| \leq \pi \\ 0, & 0 \leq |\Omega| < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

**(a)** Determine la respuesta al pulso unitario $h[n]$ del filtro.
**(b)** Calcule la respuesta de salida $y[n]$ del filtro cuando la entrada $x[n]$ está dada por
**(i)** $x[n] = \cos(\pi n/4), n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
**(ii)** $x[n] = \cos(3\pi n/4), n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
**(iii)** $x[n] = \text{senc}(n/2), n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
**(iv)** $x[n] = \text{senc}(n/4), n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
**(v)** $x[n] = \text{senc}(n/4)\cos(\pi n/8), n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
**(vi)** $x[n] = \text{senc}(n/2)\cos(\pi n/8), n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
**(c)** Para cada señal definida en el inciso (b), grafique la entrada $x[n]$ y la salida correspondiente $y[n]$ para determinar el efecto del filtro.

**5.40.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo discreto tiene la función de respuesta en frecuencia $H(\Omega)$ que aparece en la figura P5.40.

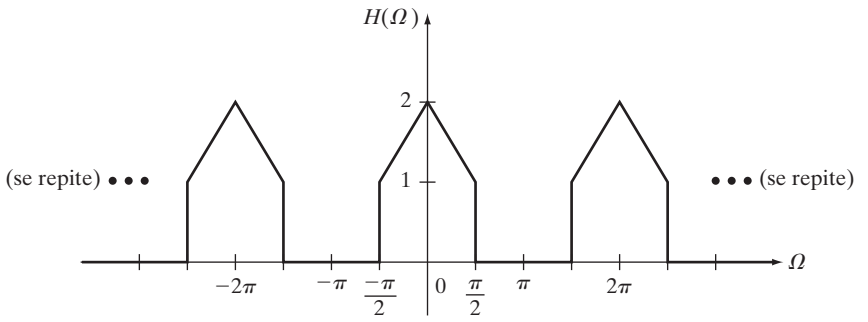



**FIGURA P5.40**

**(a)** Determine la respuesta al pulso unitario $h[n]$ del sistema.
**(b)** Calcule la respuesta de salida $y[n]$ cuando la entrada $x[n]$ es igual a $\delta[n] - \delta[n-1]$.
**(c)** Calcule la respuesta de salida $y[n]$ cuando la entrada es $x[n] = 2 + \text{sen}(\pi n/4) + 2\text{se}n(\pi n/2)$.
**(d)** Calcule la respuesta de salida $y[n]$ cuando $x[n] = \text{senc}(n/4), n = 0, \pm 1, \pm 2$.
**(e)** Para las señales definidas en los incisos (b) y (c), grafique la entrada $x[n]$ y la salida $y[n]$ correspondiente para determinar el efecto del filtro.

**5.41.** Como muestra la figura P5.41, una versión muestreada $x[n]$ de una señal analógica $x(t)$ se aplica a un sistema lineal e invariante en el tiempo discreto, con una función de respuesta

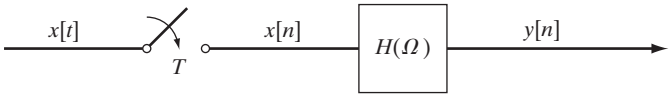



**FIGURA P5.41**

en frecuencia $H(\Omega)$. Elija el intervalo de muestreo $T$ y determine la función de respuesta en frecuencia $H(\Omega)$, de tal manera que

$$y[n] = \begin{cases} x[n], & \text{cuando } x(t) = A\cos\omega_0 t, \quad 100 < \omega_0 < 1000 \\ 0, & \text{cuando } x(t) = A\cos\omega_0 t, \quad 0 \le \omega_0 \le 100 \end{cases}$$

Exprese $H(\Omega)$ en forma analítica.

**5.42.** Considere el filtro digital ideal pasa baja con función de respuesta en frecuencia $H(\Omega)$ definida por

$$H(\Omega) = \begin{cases} e^{-j10\Omega}, & 0 \le |\Omega| \le \dfrac{\pi}{4} \\ 0, & \dfrac{\pi}{4} < |\Omega| < \pi \end{cases}$$

**(a)** La entrada $x[n] = u[n] - u[n-10]$ se aplica al filtro.
  **(i)** Utilizando `fft` en MATLAB, calcule la DFT de 32 puntos de la respuesta de salida resultante. *Nota*: para calcular la DFT de la salida, $Y_k$, escriba un archivo M que realice la multiplicación de la DFT de la entrada, $X_k$, con $H(2\pi k/N)$, donde $H(\Omega)$ es la función de respuesta en frecuencia del filtro. Tome a $N = 32$.
  **(ii)** Utilizando `ifft` en MATLAB, calcule la respuesta de salida $y[n]$ para $n = 0, 1, 2, \ldots, 31$.

**(b)** Repita el inciso (a) para la entrada $x[n] = u[n] - u[n-5]$.

**(c)** Compare la respuesta de salida obtenida en los incisos (a) y (b). ¿Con respecto a qué difieren las respuestas? Explique.

**(d)** Repita el inciso (a) para la entrada

$$x[n] = \begin{cases} r[n] - 0.5, & n = 0, 1, 2, \ldots, 10 \\ 0, & \text{cualquier otra } n \end{cases}$$

donde $r[n]$ es una secuencia de números aleatorios distribuidos uniformemente entre 0 y 1. ¿Cómo se compara la magnitud de la respuesta con la magnitud de la entrada? Explique.

**5.43.** Repita el problema 5.42 para el sistema lineal e invariante en el tiempo discreto con función de respuesta en frecuencia

$$H(\Omega) = \frac{0.04}{e^{j2\Omega} - 1.6e^{j\Omega} + 0.64}$$

**5.44.** Por la definición de un filtro PMP, la función de respuesta en frecuencia $H(\Omega)$ es igual a 1 cuando $\Omega = 0$.

**(a)** Diseñe un filtro digital PMP de manera que la respuesta en frecuencia $H(\Omega)$ satisfaga las siguientes condiciones: $H(\pi/2) = 0.2 - j0.2$, $H(\pi) = 0$. Exprese su respuesta proporcionando la relación de entrada y salida del filtro.

**(b)** Grafique las funciones magnitud y fase del filtro diseñado en el inciso (a).

**5.45.** Considere el sistema de tiempo discreto dado por la ecuación diferencial de entrada y salida

$$y[n+1] + 0.9y[n] = 1.9x[n+1]$$

**(a)** Demuestre que la respuesta al impulso está dada por $h[n] = 1.9(-0.9)^n u[n]$.

**(b)** Calcule la función de respuesta en frecuencia, y grafique la función magnitud $|H(\Omega)|$, para $-\pi \le \Omega \le \pi$.

**(c)** Calcule la respuesta de salida $y[n]$ para una entrada $x[n] = 1 + \text{sen}(\pi n/4) + \text{sen}(\pi n/2)$.

**(d)** Calcule la respuesta de salida $y[n]$ que resulta de la entrada $x[n] = u[n] - u[n-3]$.

**(e)** Utilice el comando `fft` para calcular y graficar la respuesta del sistema a la entrada dada en el inciso (d), para $n = 0$ hasta 30. Compare su respuesta numérica con la respuesta encontrada en el inciso (d). ¿La respuesta coincide con lo esperado en la gráfica de la función de respuesta en frecuencia determinada en el inciso (b)? Explique.

**5.46.** Considere el sistema de tiempo discreto dado por la ecuación diferencial de entrada y salida

$$y[n+1] - 0.9y[n] = 0.1x[n+1]$$

**(a)** Demuestre que la respuesta al impulso está dada por $h[n] = 0.1(0.9)^n u[n]$.

**(b)-(e)** Repita el problema 5.45, incisos (b)-(e) para este sistema.

CAPÍTULO

6

# La transformada de Laplace y la representación de la función de transferencia

En este capítulo explicaremos la transformada de Laplace de una señal de tiempo continuo, y luego utilizaremos este operador para generar la representación de la función de transferencia de un sistema causal, lineal e invariante en el tiempo continuo. Veremos que la representación de la función de transferencia establece una relación algebraica entre la transformada de Laplace de la entrada y de la salida de un sistema; y en términos de esta configuración, se puede calcular la respuesta de salida resultante de un gran número de señales de entrada mediante un solo procedimiento algebraico.

El nombre de la transformada de Laplace es en honor a Pierre Simon Laplace (1749-1827), matemático y astrónomo francés. El capítulo comienza con la sección 6.1, donde definimos la transformada de Laplace de una señal de tiempo continuo. Mostraremos que la transformada de Laplace puede considerarse como una generalización de la transformada de Fourier; de manera más precisa, la adición de un factor exponencial al integrando de la definición de la transformada de Fourier da como resultado la denominada transformada de Laplace de doble lado. Luego definimos la transformada de Laplace de un solo lado, la cual es la forma de la transformada que explicaremos en este libro. En la sección 6.2 explicaremos las propiedades básicas de la transformada de Laplace (de un solo lado). Mediante dichas propiedades mostraremos cómo pueden generarse muchas transformaciones a partir un pequeño grupo de transformadas. Así, en la sección 6.3 desarrollamos el cálculo de la transformada inversa de Laplace en términos de la expansión en fracciones parciales.

De las secciones 6.4 a 6.6 aplicaremos la transformada de Laplace al estudio de los sistemas causales, lineales e invariantes en el tiempo continuo. El desarrollo comienza en la sección 6.4 con los sistemas definidos mediante una ecuación diferencial de entrada y salida. Para cualquiera de estos sistemas podemos generar la representación de la función de transferencia si tomamos la transformada de Laplace de la ecuación diferencial de entrada y salida. Esto da como resultado un marco de trabajo en el dominio *s* que puede utilizarse para resolver la ecuación diferencial de entrada y salida mediante un procedimiento algebraico. En la sección 6.5 generamos la representación de la función de transferencia mediante la aplicación de la transformada de Laplace a la relación de convolución de entrada y salida del sistema. En la sección 6.6 explicaremos las técnicas para generar el modelo de la función de transferencia para circuitos *RLC*, interconexiones de integradores, y diagramas de bloques. La sección 6.7 contiene el resumen del capítulo.

## 6.1 TRANSFORMADA DE LAPLACE DE UNA SEÑAL

Dada una señal de tiempo continuo $x(t)$, en el capítulo 3 definimos la transformada de Fourier $X(\omega)$ de $x(t)$ como:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt \tag{6.1}$$

Como explicamos en la sección 3.3, la transformada de Fourier $X(\omega)$ muestra las componentes de frecuencia que forman la señal $x(t)$.

En el capítulo 3 observamos también que para algunas señales comunes no existe la integral (6.1), y por lo tanto no existe transformada de Fourier (en el sentido ordinario). Un ejemplo es la función escalón unitario $u(t)$, para la cual (6.1) se convierte en

$$X(\omega) = \int_0^\infty e^{-j\omega t}\, dt \tag{6.2}$$

Aunque la integral (6.2) no existe, es posible resolver este problema mediante la adición de un factor de convergencia exponencial $e^{-\sigma t}$ al integrando, donde $\sigma$ es un número real. Así, (6.2) se convierte en

$$X(\omega) = \int_0^\infty e^{-\sigma t} e^{-j\omega t}\, dt$$

la cual puede escribirse como

$$X(\omega) = \int_0^\infty e^{-(\sigma + j\omega)t}\, dt \tag{6.3}$$

Ahora, $X(\omega)$ dada por (6.3) es en realidad una función del número complejo $\sigma + j\omega$, de modo que $X$ debe expresarse como una función $\sigma + j\omega$ en lugar de $\omega$. Entonces, si rescribimos (6.3) obtenemos

$$X(\sigma + j\omega) = \int_0^\infty e^{-(\sigma + j\omega)t}\, dt \tag{6.4}$$

Si evaluamos el lado derecho de (6.4) obtenemos

$$X(\sigma + j\omega) = -\frac{1}{\sigma + j\omega}[e^{-(\sigma + j\omega)t}]_{t=0}^{t=\infty} \tag{6.5}$$

Ahora vemos que

$$\lim_{t \to \infty} e^{-(\sigma + j\omega)t}$$

existe si y sólo si $\sigma > 0$, en cuyo caso

$$\lim_{t \to \infty} e^{-(\sigma + j\omega)t} = 0$$

con lo que (6.5) se reduce a

$$X(\sigma + j\omega) = -\frac{1}{\sigma + j\omega}[0 - e^{-(\sigma + j\omega)(0)}]$$

$$= \frac{1}{\sigma + j\omega} \tag{6.6}$$

Por último, si $s$ representa al número complejo $\sigma + j\omega$, podemos rescribir (6.6) como

$$X(s) = \frac{1}{s} \tag{6.7}$$

La función $X(s)$ dada por (6.7) es la transformada de Laplace de la función escalón unitario $u(t)$. Observe que $X(s)$ es una función valuada en complejos del número complejo $s$. Aquí, valuada en el campo complejo significa que si sustituimos un número complejo específico $s$ dentro de $X(s)$, el valor que resulta de la función será, en general, un número complejo. Por ejemplo, si sustituimos $s = 1 + j$ dentro de (6.7) obtendremos

$$X(1 + j) = \frac{1}{1 + j} = \frac{1 - j}{(1 + j)(1 - j)} = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j(\pi/4)}$$

así, el valor de $X(s)$ para $s = 1 + j$ será el número complejo $\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}$.

Es importante observar que la función $X(s)$ dada por (6.7) sólo está definida para aquellos números complejos $s$ para los que la parte real de $s$ (la cual es igual a $\sigma$) es estrictamente positiva. En este ejemplo en particular, la función $X(s)$ no esta definida para $\sigma = 0$ o $\sigma < 0$, ya que la integral (6.4) no existe para dichos valores de $\sigma$. Al conjunto de valores complejos $s = \sigma + j\omega$ para los cuales

$$\text{Re } s = \sigma > 0$$

se le conoce como *región de convergencia* de la transformada de Laplace para la función escalón.

La construcción anterior puede generalizarse para una gran variedad de señales $x(t)$ de la siguiente manera: dada una señal $x(t)$, de nuevo se adiciona el factor exponencial $e^{-\sigma t}$ al integrando de la definición (6.1) de la transformada de Fourier, lo cual arroja

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-(\sigma + j\omega)t}\, dt \tag{6.8}$$

Con $s$ igual al número complejo $\sigma + j\omega$, (6.8) se convierte en

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st}\, dt \tag{6.9}$$

La función $X(s)$ dada por (6.9) es la t*ransformada de Laplace de doble lado* (*o bilateral*) *de* $x(t)$. Como en el caso de la función escalón unitario, la transformada de Laplace $X(s)$ es, por lo general, una función valuada en el campo complejo del número complejo $s$.

Claramente podemos ver a la transformada bilateral de Laplace $X(s)$ de una señal $x(t)$, como una generalización de la transformada de Fourier de $x(t)$. De modo más preciso, como lo hicimos previamente, podemos generar $X(s)$ directamente de la definición de la transformada de Fourier mediante la adición del factor exponencial $e^{-\sigma t}$ al integrando de la definición de la transformada de Fourier.

A la *transformada de un solo lado* (*o unilateral*) *de Laplace de* $x(t)$, también denotada por $X(s)$, se le define como

$$X(s) = \int_{0}^{\infty} x(t) e^{-st}\, dt \tag{6.10}$$

De (6.10) es evidente que la transformada unilateral depende sólo de los valores de la señal $x(t)$ para $t \geq 0$. Por esta razón, a la definición (6.10) de la transformada se le llama *transformada unilateral de Laplace*. La transformada unilateral de Laplace puede aplicarse a señales $x(t)$ que son diferentes a cero para $t < 0$; sin embargo, cualquier valor diferente de cero de $x(t)$ para $t < 0$ tiene un efecto nulo en la transformada unilateral de Laplace de $x(t)$. Si $x(t)$ es cero para toda $t < 0$, la expresión (6.9) se reduce a (6.10), y por lo tanto en este caso las transformadas unilateral y bilateral de Laplace son lo mismo.

Como veremos en la siguiente sección, los valores iniciales de una señal y sus derivadas pueden incorporarse de manera explícita al marco de trabajo del dominio $s$, por medio de la transformada de Laplace unilateral (al contrario de la transformada bilateral de Laplace). Esto es muy útil para algunos problemas, como resolver una ecuación diferencial con condiciones iniciales. Por lo tanto, en nuestro libro el desarrollo se limita a la transformada unilateral de Laplace, a la que denominaremos *transformada de Laplace*. Además, así como en el caso de la transformada de Fourier, en nuestro libro siempre denotaremos la transformada de Laplace de una señal con una letra mayúscula, y las señales con letras minúsculas.

Dada la señal $x(t)$, al conjunto de todos los números complejos $s$ para los cuales existe la integral (6.10) se le conoce como *región de convergencia* de la transformada de Laplace $X(s)$ de $x(t)$. Así, la transformada de Laplace $X(s)$ de $x(t)$ está bien definida (es decir, existe) para todos los valores de $s$ que pertenecen a la región de convergencia. Debemos insistir que la región de convergencia depende de la función dada $x(t)$. Por ejemplo, cuando $x(t)$ es la función escalón unitario $u(t)$, como mencionamos antes, la región de convergencia es el conjunto de todos los números complejos $s$ tales que Re $s > 0$. Esto lo comprobamos mediante el siguiente ejemplo.

---

**Ejemplo 6.1 La transformada de Laplace de una función exponencial**

Sea $x(t) = e^{-bt}u(t)$, donde $b$ es un número real cualquiera. La transformada de Laplace es

$$X(s) = \int_0^\infty e^{-bt}e^{-st}\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s+b)t}\,dt$$

$$X(s) = -\frac{1}{s+b}[e^{-(s+b)t}]_{t=0}^{t=\infty} \tag{6.11}$$

Para evaluar el lado derecho de (6.11), es necesario determinar

$$\lim_{t\to\infty} e^{-(s+b)t} \tag{6.12}$$

Al establecer $s = \sigma + j\omega$ en (6.12) obtenemos

$$\lim_{t\to\infty} e^{-(\sigma+j\omega+b)t} \tag{6.13}$$

El límite (6.13) existe si y sólo si $\sigma + b > 0$, en cuyo caso el límite es igual a cero, y de (6.11) la transformada de Laplace es

$$X(s) = \frac{1}{s+b} \tag{6.14}$$

La región de convergencia de la transformada $X(s)$ dada por (6.14) es el conjunto de todos los números complejos $s$ tales que Re $s > -b$. Observe que si $b = 0$, de modo que $x(t)$ sea la función escalón unitario $u(t)$, entonces $X(s) = 1/s$ y la región de convergencia es Re $s > 0$. Esto corresponde al resultado que obtuvimos previamente.

### 6.1.1 Relación entre las transformadas de Fourier y de Laplace

Como ya explicamos, la transformada bilateral de Laplace de una señal $x(t)$ puede considerarse como una generalización de la definición de la transformada de Fourier de $x(t)$; esto es, la transformada bilateral de Laplace es la transformada de Fourier con la adición de un factor exponencial. A partir de las construcciones anteriores podría parecer que dada una señal $x(t)$ con $x(t) = 0$ para toda $t < 0$, la transformada de Fourier $X(\omega)$ puede calcularse de manera directa a partir de la transformada (unilateral) de Laplace $X(s)$ si hacemos que $s = j\omega$. Sin embargo, por lo general éste no es el caso. Para ver esto, sea $x(t)$ una señal igual a cero para toda $t < 0$, y supongamos que $x(t)$ tiene la transformada de Laplace $X(s)$ dada por (6.10). Dado que $x(t)$ es cero para toda $t < 0$, la transformada de Fourier $X(\omega)$ de $x(t)$ esta dada por:

$$X(\omega) = \int_0^\infty x(t)e^{-j\omega t}\,dt \tag{6.15}$$

Al comparar (6.10) con (6.15), es tentador concluir que la transformada de Fourier $X(\omega)$ es igual a la transformada de Laplace $X(s)$, con $s = j\omega$; o en términos matemáticos,

$$X(\omega) = X(s)|_{s=j\omega} \tag{6.16}$$

Sin embargo, (6.16) es válida si y sólo si la región de convergencia para $X(s)$ incluye a $\sigma = 0$. Por ejemplo, si $x(t)$ es la función escalón unitario $u(t)$, entonces (6.16) *no* es válida, ya que la región de convergencia es Re $s > 0$, la cual no incluye el punto Re $s = \sigma = 0$. Esto simplemente es una reafirmación del hecho de que la función escalón unitario tiene transformada de Laplace, pero no tiene transformada de Fourier (en el sentido ordinario).

**Ejemplo 6.2 Transformada de Fourier de una transformada de Laplace**

Sea $x(t) = e^{-bt}u(t)$, donde $b$ es un número real cualquiera. Del resultado del ejemplo 6.1, la transformada de Laplace $X(s)$ de $x(t)$ es igual a $1/(s + b)$, y la región de convergencia es Re $s > -b$. Así, si $b > 0$, la región de convergencia incluye a $\sigma = 0$, y la transformada de Fourier $X(\omega)$ de $x(t)$ esta dada por

$$X(\omega) = X(s)|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega + b} \tag{6.17}$$

Como ya observamos en el ejemplo 3.8, cuando $b \leq 0$, $x(t)$ no tiene transformada de Fourier en el sentido ordinario, pero sí tiene transformada de Laplace $X(s) = 1/(s + b)$.

Como hicimos en el caso de la transformada de Fourier, en algunas ocasiones utilizaremos la notación del par de transformadas

$$x(t) \leftrightarrow X(s)$$

para explicar el hecho de que $X(s)$ es la transformada de Laplace de $x(t)$, y lo opuesto, que $x(t)$ es la transformada inversa de Laplace de $X(s)$. Algunos autores prefieren utilizar la notación de operador

$$X(s) = L[x(t)]$$
$$x(t) = L^{-1}[X(s)]$$

donde $L$ representa al operador de la transformada de Laplace y $L^{-1}$ representa al operador de la transformada inversa de Laplace. Aquí utilizaremos la notación de pares de transformadas.

Al especificar un par de transformadas, la región de convergencia no se especifica, ya que en la mayoría de las aplicaciones no es necesario considerarla (siempre y cuando la transformada tenga una región de convergencia). Un ejemplo de un par de transformadas que surge del resultado del ejemplo 6.1 es

$$e^{-bt}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+b} \tag{6.18}$$

Debemos notar que en el par de transformadas (6.18), el escalar $b$ puede ser real o complejo. La comprobación de este par de transformadas cuando $b$ es complejo es una sencilla modificación de la derivación dada en el ejemplo 6.1. Aquí omitimos los detalles.

Podemos determinar la transformada de Laplace de muchas señales de interés buscándola en una tabla. Por lo tanto, con frecuencia no es necesario evaluar la integral en (6.10) con el objeto calcular la transformada. Si utilizamos las propiedades de la transformada de Laplace dadas en la siguiente sección, mostraremos que pueden generarse los pares de transformadas para muchas señales comunes. Después desplegaremos estos resultados en una tabla de transformadas.

### 6.1.2 Cálculo de la transformada de Laplace mediante la manipulación simbólica

Symbolic Math Toolbox de MATLAB tiene un comando `laplace` para calcular la transformada unilateral de Laplace de las señales. Si `x` es una señal definida de manera simbólica, la manera de utilizar el comando es `X = laplace(x)`.

---

**Ejemplo 6.3 Transformadas de Laplace mediante el uso de la manipulación simbólica**

En el ejemplo 6.1 encontramos de manera analítica la transformada de Laplace de una exponencial $x(t) = e^{-bt}u(t)$ con el resultado de la expresión dada en (6.14). Symbolic Math Toolbox de MATLAB calcula esta expresión mediante los siguientes comandos:

```
syms x b t
x = exp(-b*t);
X = laplace(x)
```

Al ejecutar estos comandos obtenemos la expresión

```
X =
1/(s+b)
```

De manera similar, podemos determinar la transformada de Laplace de una función escalón unitario si introducimos

```
x = sym(1);
X = laplace(x)
```

lo cual arroja

```
X =
1/s
```

Aquí utilizamos el comando `sym(1)` para crear un objeto simbólico del número 1.

## 6.2 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

La transformada de Laplace satisface un número de propiedades útiles en una gran variedad de aplicaciones, tales como la derivación de nuevos pares de transformadas a partir de un par dado. En esta sección presentamos varias propiedades fundamentales de la transformada de Fourier. La mayoría de estas propiedades corresponden directamente a las propiedades de la transformada de Fourier que explicamos en la sección 3.6. Las propiedades de la transformada de Laplace que coinciden con las propiedades de la transformada de Fourier pueden comprobarse simplemente mediante el reemplazo de $j\omega$ por $s$ en la prueba de la propiedad de la transformada de Fourier. Así, la comprobación de estas propiedades surge con facilidad a partir de los desarrollos dados en la sección 3.6 y no los consideraremos aquí.

La transformada de Fourier disfruta de algunas propiedades para las cuales no existe una versión en la teoría de la transformada de Laplace. Dos ejemplos son la propiedad de dualidad y el teorema de Parseval. Por lo tanto, observará que no existen versiones de estas propiedades en esta sección.

### 6.2.1 Linealidad

La transformada de Laplace es una operación lineal, tal como la transformada de Fourier. Por lo tanto, si $x(t) \leftrightarrow X(s)$ y $v(t) \leftrightarrow V(s)$, entonces para cualesquiera escalares reales o complejos $a$, $b$,

$$ax(t) + bv(t) \leftrightarrow aX(s) + bV(s) \tag{6.19}$$

**Ejemplo 6.4 Linealidad**

Considere la señal $u(t) + e^{-t}u(t)$. Mediante el par de transformadas (6.18) y la propiedad de linealidad obtenemos como resultado un par de transformadas

$$u(t) + e^{-t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} = \frac{2s+1}{s(s+1)} \tag{6.20}$$

### 6.2.2 Desplazamiento en el tiempo por la derecha

Si $x(t) \leftrightarrow X(s)$, entonces para cualquier número real positivo $c$,

$$x(t-c)u(t-c) \leftrightarrow e^{-cs}X(s) \tag{6.21}$$

En (6.21), observe que $x(t - c)u(t - c)$ es igual al desplazamiento por la derecha de $c$ segundos de $x(t)u(t)$. Aquí, la multiplicación de $x(t)$ por $u(t)$ es necesaria para eliminar cualquier valor diferente de cero de $x(t)$ para $t < 0$.

De (6.21) vemos que un desplazamiento por la derecha de $c$ segundos en el dominio del tiempo corresponde a la multiplicación por $e^{-cs}$ en el dominio de la transformada de Laplace (o en el *dominio s*). La demostración de la propiedad de desplazamiento por la derecha es análoga a la que presentamos para la transformada de Fourier, por lo que aquí la omitimos.

---

**Ejemplo 6.5 Transformada de Laplace de un pulso**

Sea $x(t)$ quien denote a la función pulso rectangular de $c$ segundos definida por

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < c \\ 0, & \text{cualquier otra } t \end{cases}$$

donde $c$ es un número positivo real cualquiera. Al expresar $x(t)$ en términos de la función escalón unitario $u(t)$, obtenemos

$$x(t) = u(t) - u(t - c)$$

Por linealidad, la transformada de Laplace $X(s)$ de $x(t)$ es la diferencia de la transformada $u(t)$ y la transformada de $u(t - c)$. Ahora $u(t - c)$ es el desplazamiento por la derecha de $c$ segundos de $u(t)$, y así, mediante la propiedad (6.21) de desplazamiento por la derecha, la transformada de Laplace de $u(t - c)$ es igual a $e^{-cs}/s$. Entonces,

$$u(t) - u(t - c) \leftrightarrow \frac{1}{s} - \frac{e^{-cs}}{s} = \frac{1 - e^{-cs}}{s} \tag{6.22}$$

---

Debemos destacar que no hay un resultado comparable para un desplazamiento en el tiempo por la derecha. Para ver esto, sea $c$ cualquier número real positivo, y considere la señal desplazada en el tiempo $x(t + c)$. Debido a que $c > 0$, $x(t + c)$ es un desplazamiento por la izquierda de $c$ segundos de la señal $x(t)$. La transformada de Laplace de $x(t + c)$ es igual a

$$\int_0^\infty x(t + c)e^{-st}\,dt \tag{6.23}$$

Sin embargo, (6.23) no puede expresarse en términos de la transformada de Laplace $X(s)$ de $x(t)$. ¡Inténtelo! En particular, (6.23) no es igual a $e^{cs}X(s)$.

### 6.2.3 Escalamiento de tiempo

Si $x(t) \leftrightarrow X(s)$, para cualquier número real positivo $a$,

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right) \tag{6.24}$$

Como explicamos en la sección 3.6, la señal $x(at)$ es una versión escalada en el tiempo de $x(t)$. Por (6.24) vemos que un escalamiento de tiempo corresponde a escalar la variable compleja $s$ en un factor de $1/a$ en el dominio de la transformada de Laplace (más la multi-

plicación de la transformada por $1/a$). El par de transformadas (6.24) puede demostrarse de la misma manera en que demostramos el par de transformadas correspondiente a la teoría de Fourier (vea la sección 3.6.).

---

**Ejemplo 6.6 Escalamiento de tiempo**

Considere la función escalón unitario escalada en el tiempo $u(at)$, donde $a$ es cualquier número real positivo. Por (6.24)

$$u(at) \leftrightarrow \frac{1}{a}\left(\frac{1}{s/a}\right) = \frac{1}{s}$$

Este resultado no es inesperado, ya que $u(at) = u(t)$ para cualquier número real $a > 0$.

---

### 6.2.4 Multiplicación por una potencia de *t*

Si $x(t) \leftrightarrow X(s)$, entonces para cualquier entero positivo $N$,

$$t^N x(t) \leftrightarrow (-1)^N \frac{d^N}{ds^N} X(s) \tag{6.25}$$

En particular, para $N = 1$,

$$tx(t) \leftrightarrow -\frac{d}{ds} X(s) \tag{6.26}$$

y para $N = 2$,

$$t^2 x(t) \leftrightarrow \frac{d^2}{ds^2} X(s) \tag{6.27}$$

La demostración de (6.26) es muy similar a la que corresponde a la propiedad de multiplicación por $t$ que presentamos en la teoría de Fourier, por lo que nuevamente omitimos los detalles.

---

**Ejemplo 6.7 Función rampa unitaria**

Considere la función rampa unitaria $r(t) = tu(t)$. De (6.26), la transformada de Laplace $R(s)$ de $r(t)$ está dada por

$$R(s) = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

---

Al generalizar el ejemplo 6.7 al caso $t^N u(t), N = 1, 2, \ldots$, obtenemos el par de transformadas

$$t^N u(t) \leftrightarrow \frac{N!}{s^{N+1}} \tag{6.28}$$

donde $N!$ es el factorial de $N$.

**Ejemplo 6.8 Multiplicación de una exponencial por *t***

Sea $v(t) = te^{-bt}u(t)$, donde $b$ es cualquier número real. Al utilizar los pares de transformadas (6.18) y (6.26) obtenemos

$$V(s) = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s+b} = \frac{1}{(s+b)^2}$$

Si generalizamos el ejemplo 6.8 al caso $t^N e^{-bt}u(t)$, da como resultado el par de transformadas

$$t^N e^{-bt}u(t) \leftrightarrow \frac{N!}{(s+b)^{N+1}} \tag{6.29}$$

### 6.2.5 Multiplicación por una exponencial

Si $x(t) \leftrightarrow X(s)$, entonces para cualquier número real o complejo $a$,

$$e^{at}x(t) \leftrightarrow X(s-a) \tag{6.30}$$

Por la propiedad (6.30), una multiplicación por una función exponencial en el dominio del tiempo corresponde a un desplazamiento de la variable $s$ en el dominio de la transformada de Laplace. La demostración (6.30) surge directamente de la definición de la transformada de Laplace. Los detalles se los dejamos al lector.

**Ejemplo 6.9 Multiplicación por una exponencial**

Sea $v(t) = [u(t) - u(t-c)]e^{at}$, donde $c$ es un número real positivo y $a$ es cualquier número real. La función $v(t)$ es el producto del pulso de $c$ segundos $u(t) - u(t-c)$ y la función exponencial $e^{at}$. La función $v(t)$ aparece en la figura 6.1 para el caso $a < 0$. Ahora, a partir del resultado del ejemplo 6.5,

$$u(t) - u(t-c) \leftrightarrow \frac{1 - e^{-cs}}{s}$$

Entonces, al utilizar (6.30) obtenemos

$$V(s) = \frac{1 - e^{-c(s-a)}}{s-a}$$

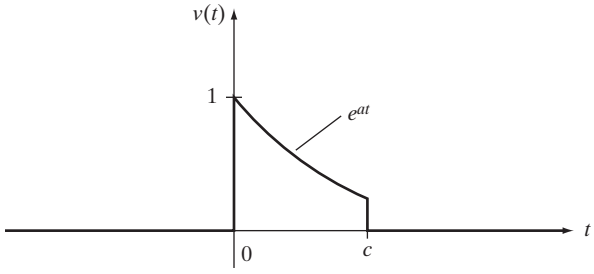



**FIGURA 6.1**
La función $v(t)$ del ejemplo 6.9.

### 6.2.6 Multiplicación por una sinusoide

Si $x(t) \leftrightarrow X(s)$, entonces para cualquier número real $\omega$,

$$x(t)\text{sen } \omega t \leftrightarrow \frac{j}{2}[X(s + j\omega) - X(s - j\omega)] \tag{6.31}$$

$$x(t)\cos \omega t \leftrightarrow \frac{1}{2}[X(s + j\omega) + X(s - j\omega)] \tag{6.32}$$

Los pares de transformadas (6.31) y (6.32) pueden demostrarse si primero escribimos $x(t)$ sen $\omega t$ y $x(t)\cos \omega t$ en la forma

$$x(t)\text{sen } \omega t = \frac{j}{2}x(t)[e^{-j\omega t} - e^{j\omega t}] \tag{6.33}$$

$$x(t)\cos \omega t = \frac{1}{2}x(t)[e^{-j\omega t} + e^{j\omega t}] \tag{6.34}$$

Por (6.30),

$$e^{\pm j\omega t}x(t) \leftrightarrow X(s \mp j\omega)$$

Al combinar esto con (6.33) y (6.34) obtenemos (6.31) y (6.32).

---

**Ejemplo 6.10 Transformada de Laplace de un coseno**

Sea $v(t) = (\cos\omega t)u(t)$. Ahora, $u(t) \leftrightarrow 1/s$, y si utilizamos (6.32) con $x(t) = u(t)$ obtenemos

$$\begin{aligned} V(s) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s + j\omega} + \frac{1}{s - j\omega}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{s - j\omega + s + j\omega}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

---

El ejemplo 6.10 arroja el par de transformadas

$$(\cos \omega t)u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2} \tag{6.35}$$

De manera similar, es posible comprobar el par de transformadas

$$(\text{sen } \omega t)u(t) \leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \tag{6.36}$$

**Ejemplo 6.11 Multiplicación de una exponencial por un coseno y un seno**

Ahora sea $v(t) = (e^{-bt}\cos \omega t)u(t)$. Podemos calcular la transformada de Laplace de $v(t)$ si establecemos $x(t) = e^{-bt}u(t)$ y después utilizamos la propiedad de multiplicación por cos $\omega t$. También es posible establecer $x(t) = (\cos \omega t)u(t)$ y usar la multiplicación por una propiedad exponencial. Lo último es más fácil de realizar, por lo que lo haremos de esta manera. Si sustituimos $s$ por $s + b$ en el lado derecho de (6.35), resulta en el par de transformadas

$$(e^{-bt}\cos \omega t)u(t) \leftrightarrow \frac{s + b}{(s + b)^2 + \omega^2} \tag{6.37}$$

De manera similar, es posible comprobar el par de transformadas

$$(e^{-bt}\,\text{sen}\, \omega t)u(t) \leftrightarrow \frac{\omega}{(s + b)^2 + \omega^2} \tag{6.38}$$

**Ejemplo 6.12 Multiplicación por un seno**

Sea $v(t) = (\text{sen}^2\, \omega t)u(t)$. Si establecemos $x(t) = (\text{sen}\, \omega t)u(t)$ y utilizamos la propiedad de multiplicación por sen $\omega t$, obtenemos

$$\begin{aligned} V(s) &= \frac{j}{2}\left[\frac{\omega}{(s + j\omega)^2 + \omega^2} - \frac{\omega}{(s - j\omega)^2 + \omega^2}\right] \\ &= \frac{j}{2}\frac{\omega(s - j\omega)^2 + \omega^3 - \omega(s + j\omega)^2 - \omega^3}{(s + j\omega)^2(s - j\omega)^2 + \omega^2(s - j\omega)^2 + \omega^2(s + j\omega)^2 + \omega^4} \\ &= \frac{j}{2}\frac{-j4\omega^2 s}{s^4 + 4\omega^2 s^2} \\ &= \frac{2\omega^2}{s(s^2 + 4\omega^2)} \end{aligned} \tag{6.39}$$

### 6.2.7 Derivación en el dominio del tiempo

Si $x(t) \leftrightarrow X(s)$, entonces

$$\dot{x}(t) \leftrightarrow sX(s) - x(0) \tag{6.40}$$

donde $\dot{x}(t) = dx(t)/dt$. Así, la derivación en el dominio del tiempo corresponde a la multiplicación por $s$ en el dominio de la transformada de Laplace [más la resta del valor inicial $x(0)$]. Demostraremos la propiedad (6.40) calculando la transformada de la derivada de $x(t)$. La transformada de $\dot{x}(t)$ está dada por

$$\int_0^\infty \dot{x}(t)e^{-st}\, dt \tag{6.41}$$

La integral en (6.41) se evaluará por partes: sea $v = e^{-st}$, tal que $dv = -se^{-st}$, y sea $w = x(t)$, tal que $dw = \dot{x}(t)\,dt$. Entonces,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \dot{x}(t)e^{-st}\,dt &= vw|_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^\infty w\,dv \\ &= e^{-st}x(t)|_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^\infty x(t)(-s)e^{-st}\,dt \\ &= \lim_{t\to\infty}[e^{-st}x(t)] - x(0) + sX(s) \end{aligned} \tag{6.42}$$

Cuando $|x(t)| < ce^{at}$, $t > 0$, para algunas constantes $a$ y $c$, se desprende que para cualquier $s$ tal que Re $s > a$,

$$\lim_{t\to\infty} e^{-st}x(t) = 0$$

Así, de (6.42),

$$\int_0^\infty \dot{x}(t)e^{-st}\,dt = -x(0) + sX(s)$$

lo cual demuestra (6.40).

Debemos resaltar que, si $x(t)$ es discontinua en $t = 0$, o si $x(t)$ contiene un impulso o derivada de un impulso ubicado en $t = 0$, es necesario que en (6.40) tomemos el tiempo inicial como $0^-$ (un número negativo infinitesimalmente pequeño). En otras palabras, el par de transformadas (6.40) se vuelve

$$\dot{x}(t) \leftrightarrow sX(s) - x(0^-) \tag{6.43}$$

Observe que si $x(t) = 0$ para $t < 0$, entonces $x(0^-) = 0$, y

$$\dot{x}(t) \leftrightarrow sX(s) \tag{6.44}$$

---

**Ejemplo 6.13 Derivación**

Sea $x(t) = u(t)$. Entonces $\dot{x}(t) = \delta(t)$. Debido a que $\dot{x}(t)$ es el impulso unitario ubicado en $t = 0$, es necesario utilizar (6.43) para calcular la transformada de Laplace de $\dot{x}(t)$. Esto arroja

$$\dot{x}(t) \leftrightarrow s\frac{1}{s} - u(0^-) = 1 - 0 = 1$$

Por lo tanto, la transformada de Laplace del impulso unitario $\delta(t)$ es igual a la función constante 1. Podríamos haber obtenido este resultado aplicando directamente la definición (6.10) de la transformada. Si escribimos este resultado en forma de par de transformadas obtenemos

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \tag{6.45}$$

---

La transformada de Laplace de una segunda derivada, o de derivadas de orden más alto de una señal $x(t)$ también puede expresarse en términos de $X(s)$ y condiciones iniciales. Por ejemplo, el par de transformadas en el caso de la derivada de segundo orden es

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \leftrightarrow s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) \tag{6.46}$$

El par de transformadas (6.46) puede demostrarse integrando dos veces por partes la expresión integral correspondiente a la transformada de la segunda derivada de $x(t)$. Aquí omitimos los detalles. Debemos observar que si la segunda derivada de $x(t)$ es discontinua o contiene un impulso o la derivada de un impulso ubicado en $t = 0$, es necesario tomar las condiciones iniciales de (6.46) en el tiempo $t = 0^-$.

Ahora, sea $N$ un entero positivo cualquiera, y sea $x^{(N)}(t)$ quien denote la $N$-ésima derivada de una señal $x(t)$ dada. Entonces, la transformada de $x^{(N)}(t)$ está dada por el par de transformadas

$$x^{(N)}(t) \leftrightarrow s^NX(s) - s^{N-1}x(0) - s^{N-2}\dot{x}(0) - \cdots - sx^{(N-2)}(0) - x^{(N-1)}(0) \tag{6.47}$$

### 6.2.8 Integración

Si $x(t) \leftrightarrow X(s)$, entonces

$$\int_0^t x(\lambda)\, d\lambda \leftrightarrow \frac{1}{s}X(s) \tag{6.48}$$

Por (6.48), la transformada de Laplace de la integral de $x(t)$ es igual a $X(s)$ dividida por $s$. El par de transformadas (6.48) surge directamente de la propiedad de derivación que acabamos de explicar. Para ver esto, sea $v(t)$ quien denote la integral $x(t)$ dada por

$$v(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t x(\lambda)\, d\lambda, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Entonces $x(t) = \dot{v}(t)$ para $t > 0$, y ya que $v(t) = 0$ para $t < 0$, por (6.44), $X(s) = sV(s)$. Por lo tanto, $V(s) = (1/s)X(s)$, lo cual demuestra (6.48).

---

**Ejemplo 6.14 Integración**

Sea $x(t) = u(t)$. Entonces, la integral de $x(t)$ es la función rampa unitaria $r(t) = tu(t)$. Por (6.48), la transformada de Laplace de $r(t)$ es igual a $1/s$ veces la transformada de $u(t)$. El resultado es el par de transformadas

$$r(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^2}$$

Recuerde que anteriormente derivamos este par de transformadas mediante la propiedad de multiplicación por $t$.

---

### 6.2.9 Convolución

Dadas dos señales $x(t)$ y $v(t)$ con $x(t)$ y $v(t)$ iguales a cero para toda $t < 0$, considere la convolución $x(t)*v(t)$ dada por

$$x(t) * v(t) = \int_0^t x(\lambda)v(t - \lambda)\, d\lambda$$

Ahora, con $X(s)$ igual a la transformada de Laplace de $x(t)$, y $V(s)$ igual a la transformada de Laplace de $v(t)$, se hace evidente que la transformada de la convolución $x(t)*v(t)$ es igual al producto $X(s)V(s)$; es decir, el siguiente par de transformadas es válido:

$$x(t) * v(t) \leftrightarrow X(s)V(s) \tag{6.49}$$

Por (6.49), la convolución en el dominio del tiempo corresponde a un producto en el dominio de la transformada de Laplace. En la sección 6.5 veremos que esta propiedad resulta en una relación algebraica entre las transformadas de las entradas y las salidas de un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo. La demostración de (6.49) es muy parecida a la demostración de la propiedad correspondiente en la teoría de Fourier, por lo que no la presentaremos.

El par de transformadas (6.49) arroja un procedimiento para calcular la convolución $x(t)*v(t)$ de dos señales $x(t)$ y $v(t)$ [con $x(t) = v(t) = 0$ para toda $t < 0$]: primero, calcule las transformadas de Laplace $X(s)$, $V(s)$ de $x(t)$, $v(t)$, y después calcule la transformada inversa de Laplace del producto $X(s)V(s)$. El resultado es la convolución $x(t)*v(t)$. Ilustramos este proceso con el siguiente ejemplo.

---

**Ejemplo 6.15 Convolución**

Sea $x(t)$ quien denote el pulso de un segundo dado por $x(t) = u(t) - u(t - 1)$. El objetivo es determinar la convolución $x(t)*x(t)$ de esta señal consigo misma. Del ejemplo 6.4 la transformada $X(s)$ de $x(t)$ es $X(s) = (1 - e^{-s})/s$. Así, de (6.49) la transformada de la convolución $x(t)*x(t)$ es igual a $X^2(s)$, donde

$$X^2(s) = \left(\frac{1 - e^{-s}}{s}\right)^2 = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2}$$

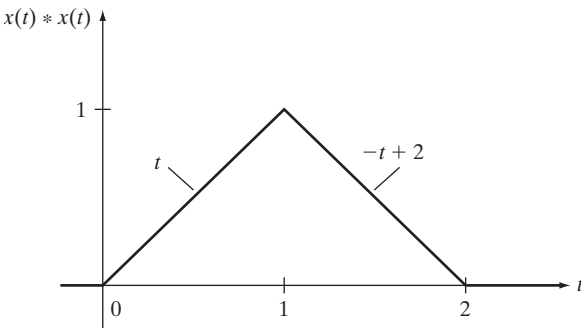



**FIGURA 6.2**
Gráfica de la convolución $x(t) * x(t)$.

Ahora, la convolución $x(t)*x(t)$ es igual a la transformada inversa de Laplace de $X^2(s)$, la cual en este caso puede calcularse mediante las propiedades de linealidad y desplazamiento por la derecha, y de los pares de transformadas $u(t) \leftrightarrow 1/s$, $tu(t) \leftrightarrow 1/s^2$. El resultado es

$$x(t) * x(t) = tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2)$$

La convolución $x(t)*x(t)$ aparece en la figura 6.2. La gráfica muestra que la convolución de un pulso rectangular consigo mismo da como resultado un pulso triangular. Note que observamos este resultado por primera vez en el capítulo 2, cuando utilizamos el comando de MATLAB, `conv`.

### 6.2.10 Teorema del valor inicial

Dada una señal $x(t)$ con transformada $X(s)$, los valores iniciales $x(0)$ y $\dot{x}(0)$ pueden calcularse mediante las expresiones

$$x(0) = \lim_{s\to\infty} sX(s) \tag{6.50}$$

$$\dot{x}(0) = \lim_{s\to\infty} [s^2X(s) - sx(0)] \tag{6.51}$$

En el caso general, para cualquier entero positivo $N$,

$$x^{(N)}(0) = \lim_{s\to\infty} [s^{N+1}X(s) - s^Nx(0) - s^{N-1}\dot{x}(0) - \cdots - sx^{(N-1)}(0)] \tag{6.52}$$

Es necesario observar que la relación (6.52) no es válida si la $N$-ésima derivada $x^{(N)}(t)$ contiene un impulso o la derivada de un impulso en el tiempo $t = 0$.

La relación (6.52) para $N = 0, 1, 2,\ldots$ se conoce como *teorema del valor inicial*. Demostraremos este teorema para el caso $N = 0$, y supondremos que $x(t)$ tiene expansión en *series de Taylor*:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x^{(i)}(0)\frac{t^i}{i!} \tag{6.53}$$

donde $i!$ es el factorial de $i$, y $x^{(i)}(0)$ es la $i$ésima derivada de $x(t)$ evaluada en $t = 0$. Ahora,

$$sX(s) = \int_0^{\infty} sx(t)e^{-st}\,dt \tag{6.54}$$

y utilizando (6.53) en (6.54), obtenemos

$$sX(s) = \int_0^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} sx^{(i)}(0)\frac{t^i}{i!}e^{-st}\,dt \tag{6.55}$$

Si intercambiamos la integral y la sumatoria de (6.55), y utilizamos el par de transformadas (6.28) obtenemos

$$sX(s) = \sum_{i=0}^{\infty} x^{(i)}(0)\frac{s}{s^{i+1}} = \sum_{i=0}^{\infty} x^{(i)}(0)\frac{1}{s^i}$$

Después, tomando el límite cuando $s \to \infty$ tenemos

$$\lim_{s\to\infty} sX(s) = x(0)$$

lo que demuestra (6.50).

El teorema del valor inicial es útil, ya que permite calcular los valores iniciales de una función $x(t)$ y sus derivadas directamente de la transformada de Laplace $X(s)$ de $x(t)$. Si $X(s)$ es conocida, pero $x(t)$ no lo es, entonces es posible calcular estos valores iniciales sin tener que calcular la transformada inversa de Laplace de $x(t)$. También debemos destacar que estos valores iniciales son en $t = 0$ o $t = 0^+$, no en $t = 0^-$. Los valores iniciales en $t = 0^-$ no pueden determinarse mediante la transformada de Laplace unilateral (a menos que la señal sea continua en $t = 0$), ya que la transformada se basa sólo en la señal $x(t) \geq 0$.

---

**Ejemplo 6.16 Valor inicial**

Suponga que la señal $x(t)$ tiene la transformada de Laplace

$$X(s) = \frac{-3s^2 + 2}{s^3 + s^2 + 3s + 2}$$

Entonces,

$$\lim_{s\to\infty} sX(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{-3s^3 + 2s}{s^3 + s^2 + 3s + 2} = \frac{-3}{1}$$

Así, $x(0) = -3$.

---

### 6.2.11 Teorema del valor final

Dada una señal $x(t)$ con transformada $X(s)$, suponga que $x(t)$ tiene un límite $x(\infty)$ cuando $t \to \infty$; es decir,

$$x(\infty) = \lim_{t\to\infty} x(t)$$

La existencia del límite $x(\infty)$ resulta ser equivalente a requerir que la región de convergencia de $sX(s)$ incluya el valor $s = 0$.

Si $x(\infty)$ existe, el *teorema del valor final* establece que

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s) \tag{6.56}$$

Para demostrar (6.56), primero observe que por la propiedad de derivación,

$$\int_0^\infty \dot{x}(t)e^{-st}\,dt = sX(s) - x(0) \tag{6.57}$$

Si tomamos el límite de ambos lados de (6.57) cuando $s \to 0$ tenemos

$$\lim_{s\to 0}\int_0^\infty \dot{x}(t)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty \dot{x}(t)\,dt = \lim_{s\to 0}[sX(s) - x(0)] \tag{6.58}$$

Ahora, si $x(t)$ tiene un límite $x(\infty)$ cuando $t \to \infty$, y usamos la integración por partes obtenemos

$$\int_0^\infty \dot{x}(t)\, dt = x(\infty) - x(0) \tag{6.59}$$

Al combinar (6.58) y (6.59) obtenemos (6.56).

El teorema del valor final es una propiedad muy útil, ya que el límite de una señal $x(t)$ cuando $t \to \infty$ puede calcularse directamente de la transformada de Laplace $X(s)$. Sin embargo, debemos tener cuidado al aplicar este teorema, ya que podría existir el límite de $sX(s)$ cuando $s \to 0$, aunque $x(t)$ no tenga un límite cuando $t \to \infty$. Por ejemplo, suponga que

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

Entonces,

$$\lim_{s \to 0} sX(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s}{s^2 + 1} = 0$$

Pero $x(t) = \text{sen } t$, y sen $t$ no tiene un límite cuando $t \to \infty$. En la siguiente sección mostraremos que en muchos casos de interés, si una señal $x(t)$ tiene o no un límite cuando $t \to \infty$ puede determinarse mediante una verificación de la transformada $X(s)$.

Por conveniencia del lector, en la tabla 6.1 presentamos un resumen de las propiedades de la transformada de Laplace. La tabla 6.2 contiene una colección de los pares de transformadas más comunes, los cuales incluyen los pares que dedujimos en esta sección mediante las propiedades de la transformada de Laplace.

## 6.3 CÁLCULO DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Dada una señal $x(t)$ con transformada de Laplace $X(s)$, podemos calcular $x(t)$ a partir de $X(s)$ si tomamos la transformada inversa de Laplace de $X(s)$. La operación de la transformada inversa está dada por

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) e^{st}\, ds \tag{6.60}$$

La integral en (6.60) se evalúa en el plano complejo a lo largo de la ruta $s = c + j\omega$, desde $c - j\infty$ hasta $c + j\infty$, donde $c$ es cualquier número real para el que la ruta $s = c + j\omega$ se encuentra en la región de convergencia de $X(s)$. Para una explicación detallada de la integración compleja, vea Churchill y Brown [2003].

En general es difícil evaluar la integral en (6.60), y por lo tanto es aconsejable evitar su uso para calcular la transformada inversa. En esta sección proporcionaremos un procedimiento algebraico para calcular la transformada inversa, en el caso de que $X(s)$ sea una función racional de $s$. El desarrollo comienza después de definir la transformada racional de Laplace.

**TABLA 6.1** Propiedades de la transformada de Laplace

| Propiedad | Par de transformadas/Propiedad |
|---|---|
| Linealidad | $ax(t) + bv(t) \leftrightarrow aX(s) + bV(s)$ |
| Desplazamiento por la derecha en el tiempo | $x(t - c)u(t - c) \leftrightarrow e^{-cs}X(s), c > 0$ |
| Escalamiento de tiempo | $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right), a > 0$ |
| Multiplicación por una potencia de $t$ | $t^N x(t) \leftrightarrow (-1)^N \frac{d^N}{ds^N}X(s), N = 1, 2, \ldots$ |
| Multiplicación por una exponencial | $e^{at}x(t) \leftrightarrow X(s - a)$, $a$ real o complejo |
| Multiplicación por sen $\omega t$ | $x(t) \operatorname{sen} \omega t \leftrightarrow \frac{j}{2}[X(s + j\omega) - X(s - j\omega)]$ |
| Multiplicación por cos $\omega t$ | $x(t) \cos \omega t \leftrightarrow \frac{1}{2}[X(s + j\omega) + X(s - j\omega)]$ |
| Derivación en el dominio del tiempo | $\dot{x}(t) \leftrightarrow sX(s) - x(0)$ |
| Segunda derivada | $\ddot{x}(t) \leftrightarrow s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$ |
| $N$-ésima derivada | $x^{(N)}(t) \leftrightarrow s^N X(s) - s^{N-1}x(0) - s^{N-2}\dot{x}(0) - \cdots - sx^{(N-2)}(0) - x^{(N-1)}(0)$ |
| Integración | $\int_0^t x(\lambda)\, d\lambda \leftrightarrow \frac{1}{s}X(s)$ |
| Convolución | $x(t) * v(t) \leftrightarrow X(s)V(s)$ |
| Teorema del valor inicial | $x(0) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$ |
| | $\dot{x}(0) = \lim_{s\to\infty} [s^2X(s) - sx(0)]$ |
| | $x^{(N)}(0) = \lim_{s\to\infty} [s^{N+1}X(s) - s^N x(0) - s^{N-1}\dot{x}(0) - \cdots - sx^{(N-1)}(0)]$ |
| Teorema del valor final | Si $\lim_{t\to\infty} x(t)$ existe, entonces $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$ |

### 6.3.1 Transformada racional de Laplace

Suponga que $x(t)$ tiene la transformada de Laplace $X(s)$

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \tag{6.61}$$

donde $B(s)$ y $A(s)$ son polinomios de la variable compleja $s$ dados por

$$B(s) = b_M s^M + b_{M-1}s^{M-1} + \cdots + b_1 s + b_0 \tag{6.62}$$

$$A(s) = a_N s^N + a_{N-1}s^{N-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \tag{6.63}$$

En (6.62) y (6.63), $M$ y $N$ son enteros positivos y los coeficientes $b_M, b_{M-1},\ldots, b_1, b_0$ y $a_N, a_{N-1},\ldots, a_1, a_0$ son números reales. Si suponemos que $b_M \neq 0$ y $a_N \neq 0$, el grado del polinomio

**TABLA 6.2** Pares de transformadas de Laplace más comunes

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$$

$$u(t) - u(t-c) \leftrightarrow \frac{1 - e^{-cs}}{s}, c > 0$$

$$t^N u(t) \leftrightarrow \frac{N!}{s^{N+1}}, N = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$\delta(t-c) \leftrightarrow e^{-cs}, c > 0$$

$$e^{-bt}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+b}, b \text{ real o complejo}$$

$$t^N e^{-bt}u(t) \leftrightarrow \frac{N!}{(s+b)^{N+1}}, \quad N = 1, 2, 3, \ldots$$

$$(\cos \omega t)u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$(\operatorname{sen} \omega t)u(t) \leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$(\cos^2 \omega t)u(t) \leftrightarrow \frac{s^2 + 2\omega^2}{s(s^2 + 4\omega^2)}$$

$$(\operatorname{sen}^2 \omega t)u(t) \leftrightarrow \frac{2\omega^2}{s(s^2 + 4\omega^2)}$$

$$(e^{-bt} \cos \omega t)u(t) \leftrightarrow \frac{s+b}{(s+b)^2 + \omega^2}$$

$$(e^{-bt} \operatorname{sen} \omega t)u(t) \leftrightarrow \frac{\omega}{(s+b)^2 + \omega^2}$$

$$(t \cos \omega t)u(t) \leftrightarrow \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

$$(t \operatorname{sen} \omega t)u(t) \leftrightarrow \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

$$(te^{-bt} \cos \omega t)u(t) \leftrightarrow \frac{(s+b)^2 - \omega^2}{[(s+b)^2 + \omega^2]^2}$$

$$(te^{-bt} \operatorname{sen} \omega t)u(t) \leftrightarrow \frac{2\omega(s+b)}{[(s+b)^2 + \omega^2]^2}$$

$B(s)$ es igual a $M$, y el grado del polinomio $A(s)$ es igual a $N$. El polinomio $B(s)$ es el "polinomio del numerador" de $X(s)$, y $A(s)$ es el "polinomio del denominador" de $X(s)$. Siempre asumimos que $B(s)$ y $A(s)$ no tienen factores comunes. Si existen factores comunes, deben eliminarse.

Se dice que la transformada $X(s) = B(s)/A(s)$, con $B(s)$ y $A(s)$ dados por (6.62) y (6.63) es una *función racional* de $s$, ya que es una división de polinomios en $s$. El grado $N$ del polinomio del denominador $A(s)$ se conoce como el *orden* de la función racional. Para una amplia clase de señales $x(t)$, la transformada de Laplace $X(s)$ es racional. Por ejemplo, la mayoría de las señales de la tabla 6.2 tiene una transformada racional de Laplace. Una excepción es el pulso rectangular de $c$ segundos $u(t) - u(t - c)$, cuya transformada de Laplace es

$$\frac{1 - e^{-cs}}{s}$$

Debido a la presencia de la exponencial compleja $e^{-cs}$, esta transformada no puede expresarse como una relación de polinomios en $s$ y, por lo tanto, la transformada del pulso rectangular no es una función racional de $s$.

Dada una transformada racional $X(s) = B(s)/A(s)$, sean $p_1, p_2, \ldots, p_N$ quienes denoten las raíces de la ecuación

$$A(s) = 0$$

Entonces, $A(s)$ puede escribirse en la forma factorizada

$$A(s) = a_N(s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_N) \tag{6.64}$$

También se dice que las raíces $p_1, p_2, \ldots, p_N$, las cuales pueden ser reales o complejas, son los *ceros* del polinomio $A(s)$, ya que $A(s)$ es igual a cero cuando $s$ se establece igual a $p_i$, para cualquier valor de $i$ que se encuentre en el intervalo de 1 a $N$. Observe que si cualquiera de los ceros (digamos, $p_1$) es complejo, debe haber algún otro cero que sea igual al complejo conjugado de $p_1$. En otras palabras, los ceros complejos siempre aparecen en pares de complejos conjugados.

Puede utilizar MATLAB para encontrar los ceros de un polinomio $A(s)$, mediante el comando `roots`. Por ejemplo, para encontrar los ceros de

$$A(s) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4 = 0$$

utilice los comandos

```
A = [1 4 6 4]; % almacena los coeficientes de A(s)
p = roots(A)
```

MATLAB devuelve los ceros:

```
p =
   -2.0000
   -1.0000 + 1.0000i
   -1.0000 - 1.0000i
```

Por lo tanto, $A(s)$ tiene la forma factorizada

$$A(s) = (s + 2)(s + 1 - j)(s + 1 + j)$$

Ahora, dada la transformada racional $X(s) = B(s)/A(s)$, si $A(s)$ se especifica con la forma factorizada (6.64), el resultado es

$$X(s) = \frac{B(s)}{a_N(s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_N)} \tag{6.65}$$

Los $p_i$ para $i = 1, 2, \ldots, N$ se conocen como *polos* de la función racional $X(s)$, ya que si se sustituye el valor $s = p_i$ en $X(s)$, el resultado es $\infty$. Entonces, los polos de la función racional $X(s)$ son iguales a los ceros (o raíces) del polinomio del denominador $A(s)$.

Podemos calcular la transformada inversa de Laplace de $X(s)$ si primero desarrollamos una expansión en fracciones parciales de (6.65). En la siguiente subsección describimos el procedimiento. En el desarrollo siguiente suponemos que $M < N$, es decir, el grado de $B(s)$ es estrictamente menor que el de $A(s)$. Se dice que tales funciones racionales son *estrictamente propias en s*. Más adelante se considerará el caso en el que $X(s)$ no es estrictamente propia.

### 6.3.2 Polos diferentes

Los polos $p_1, p_2, \ldots, p_N$ de $X(s)$ ahora se suponen diferentes (o no repetidos); es decir, $p_i \neq p_j$, cuando $i \neq j$. Entonces $X(s)$ tiene la expansión en fracciones parciales

$$X(s) = \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{c_N}{s - p_N} \tag{6.66}$$

donde

$$c_i = [(s - p_i)X(s)]_{s=p_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, N \tag{6.67}$$

La expresión (6.67) para $c_i$ puede demostrarse si primero se multiplican ambos lados de (6.66) por $s - p_i$. Esto arroja

$$(s - p_i)X(s) = c_i + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^{N} c_r \frac{s - p_i}{s - p_r} \tag{6.68}$$

Al evaluar ambos lados de (6.68) en $s = p_i$, se eliminan todos los términos dentro de la sumatoria, lo cual arroja (6.67).

Las constantes $c_i$ de (6.66) se conocen como *residuos*, y al cálculo de $c_i$ por medio de (6.67) se le conoce como *método del residuo*. Las constantes $c_i$ son reales si el polo correspondiente $p_i$ es real. Además, debido a que los polos $p_1, p_2, \ldots, p_N$ aparecen en pares de complejos conjugados, las $c_i$ también deben aparecer en pares de complejos conjugados. Por lo tanto, si $c_i$ es compleja, una de las otras constantes debe ser igual al complejo conjugado de $c_i$.

Vale la pena observar que para calcular la expansión en fracciones parciales (6.66), no es necesario factorizar el polinomio del numerador $B(s)$. Sin embargo, es necesario calcular los polos de $X(s)$, ya que la expansión está dada directamente en términos de los polos.

Entonces, podemos determinar la transformada inversa de Laplace $x(t)$ de $X(s)$ si tomamos la transformada inversa de cada uno de los términos de (6.66), y utilizamos la linealidad de la operación de la transformada inversa. El resultado es

$$x(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \cdots + c_N e^{p_N t}, \quad t \geq 0 \tag{6.69}$$

Es muy importante destacar que la forma de la variación del tiempo de la función $x(t)$ dada por (6.69) está determinada por los polos de la función racional $X(s)$; más precisamente, $x(t)$ es una suma de exponenciales en el tiempo, cuyos exponentes están completamente especificados en términos de los polos de $X(s)$. Como consecuencia, los polos de $X(s)$ son quienes determinan las características de la variación de tiempo de $x(t)$. En el capítulo 8 utilizaremos bastante este resultado fundamental para estudiar el comportamiento de un sistema.

También debemos destacar que si todos los $p_i$ son reales, los términos que forman la función $x(t)$, definida por (6.69), son reales. Sin embargo, si dos o más $p_i$ son complejos, los términos correspondientes en (6.69) serán complejos y, por lo tanto, en este caso, los términos complejos deben combinarse para obtener una forma real; consideraremos esto después del siguiente ejemplo.

Dada la función racional $X(s) = B(s)/A(s)$, con los polinomios $B(s)$ y $A(s)$ como los definimos antes, podemos utilizar MATLAB para calcular los residuos y los polos de $X(s)$. Los comandos son los siguientes:

```
num = [bM bM-1 … b1 b0];
den = [aN aN-1 … a1 a0];
[r,p] = residue(num,den);
```

El programa MATLAB producirá un vector `r` que consiste en los residuos, y un vector `p` que consiste en los polos correspondientes. Ilustramos el proceso con el siguiente ejemplo.

---

### Ejemplo 6.17 Caso de polos diferentes

Suponga que

$$X(s) = \frac{s + 2}{s^3 + 4s^2 + 3s}$$

Aquí,

$$A(s) = s^3 + 4s^2 + 3s = s(s + 1)(s + 3)$$

Las raíces de $A(s) = 0$ son $0, -1, -3$ y, entonces, los polos de $X(s)$ son $p_1 = 0, p_2 = -1, p_3 = -3$. Por lo tanto,

$$X(s) = \frac{c_1}{s - 0} + \frac{c_2}{s - (-1)} + \frac{c_3}{s - (-3)}$$

$$X(s) = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s + 1} + \frac{c_3}{s + 3}$$

donde

$$c_1 = [sX(s)]_{s=0} = \left.\frac{s + 2}{(s + 1)(s + 3)}\right|_{s=0} = \frac{2}{3}$$

$$c_2 = [(s + 1)X(s)]_{s=-1} = \left.\frac{s + 2}{s(s + 3)}\right|_{s=-1} = \frac{1}{-2}$$

$$c_3 = [(s + 3)X(s)]_{s=-3} = \left.\frac{s + 2}{s(s + 1)}\right|_{s=-3} = \frac{-1}{6}$$

Entonces, la transformada inversa de Laplace $x(t)$ de $X(s)$ está dada por

$$x(t) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t}, \quad t \geq 0$$

El cálculo de los residuos y los polos puede verificarse con los comandos de MATLAB

```
num = [1 2];
den = [1 4 3 0];
[r,p] = residue(num,den);
```

El programa MATLAB produce los vectores

```
r =                    p =
   -0.1667                -3
   -0.5000                -1
    0.6667                 0
```

lo cual coincide con los resultados obtenidos previamente.

### 6.3.3 Polos diferentes con dos o más polos complejos

Aún suponemos que los polos de $X(s)$ son diferentes, pero ahora dos o más de los polos de $X(s)$ son complejos, por lo que las exponenciales correspondientes en (6.69) son complejas. Como veremos, es posible combinar los términos complejos para expresar $x(t)$ en términos reales.

Suponga que $p_1 = \sigma + j\omega$ es complejo, por lo que $\omega \neq 0$. Entonces el complejo conjugado $\bar{p}_1 = \sigma - j\omega$ es otro polo de $X(s)$. Sea $p_2$ quien denote este polo. Entonces, el residuo $c_2$ correspondiente al polo $p_2$ es igual al conjugado $\bar{c}_1$ del residuo correspondiente al polo $p_1$, y $X(s)$ tiene la expansión en fracciones parciales

$$X(s) = \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{\bar{c}_1}{s - \bar{p}_1} + \frac{c_3}{s - p_3} + \cdots + \frac{c_N}{s - p_N}$$

donde $c_1, c_3, \ldots, c_N$ nuevamente están dados por (6.67). Por lo tanto, la transformada inversa es

$$x(t) = c_1 e^{p_1 t} + \bar{c}_1 e^{\bar{p}_1 t} + c_3 e^{p_3 t} + \cdots + c_N e^{p_N t} \tag{6.70}$$

Ahora, los dos primeros términos del lado derecho de (6.70) puede expresarse en forma real de la siguiente forma:

$$c_1 e^{p_1 t} + \bar{c}_1 e^{\bar{p}_1 t} = 2|c_1| e^{\sigma t} \cos(\omega t + \angle c_1) \tag{6.71}$$

Aquí, $|c_1|$ es la magnitud del número complejo $c_1$, y $\angle c_1$ es el ángulo de $c_1$. La demostración de la relación (6.71) está considerada en los problemas de tarea (vea el problema 6.9).

Si utilizamos (6.71), encontramos que la transformada inversa de $X(s)$ está dada por

$$x(t) = 2|c_1| e^{\sigma t} \cos(\omega t + \angle c_1) + c_3 e^{p_3 t} + \cdots + c_N e^{p_N t} \tag{6.72}$$

La expresión (6.72) para $x(t)$ muestra que si $X(s)$ tiene un par de polos complejos, $p_1, p_2 = \sigma \pm j\omega$, la señal $x(t)$ contiene un término de la forma

$$ce^{\sigma t}\cos(\omega t + \theta)$$

Observe que el coeficiente $\sigma$ de $t$ en la función exponencial es la parte real del polo $p_1 = \sigma + j\omega$, y la frecuencia $\omega$ del coseno es igual a la parte imaginaria del polo $p_1$.

Con el siguiente ejemplo ilustramos el cálculo de la transformada inversa de Laplace mediante (6.71).

---

**Ejemplo 6.18 Caso de polos complejos**

Suponga que

$$X(s) = \frac{s^2 - 2s + 1}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2}$$

Aquí,

$$A(s) = s^3 + 3s^2 + 4s + 2 = (s + 1 - j)(s + 1 + j)(s + 1)$$

Las raíces de $A(s) = 0$ son

$$p_1 = -1 + j, \qquad p_2 = -1 - j, \qquad p_3 = -1$$

Entonces, $\sigma = -1$ y $\omega = 1$, y

$$X(s) = \frac{c_1}{s - (-1 + j)} + \frac{\bar{c}_1}{s - (-1 - j)} + \frac{c_3}{s - (-1)}$$

$$X(s) = \frac{c_1}{s + 1 - j} + \frac{\bar{c}_1}{s + 1 + j} + \frac{c_3}{s + 1}$$

donde

$$c_1 = [(s + 1 - j)X(s)]_{s=-1+j} = \left.\frac{s^2 - 2s + 1}{(s + 1 + j)(s + 1)}\right|_{s=-1+j}$$

$$= \frac{-3}{2} + j2$$

$$c_3 = [(s + 1)X(s)]_{s=-1} = \left.\frac{s^2 - 2s + 1}{s^2 + 2s + 2}\right|_{s=-1} = 4$$

Ahora,

$$|c_1| = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{5}{2}$$

y, debido a que $c_1$ se encuentra en el segundo cuadrante, entonces

$$\angle c_1 = 180^\circ + \tan^{-1}\frac{-4}{3} = 126.87^\circ$$

Entonces, si utilizamos (6.71) y (6.72) tenemos

$$x(t) = 5e^{-t}\cos(t + 126.87^\circ) + 4e^{-t}, \qquad t \geq 0$$

MATLAB generará los residuos y los polos en el caso en que $X(s)$ tenga polos complejos (y reales). En este ejemplo, los comandos son

```
num = [1 -2 1];
den = [1 3 4 2];
[r,p] = residue(num,den);
```

lo cual arroja

```
r =                              p =
   -1.5000 + 2.0000i                -1.0000 + 1.0000i
   -1.5000 - 2.0000i                -1.0000 - 1.0000i
   4.0000                           -1.0000
```

Esto coincide con los polos y residuos que calculamos antes.

---

Cuando $X(s)$ tiene polos complejos, podemos evitar trabajar con números complejos no factorizando los términos cuadráticos cuyos ceros son complejos. Por ejemplo, suponga que $X(s)$ es la función racional de segundo orden dada por

$$X(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

Al "completar el cuadrado" en el denominador de $X(s)$ obtenemos

$$X(s) = \frac{b_1 s + b_0}{(s + a_1/2)^2 + a_0 - a_1^2/4}$$

De la fórmula cuadrática se desprende que los polos de $X(s)$ son complejos si y sólo si

$$a_0 - \frac{a_1^2}{4} > 0$$

en cuyo caso los polos de $X(s)$ son

$$p_1, p_2 = -\frac{a_1}{2} \pm j\omega$$

donde

$$\omega = \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}$$

Con $X(s)$ expresada de la forma

$$X(s) = \frac{b_1 s + b_0}{(s + a_1/2)^2 + \omega^2} = \frac{b_1(s + a_1/2) + (b_0 - b_1 a_1/2)}{(s + a_1/2)^2 + \omega^2}$$

la transformada inversa de Laplace puede calcularse buscando en la tabla; esto lo ilustramos en el siguiente ejemplo.

---

**Ejemplo 6.19 Completar el cuadrado**

Suponga que

$$X(s) = \frac{3s + 2}{s^2 + 2s + 10}$$

Al completar el cuadrado en el denominador de $X(s)$ obtenemos

$$X(s) = \frac{3s + 2}{(s + 1)^2 + 9}$$

Entonces, debido a que $9 > 0$, los polos de $X(s)$ son complejos e iguales a $-1 \pm j3$ (aquí, $\omega = 3$). Ahora, $X(s)$ puede expresarse de la forma

$$X(s) = \frac{3(s + 1) - 1}{(s + 1)^2 + 9} = \frac{3(s + 1)}{(s + 1)^2 + 9} - \frac{1}{3}\frac{3}{(s + 1)^2 + 9}$$

y cuando utilizamos los pares de transformadas de la tabla 6.2, la transformada inversa es

$$x(t) = 3e^{-t}\cos 3t - \frac{1}{3}e^{-t}\operatorname{sen} 3t, \quad t \geq 0$$

Por último, si utilizamos la identidad trigonométrica

$$C\cos\omega t - D\operatorname{sen}\omega t = \sqrt{C^2 + D^2}\cos(\omega t + \theta), \quad \text{donde } \theta = \begin{cases} \tan^{-1}\dfrac{D}{C}, C \geq 0 \\ \pi + \tan^{-1}\dfrac{D}{C}, C < 0 \end{cases} \tag{6.73}$$

vemos que $x(t)$ puede escribirse como

$$x(t) = ce^{-t}\cos(3t + \theta), t \geq 0$$

donde

$$c = \sqrt{(3)^2 + \left(\tfrac{1}{3}\right)^2} = 3.018$$

y

$$\theta = \tan^{-1}\frac{1/3}{3} = 83.7°$$

---

Ahora, suponga que $X(s)$ tiene un par de polos complejos $p_1, p_2 = \sigma \pm j\omega$, y polos reales diferentes $p_3, p_4, \ldots, p_N$. Entonces,

$$X(s) = \frac{B(s)}{[(s - \sigma)^2 + \omega^2](s - p_3)(s - p_4)\cdots(s - p_N)}$$

la cual puede expandirse de la forma

$$X(s) = \frac{b_1 s + b_0}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} + \frac{c_3}{s - p_3} + \frac{c_4}{s - p_4} + \cdots + \frac{c_N}{s - p_N} \tag{6.74}$$

donde los coeficientes $b_0$ y $b_1$ del término de segundo orden son números reales. Los residuos $c_3, c_4, \ldots, c_N$ son números reales y se calculan a partir de (6.67) como antes; sin embargo, $b_0$ y $b_1$ no pueden calcularse con esta fórmula. Podemos calcular las constantes $b_0$ y $b_1$ colocando el lado derecho de (6.74) sobre un común denominador, y después igualando los coeficientes del numerador resultante con el numerador de $X(s)$. Después podemos calcular la transformada inversa de Laplace a partir de (6.74). En el siguiente ejemplo ilustramos el proceso.

---

**Ejemplo 6.20 Igualar coeficientes**

De nuevo considere la función racional $X(s)$ del ejemplo 6.18 dada por

$$X(s) = \frac{s^2 - 2s + 1}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2}$$

En este ejemplo,

$$A(s) = (s^2 + 2s + 2)(s + 1) = [(s + 1)^2 + 1](s + 1)$$

y, por lo tanto, $X(s)$ tiene la expansión

$$X(s) = \frac{b_1 s + b_0}{(s + 1)^2 + 1} + \frac{c_3}{s + 1} \tag{6.75}$$

donde

$$c_3 = [(s + 1)X(s)]_{s=-1} = 4$$

Podemos poner el lado derecho de (6.75) sobre un común denominador, y después podemos igualar el numerador resultante con el numerador de $X(s)$. Esto arroja

$$X(s) = \frac{(b_1 s + b_0)(s + 1) + 4[(s + 1)^2 + 1]}{[(s + 1)^2 + 1](s + 1)} = \frac{s^2 - 2s + 1}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2}$$

y al igualar los numeradores obtenemos

$$s^2 - 2s + 1 = (b_1 s + b_0)(s + 1) + 4(s^2 + 2s + 2)$$

$$s^2 - 2s + 1 = (b_1 + 4)s^2 + (b_1 + b_0 + 8)s + b_0 + 8$$

Así,

$$b_1 + 4 = 1$$

y

$$b_0 + 8 = 1$$

lo que implica que $b_1 = -3$ y $b_0 = -7$. Así, a partir de (6.75),

$$X(s) = \frac{-3s - 7}{(s + 1)^2 + 1} + \frac{4}{s + 1}$$

Al escribir $X(s)$ de la forma

$$X(s) = \frac{-3(s + 1)}{(s + 1)^2 + 1} - 4\frac{1}{(s + 1)^2 + 1} + \frac{4}{s + 1}$$

y si utilizamos la tabla 6.2, obtenemos la siguiente transformada inversa:

$$x(t) = -3e^{-t}\cos t - 4e^{-t}\operatorname{sen} t + 4e^{-t}, \qquad t \geq 0$$

Por último, si utilizamos la identidad trigonométrica (6.73) tenemos que

$$x(t) = 5e^{-t}\cos(t + 126.87°) + 4e^{-t}, \qquad t \geq 0$$

lo cual coincide con el resultado obtenido en el ejemplo 6.18.

---

### 6.3.4 Polos repetidos

De nuevo, considere el caso general en el que

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

Aún suponemos que $X(s)$ es estrictamente propia; es decir, el grado $M$ de $B(s)$ es estrictamente menor que el grado $N$ de $A(s)$. Ahora, suponga que el polo $p_1$ de $X(s)$ está repetido $r$ veces y que los otros polos $N - r$ (denotados por $p_{r+1}, p_{r+2}, \ldots, p_N$) son diferentes. Entonces, $X(s)$ tiene la expansión en fracciones parciales

$$X(s) = \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{(s - p_1)^2} + \cdots + \frac{c_r}{(s - p_1)^r} + \frac{c_{r+1}}{s - p_{r+1}} + \cdots + \frac{c_N}{s - p_N} \tag{6.76}$$

En (6.76), los residuos $c_{r+1}, c_{r+2}, \ldots, c_N$ se calculan como en el caso de polos diferentes; es decir,

$$c_i = [(s - p_i)X(s)]_{s=p_i}, \quad i = r + 1, r + 2, \ldots, N$$

La constante $c_r$ está dada por

$$c_r = [(s - p_1)^r X(s)]_{s=p_1}$$

y las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_{r-1}$ están dadas por

$$c_{r-i} = \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i}{ds^i}[(s - p_1)^r X(s)]\right]_{s=p_1}, \quad i = 1, 2, \ldots, r - 1 \tag{6.77}$$

En particular, establecer el índice $i$ igual a 1, 2 en (6.77) arroja

$$c_{r-1} = \left[\frac{d}{ds}[(s - p_1)^r X(s)]\right]_{s=p_1}$$

$$c_{r-2} = \frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{ds^2}[(s - p_1)^r X(s)]\right]_{s=p_1}$$

También podemos calcular las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_{r-1}$ de (6.76) si colocamos el lado derecho de (6.76) sobre un común denominador y después igualamos los coeficientes del numerador resultante con el numerador de $X(s)$.

Si todos los polos de $X(s)$ son números reales, la transformada inversa de Laplace puede determinarse con el par de transformadas

$$\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}e^{-at} \leftrightarrow \frac{1}{(s+a)^N}, \quad N = 1, 2, 3, \ldots$$

En el siguiente ejemplo ilustramos el proceso.

---

**Ejemplo 6.21 Polos repetidos**

Considere la función racional

$$X(s) = \frac{5s - 1}{s^3 - 3s - 2}$$

Las raíces de $A(s) = 0$ son $-1, -1, 2$, por lo que $r = 2$ y, entonces, la expansión en fracciones parciales tiene la forma

$$X(s) = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{(s+1)^2} + \frac{c_3}{s-2}$$

donde

$$c_1 = \left[\frac{d}{ds}[(s+1)^2 X(s)]\right]_{s=-1} = \left[\frac{d}{ds}\frac{5s-1}{s-2}\right]_{s=-1}$$

$$= \left.\frac{-9}{(s-2)^2}\right|_{s=-1} = -1$$

$$c_2 = [(s+1)^2 X(s)]_{s=-1} = \left.\frac{5s-1}{s-2}\right|_{s=-1} = 2$$

$$c_3 = [(s-2)X(s)]_{s=2} = \left.\frac{5s-1}{(s+1)^2}\right|_{s=2} = 1$$

Así,

$$x(t) = -e^{-t} + 2te^{-t} + e^{2t}, \quad t \geq 0$$

En lugar de tener que derivar respecto a $s$, podemos calcular la constante $c_1$ colocando la expansión en fracciones parciales

$$X(s) = \frac{c_1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1}{s-2}$$

sobre un común denominador y después igualamos los numeradores. Esto arroja

$$5s - 1 = c_1(s+1)(s-2) + 2(s-2) + (s+1)^2$$
$$5s - 1 = (c_1 + 1)s^2 + (-c_1 + 4)s + (-2c_1 - 3)$$

Así, $c_1 = -1$, lo cual es consistente con el valor anterior.

MATLAB también puede manejar el caso de raíces repetidas. En este ejemplo, los comandos de MATLAB son

```
num = [5 -1];
den = [1 0 -3 -2];
[r,p] = residue(num,den);
```

lo que arroja

```
r =                    p =
    1.0000                 2.0000
   -1.0000                -1.0000
    2.0000                -1.0000
```

donde el segundo residuo, $-1$, corresponde al término $1/(s+1)$, y el tercer residuo, 2, corresponde al término $1/(s+1)^2$.

---

Si $X(s)$ tiene polos complejos repetidos, podemos evitar el uso de aritmética compleja si expresamos la parte compleja de $A(s)$ en términos de las potencias de los términos cuadráticos. El siguiente ejemplo muestra esta técnica de solución.

---

### Ejemplo 6.22 Potencias de términos cuadráticos

Suponga que

$$X(s) = \frac{s^3 + 3s^2 - s + 1}{s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 1}$$

Si utilizamos el comando `roots` de MATLAB vemos que los polos de $X(s)$ son iguales a $-1, -j, -j, j, j$. Entonces, existen pares de polos complejos repetidos que corresponden al factor

$$[(s+j)(s-j)]^2 = (s^2+1)^2$$

Por lo tanto,

$$X(s) = \frac{s^3 + 3s^2 - s + 1}{(s^2+1)^2(s+1)}$$

y la expansión de $X(s)$ tiene la forma

$$X(s) = \frac{cs + d}{s^2 + 1} + \frac{w(s)}{(s^2+1)^2} + \frac{c_5}{s+1}$$

donde $w(s)$ es un polinomio en $s$. Para poder calcular la transformada inversa de Laplace de $w(s)/(s^2 + 1)^2$ a partir de los pares de transformadas de la tabla 6.2, es necesario escribir este término de la forma

$$\frac{w(s)}{(s^2 + 1)^2} = \frac{g(s^2 - 1) + hs}{(s^2 + 1)^2}$$

para algunas constantes reales $g$ y $h$. La tabla 6.2 arroja el par de transformadas

$$\left(gt \cos t + \frac{h}{2} t \operatorname{sen} t\right) u(t) \leftrightarrow \frac{g(s^2 - 1) + hs}{(s^2 + 1)^2}$$

Ahora,

$$c_5 = [(s + 1)X(s)]_{s=-1} = \left.\frac{s^3 + 3s^2 - s + 1}{(s^2 + 1)^2}\right|_{s=-1} = 1$$

Entonces,

$$X(s) = \frac{cs + d}{s^2 + 1} + \frac{g(s^2 - 1) + hs}{(s^2 + 1)^2} + \frac{1}{s + 1}$$

Si ponemos el lado derecho sobre un común denominador e igualamos los numeradores obtenemos

$$\begin{aligned} s^3 + 3s^2 - s + 1 &= (cs + d)(s^2 + 1)(s + 1) \\ &\quad + [g(s^2 - 1) + hs](s + 1) + (s^2 + 1)^2 \\ s^3 + 3s^2 - s + 1 &= (c + 1)s^4 + (c + d + g)s^3 + (c + d + h + g + 2)s^2 \\ &\quad + (c + d - g + h)s + d - g + 1 \end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes del polinomio tenemos

$$\begin{aligned} c &= -1 \\ c + d + g &= 1 \\ c + d + h + g + 2 &= 3 \\ c + d - g + h &= -1 \\ d - g + 1 &= 1 \end{aligned}$$

Al resolver estas ecuaciones tenemos que $d = 1, g = 1$, y $h = 0$ y, por lo tanto, la transformada inversa es

$$x(t) = -\cos t + \operatorname{sen} t + t \cos t + e^{-t}, t \geq 0$$

---

### 6.3.5 Caso en que $M \geq N$

Considere la función racional $X(s) = B(s)/A(s)$, con el grado de $B(s)$ igual a $M$, y el grado de $A(s)$ igual a $N$. Si $M \geq N$, por la división larga, $X(s)$ puede escribirse como

$$X(s) = Q(s) + \frac{R(s)}{A(s)}$$

donde el cociente $Q(s)$ es un polinomio en $s$ con grado $M - N$, y el residuo $R(s)$ es un polinomio en $s$ con grado estrictamente menor que $N$. Con MATLAB podemos calcular el cociente $Q(s)$ y el residuo $R(s)$. En particular, podemos utilizar el comando `conv` para multiplicar polinomios, y `deconv` para dividirlos. Por ejemplo, considere un polinomio del denominador dado en la forma factorizada

$$A(s) = (s^2 + 3s)(s + 4)$$

Después, el comando

```
den = conv([1 3 0],[1 4]);
```

multiplica los factores y arroja `den = [1 7 12 0]` y, por lo tanto, $A(s) = s^3 + 7s^2 + 12s$. El comando `deconv` se utiliza de la siguiente manera para dividir polinomios que tienen grado $M > N$:

```
num = [bM  bM-1 … b1 b0];
den = [aN aN-1 … a1 a0];
[Q,R] = deconv(num,den)
```

Una vez que determinamos $Q(s)$ y $R(s)$, podemos calcular la transformada inversa de Laplace de $X(s)$ determinando la transformada inversa de $Q(s)$ y la de $R(s)/A(s)$. Debido a que $R(s)/A(s)$ es estrictamente propia [es decir, el grado de $R(s) < N$], podemos calcular la transformada inversa de $R(s)/A(s)$ si primero expandimos en fracciones parciales como antes. El comando residuo puede utilizarse para realizar la expansión en fracciones parciales de $R(s)/A(s)$, como hicimos en los ejemplos anteriores. La transformada inversa del cociente $Q(s)$ puede calcularse mediante el par de transformadas

$$\frac{d^N}{dt^N}\delta(t) \leftrightarrow s^N, \quad N = 1, 2, 3, \ldots$$

El siguiente ejemplo ilustra el proceso.

---

**Ejemplo 6.23** $M = 3, N = 2$

Suponga que

$$X(s) = \frac{s^3 + 2s - 4}{s^2 + 4s - 2}$$

Si utilizamos los comandos de MATLAB

```
num = [1 0 2 -4];
den = [1 4 -2];
[Q,R] = deconv(num,den)
```

obtenemos `Q = [1 -4]` y `R = [20 -12]`. Entonces, el cociente es $Q(s) = s - 4$, y el residuo es $R(s) = 20s - 12$. Entonces,

$$X(s) = s - 4 + \frac{20s - 12}{s^2 + 4s - 2}$$

y por lo tanto

$$x(t) = \frac{d}{dt}\delta(t) - 4\delta(t) + v(t)$$

donde $v(t)$ es la transformada inversa de Laplace de

$$V(s) = \frac{20s - 12}{s^2 + 4s - 2}$$

Al utilizar los comandos de MATLAB

```
num = [20 -12];
den = [1 4 -2];
[r,p] = residue(num,den);
```

resulta en los siguientes residuos y polos para $V(s)$:

```
r =                    p =
   20.6145                -4.4495
   -0.6145                 0.4495
```

Así, la expansión en fracciones parciales de $V(s)$ es

$$V(s) = \frac{20.6145}{s + 4.4495} - \frac{0.6145}{s - 0.4495}$$

y la transformada inversa de Laplace de $V(s)$ es

$$v(t) = 20.6145e^{-4.4495t} - 0.6145e^{0.4495t}, t \geq 0$$

### 6.3.6 La ubicación de polos y la forma de una señal

Dada una señal $x(t)$ con la transformada racional de Laplace $X(s) = B(s)/A(s)$, nuevamente suponga que $M < N$, donde $N$ es el grado de $A(s)$ y $M$ es el de $B(s)$. Como vimos en el desarrollo anterior, existe una relación directa entre los polos de $X(s)$ y la forma de la señal $x(t)$. En particular, si $X(s)$ tiene un polo $p$ no repetido que es real, entonces $x(t)$ contiene un término de la forma $ce^{pt}$ para alguna constante $c$; y si el polo $p$ se repite dos veces, entonces $x(t)$ contiene el término $c_1e^{pt} + c_2e^{pt}$ para algunas constantes $c_1$ y $c_2$. Si $X(s)$ tiene un par de polos complejos no repetido, $\sigma \pm j\omega$, entonces $x(t)$ contiene un término de la forma $ce^{\sigma t}\cos(\omega t + \theta)$ para algunas constantes $c$ y $\theta$. Si el par complejo $\sigma \pm j\omega$ se repite dos veces, $x(t)$ contiene el término $c_1e^{\sigma t}\cos(\omega t + \theta_1) + c_2te^{\sigma t}\cos(\omega t + \theta_2)$ para algunas constantes $c_1, c_2, \theta_1$ y $\theta_2$.

Como resultado de estas relaciones, podemos determinar directamente la forma de una señal $x(t)$ a partir de los polos de la transformada $X(s)$; en el siguiente ejemplo ilustramos esto.

#### Ejemplo 6.24 Forma general de una señal

Considere la señal $x(t)$ con transformada

$$X(s) = \frac{1}{s(s + 1)(s - 4)^2((s + 2)^2 + 3^2)}$$

Los polos de $X(s)$ son $0, -1, 4, 4 -2 \pm 3j$ y, entonces, la forma general de la señal de tiempo $x(t)$ es

$$x(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + c_3 e^{4t} + c_4 t e^{4t} + c_5 e^{-2t} \cos(3t + \theta)$$

donde las $c_i$'s y $\theta$ son constantes. Observe que el polo en el origen corresponde al término constante (dado por $c_1 e^{0t}$), el polo en $-1$ corresponde al término $c_2 e^{-t}$, los polos repetidos en $-4$ corresponden a los términos $c_{3e} e^{4t}$ y $c_4 t e^{4t}$, y los polos complejos $-2 \pm 3j$ corresponden al término $c_5 e^{-2t} \cos(3t + \theta)$.

---

Es importante observar que modificar el numerador de $X(s)$ no cambia la forma general de $x(t)$, pero cambiará los valores de las constantes (los coeficientes de los términos). Digamos, en el ejemplo 6.24, si cambiáramos el numerador de $B(s) = 1$ a cualquier polinomio $B(s)$ con un grado menor que el denominador $A(s)$, la forma de $x(t)$ permanecería igual.

Una consecuencia muy importante de la relación entre los polos de $X(s)$ y la forma de la señal $x(t)$ es que el comportamiento de la señal en el límite cuando $t \to \infty$ puede determinarse directamente de los polos. En particular, a partir de los resultados mostrados anteriormente vemos que $x(t)$ converge en 0 cuando $t \to \infty$ si y sólo si los polos $p_1, p_2, \ldots, p_N$ tienen partes reales que son estrictamente menores que cero; o en términos matemáticos

$$\text{Re}(p_i) < 0 \text{ para } i = 1, 2, \ldots, N \tag{6.78}$$

donde $\text{Re}(p_i)$ denota la parte real del polo $p_i$.

También se desprende de la relación entre los polos y la forma de la señal que $x(t)$ tiene un límite cuando $t \to \infty$ si y sólo si se satisface (6.78), excepto que uno de los polos de $X(s)$ pueda estar en el origen ($p = 0$). Si $X(s)$ tiene un solo polo en $s = 0$ [y todos los demás polos satisfacen (6.78)], el valor que limita a $x(t)$ es igual al valor del residuo correspondiente al polo en 0; es decir,

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = [sX(s)]_{s=0}$$

Este resultado es consistente con el teorema del valor final [vea (6.56)], ya que para cualquier función racional $X(s)$,

$$\lim_{s \to 0} sX(s) = [sX(s)]_{s=0}$$

---

**Ejemplo 6.25 Valor límite**

Suponga que

$$X(s) = \frac{2s^2 - 3s + 4}{s^3 + 3s^2 + 2s}$$

Los polos de $X(s)$ son $0, -1, -2$, y por lo tanto (6.78) es satisfecha por todos los polos de $X(s)$, excepto por uno, el cual es igual a cero. Entonces, $x(t)$ tiene un límite cuando $t \to \infty$, y

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = [sX(s)]_{s=0} = \left[ \frac{2s^2 - 3s + 4}{s^2 + 3s + 2} \right]_{s=0} = \frac{4}{2} = 2$$

---

### 6.3.7 Cálculo de la transformada inversa de Laplace mediante la manipulación simbólica

Dada una transformada racional $X(s) = B(s)/A(s)$ con el grado de $B(s)$ menor que el de $A(s)$, podemos utilizar Symbolic Math Toolbox de MATLAB para calcular (y graficar) la transformada inversa de Laplace $x(t)$. Si `X` es una función simbólica de `s`, entonces el comando `ilaplace(X)` devuelve la transformada inversa de Laplace de `X`. El comando `ezplot(x)` grafica $x(t)$.

---

**Ejemplo 6.26 Uso de MATLAB**

Considere la transformada de Laplace dada en el ejemplo 6.17:

$$X(s) = \frac{s + 2}{s^3 + 4s^2 + 3s}$$

Para calcular $x(t)$, utilice los comandos

```
syms X s x
X = (s+2)/(s^3+4*s^2+3*s);
x = ilaplace(X)
```

La expresión resultante para $x(t)$ está dada por

```
x =
-1/6*exp(-3*t)-1/2*exp(-t)+2/3
```

Esto es consistente con el resultado que encontramos de forma analítica en el ejemplo 6.17:

$$x(t) = \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{2}e^{-t} - \tfrac{1}{6}e^{-3t}, \quad t \geq 0$$

Para graficar la función $x(t)$ desde $t = 0$ hasta $t = 10$, utilice el comando

```
ezplot(x,[0,10])
```

La gráfica resultante aparece en la figura 6.3. Tanto de la gráfica en la figura 6.3 como de la expresión anterior para $x(t)$, resulta claro que $x(t)$ converge en el valor $\frac{2}{3}$, cuando $t \to \infty$. La convergencia de $x(t)$ en el valor $\frac{2}{3}$ puede verificarse con el teorema del valor final, el cual es aplicable debido a que los polos de $X(s)$ tienen partes reales negativas (excepto por el polo en $p = 0$). Al aplicar el teorema del valor final tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} x(t) &= \lim_{s\to 0} sX(s) \\ &= [sX(s)]_{s=0} \\ &= \left[\frac{s + 2}{s^2 + 4s + 3}\right]_{s=0} \\ \lim_{t\to\infty} x(t) &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

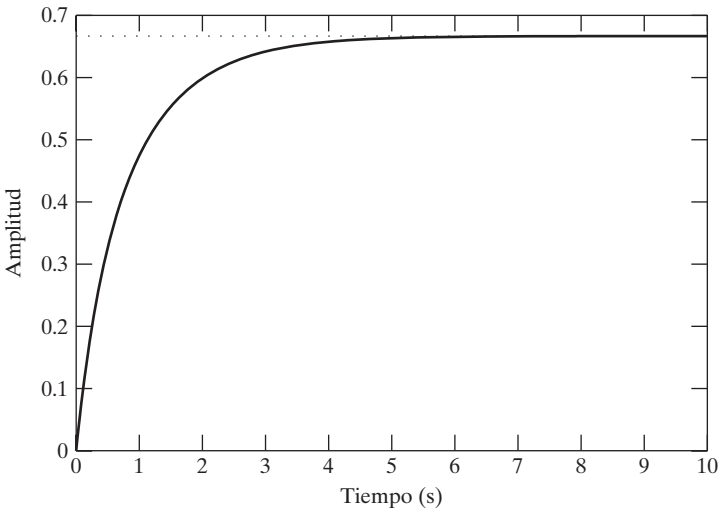



**FIGURA 6.3**
Gráfica de la transformada inversa $x(t)$ correspondiente al ejemplo 6.26.

### 6.3.8 Transformadas que contienen exponenciales

En muchos casos de interés, una función $x(t)$ tendrá una transformada $X(s)$ de la forma

$$X(s) = \frac{B_0(s)}{A_0(s)} + \frac{B_1(s)}{A_1(s)}\exp(-h_1 s) + \cdots + \frac{B_q(s)}{A_q(s)}\exp(-h_q s) \qquad (6.79)$$

En (6.79) las $h_i$ son números reales positivos diferentes, las $A_i(s)$ son polinomios en $s$ con coeficientes reales, y las $B_i(s)$ son polinomios en $s$ con coeficientes reales. Aquí, suponemos que $B_i(s) \neq 0$, al menos para un valor de $i \geq 1$.

La función $X(s)$ dada por (6.79) no es racional en $s$. En otras palabras, no es posible expresar $X(s)$ como una división de polinomios en $s$ con coeficientes reales. Éste es un resultado de la presencia de términos exponenciales $\exp(-h_i s)$, los cuales no pueden escribirse como divisiones de polinomios en $s$. Las funciones de la forma (6.79) son ejemplos de *funciones irracionales* de $s$; también se les conoce como *funciones trascendentales* de $s$.

Las funciones $X(s)$ de la forma (6.79) surgen cuando se aplica la transformada de Laplace a funciones parcialmente continuas $x(t)$. Es decir, como muestra el ejemplo 6.5, la transformada del pulso de $c$ segundos $u(t) - u(t - c)$ es igual a

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-cs}$$

Es claro que esta transformada es de la forma (6.79). Tome

$$B_0(s) = 1, \qquad B_1(s) = -1, \qquad A_0(s) = A_1(s) = s, \qquad h_1 = c$$

Debido a que $X(s)$, dada por (6.79), no es racional en $s$, no es posible aplicarle directamente la expansión en fracciones parciales. Sin embargo, estas expansiones aún pueden utilizarse para calcular la transformada inversa de $X(s)$. El procedimiento es el siguiente:

Primero, $X(s)$ puede escribirse de la forma

$$X(s) = \frac{B_0(s)}{A_0(s)} + \sum_{i=1}^{q} \frac{B_i(s)}{A_i(s)} \exp(-h_i s) \tag{6.80}$$

Ahora, cada $B_i(s)/A_i(s)$ en (6.80) es una función racional de $s$. Si el grado de $B_i(s) <$ al grado de $A_i(s)$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, q$, cada función racional $B_i(s)/A_i(s)$ puede expandirse en fracciones parciales. De este modo, la transformada inversa de Laplace de $B_i(s)/A_i(s)$ puede calcularse para $i = 0, 1, 2, \ldots, q$. Sea $x_i(t)$ quien denote la transformada inversa de $B_i(s)/A_i(s)$. Entonces, por las propiedades de linealidad y desplazamiento por la derecha, la transformada inversa de Laplace $x(t)$ está dada por

$$x(t) = x_0(t) + \sum_{i=1}^{q} x_i(t - h_i)u(t - h_i), \quad t \geq 0$$

---

**Ejemplo 6.27 Transformada con una exponencial**

Suponga que

$$X(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 1} - \frac{1}{s + 1}e^{-s} + \frac{s + 2}{s^2 + 1}e^{-1.5s}$$

Si utilizamos la linealidad y los pares de transformadas de la tabla 6.2 obtenemos

$$(\cos t + \operatorname{sen} t)u(t) \leftrightarrow \frac{s + 1}{s^2 + 1}$$

$$(\cos t + 2 \operatorname{sen} t)u(t) \leftrightarrow \frac{s + 2}{s^2 + 1}$$

Así,

$$x(t) = \cos t + \operatorname{sen} t - \exp[-(t - 1)]u(t - 1) + [\cos(t - 1.5) + 2 \operatorname{sen}(t - 1.5)]u(t - 1.5), \quad t \geq 0$$

---

## 6.4 TRANSFORMADA DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE ENTRADA Y SALIDA

En esta sección iniciamos con la aplicación de la transformada de Laplace al estudio de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo continuo. El desarrollo comienza con los sistemas definidos por una ecuación diferencial de entrada y salida. Podemos generar una "descripción de dominio $s$" de cualquiera de estos sistemas si tomamos la transformada de Laplace de la ecuación diferencial de entrada y salida. Mostraremos que esto arroja un procedimiento algebraico para resolver la ecuación diferencial de entrada y salida. Primero consideraremos los sistemas dados por una ecuación diferencial de primer orden.

### 6.4.1 Caso de primer orden

Considere el sistema lineal e invariante en el tiempo continuo, dado por la ecuación diferencial de primer orden de entrada y salida

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t) \tag{6.81}$$

donde $a$ y $b$ son números reales, $y(t)$ es la salida, y $x(t)$ es la entrada. Si tomamos la transformada de Laplace de ambos lados de (6.81), y utilizamos las propiedades de linealidad y derivación en el tiempo, (6.43) arroja

$$sY(s) - y(0^-) + aY(s) = bX(s) \tag{6.82}$$

donde $Y(s)$ es la transformada de Laplace de la salida $y(t)$, y $X(s)$ es la transformada de Laplace de la entrada $x(t)$. Observe que la condición inicial $y(0^-)$ es en el tiempo $t = 0^-$.

Al reacomodar los términos de (6.82) obtenemos

$$(s + a)Y(s) = y(0^-) + bX(s)$$

y si resolvemos para $Y(s)$ tenemos

$$Y(s) = \frac{y(0^-)}{s + a} + \frac{b}{s + a}X(s) \tag{6.83}$$

La ecuación (6.83) es la *representación en el dominio s* del sistema dado por la ecuación diferencial de entrada y salida (6.81). El primer término del lado derecho de (6.83) es la transformada de Laplace de la parte de la respuesta de salida que se debe a la condición inicial $y(0^-)$, y el segundo término del lado derecho de (6.83) es la transformada de Laplace de la parte de la respuesta de salida que se debe a la entrada $x(t)$, aplicada para $t \geq 0$.

Si la condición inicial $y(0^-)$ es igual a cero, la transformada de la salida está dada por

$$Y(s) = \frac{b}{s + a}X(s) \tag{6.84}$$

Cuando definimos

$$H(s) = \frac{b}{s + a}$$

(6.84) se vuelve

$$Y(s) = H(s)X(s) \tag{6.85}$$

A la función $H(s)$ le llamamos *función de transferencia* del sistema, debido a que especifica la transferencia de la entrada a la salida en el dominio $s$, si suponemos que la condición inicial $y(0^-)$ es cero; y nos referimos a (6.85) como la *representación de la función de transferencia* del sistema.

Para cualquier condición inicial $y(0^-)$ y cualquier entrada $x(t)$ con transformada de Laplace $X(s)$, podemos calcular la salida $y(t)$ si tomamos la transformada inversa de Laplace de $Y(s)$ dada por (6.83). El siguiente ejemplo ilustra el proceso.

---

### Ejemplo 6.28 Circuito *RC*

Considere el circuito *RC* de la figura 6.4, donde la entrada $x(t)$ es el voltaje aplicado al circuito y la salida $y(t)$ es el voltaje a través del capacitor. Como vimos en la sección 2.4, la ecuación diferencial de entrada y salida del circuito es

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t) \tag{6.86}$$

Resulta claro que (6.86) tiene la forma (6.81), con $a = 1/RC$ y $b = 1/RC$, y por lo tanto la representación en el dominio $s$ (6.83) para el circuito *RC* está dada por

$$Y(s) = \frac{y(0^-)}{s + 1/RC} + \frac{1/RC}{s + 1/RC}X(s) \tag{6.87}$$

Ahora, para cualquier entrada $x(t)$ podemos determinar la respuesta $y(t)$ si primero calculamos $Y(s)$ dada por (6.87), y después tomamos la transformada inversa de Laplace. Para ilustrar esto, suponga que la entrada $x(t)$ es el escalón unitario $u(t)$, tal que $X(s) = 1/s$. Entonces, (6.87) se vuelve

$$Y(s) = \frac{y(0^-)}{s + 1/RC} + \frac{1/RC}{(s + 1/RC)s} \tag{6.88}$$

Al expandir el segundo término del lado derecho de (6.88) obtenemos

$$Y(s) = \frac{y(0^-)}{s + 1/RC} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/RC}$$

Después, al tomar la transformada inversa de Laplace de $Y(s)$ obtenemos la respuesta de salida:

$$y(t) = y(0^-)e^{-(1/RC)t} + 1 - e^{-(1/RC)t}, t \geq 0 \tag{6.89}$$

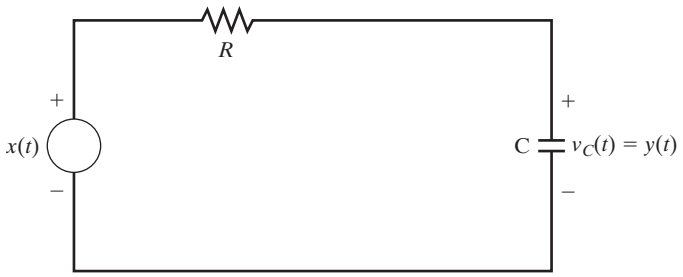



**FIGURA 6.4**
Circuito *RC* del ejemplo 6.28.

Observe que si la condición inicial $y(0^-)$ es cero, (6.89) se reduce a

$$y(t) = 1 - e^{-(1/RC)t}, t \geq 0 \tag{6.90}$$

Como vimos en el capítulo 2, la respuesta $y(t)$ dada por (6.90) se conoce como *respuesta al escalón* del circuito, ya que es la salida cuando $x(t)$ es el escalón unitario $u(t)$ sin condiciones iniciales.

### 6.4.2 Caso de segundo orden

Ahora considere el sistema lineal e invariante en el tiempo continuo, dado por la ecuación diferencial de entrada y salida de segundo orden

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0y(t) = b_1\frac{dx(t)}{dt} + b_0x(t) \tag{6.91}$$

donde $a_1, a_0, b_1$ y $b_0$ son números reales. Si suponemos que $x(0^-) = 0$, vemos que al tomar la transformada de Laplace de ambos lados de (6.91) obtenemos

$$\begin{aligned} s^2Y(s) - y(0^-)s - \dot{y}(0^-) + a_1[sY(s) - y(0^-)] + a_0Y(s) \\ = b_1sX(s) + b_0X(s) \end{aligned} \tag{6.92}$$

Al resolver (6.92) para $Y(s)$ tenemos

$$Y(s) = \frac{y(0^-)s + \dot{y}(0^-) + a_1y(0^-)}{s^2 + a_1s + a_0} + \frac{b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0}X(s) \tag{6.93}$$

La ecuación (6.93) es la representación del dominio $s$ del sistema, con la ecuación diferencial de entrada y salida (6.91). El primer término del lado derecho de (6.93) es la transformada de Laplace de la parte de la respuesta de salida que resulta de las condiciones iniciales, y el segundo término es la transformada de la parte de la respuesta que resulta de aplicar la entrada $x(t)$ para $t \geq 0$. Si las condiciones iniciales $y(0^-)$ y $\dot{y}(0^-)$ son iguales a cero, (6.93) se reduce a la siguiente representación de la función de transferencia:

$$Y(s) = \frac{b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0}X(s) \tag{6.94}$$

En este caso, la función de transferencia $H(s)$ del sistema es la función racional en $s$ de segundo orden, dada por

$$H(s) = \frac{b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0} \tag{6.95}$$

**Ejemplo 6.29 Caso de segundo orden**

Considere el sistema dado por la ecuación diferencial de entrada y salida

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 2x(t)$$

Así, la ecuación diferencial de entrada y salida tiene la forma (6.91), con $a_1 = 6, a_0 = 8, b_1 = 0$, y $b_0 = 2$; y de (6.95), la función de transferencia es

$$H(s) = \frac{2}{s^2 + 6s + 8}$$

Ahora, para calcular la respuesta al escalón del sistema, establecemos $x(t) = u(t)$, tal que $X(s) = 1/s$, y establecemos las condiciones iniciales en cero. Entonces la transformada de la respuesta al escalón es

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{2}{s^2 + 6s + 8}\frac{1}{s}$$

Al expandir $Y(s)$ tenemos

$$Y(s) = \frac{0.25}{s} - \frac{0.5}{s + 2} + \frac{0.25}{s + 4}$$

y por lo tanto, la respuesta al escalón es

$$y(t) = 0.25 - 0.5e^{-2t} + 0.25e^{-4t}, t \geq 0$$

Ahora suponga que $x(t) = u(t)$ con las condiciones iniciales $y(0^-) = 1$ y $\dot{y}(0^-) = 2$. En este caso, las condiciones iniciales no son cero y, por lo tanto, *no* es verdad que $Y(s) = H(s)X(s)$. Para calcular $Y(s)$, es necesario utilizar la representación en el dominio $s$, (6.93). Esto arroja

$$Y(s) = \frac{s + 8}{s^2 + 6s + 8} + \frac{2}{s^2 + 6s + 8}\frac{1}{s}$$

$$= \frac{s^2 + 8s + 2}{s(s^2 + 6s + 8)}$$

La expansión arroja

$$Y(s) = \frac{0.25}{s} + \frac{2.5}{s + 2} - \frac{1.75}{s + 4}$$

Así,

$$y(t) = 0.25 + 2.5e^{-2t} - 1.75e^{-4t}, t \geq 0$$

---

### 6.4.3 Caso de orden *N*

Ahora, considere el caso general en el que el sistema está dado por la ecuación diferencial de entrada y salida de orden $N$

$$\frac{d^N y(t)}{dt^N} + \sum_{i=0}^{N-1} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{M} b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i} \tag{6.96}$$

donde $M \leq N$. Suponemos que $x^{(i)}(0^-) = 0$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, M - 1$. Al tomar la transformada de Laplace de ambos lados de (6.96), con las condiciones iniciales en el tiempo $t = 0^-$, es posible expresar la transformada de Laplace $Y(s)$ de la salida $y(t)$ de la forma

$$Y(s) = \frac{C(s)}{A(s)} + \frac{B(s)}{A(s)}X(s) \tag{6.97}$$

donde $B(s)$ y $A(s)$ son polinomios dados por

$$B(s) = b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \cdots + b_1 s + b_0$$

$$A(s) = s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

El numerador $C(s)$ del primer término del lado derecho de (6.97) también es un polinomio en $s$, cuyos coeficientes están determinados por las condiciones iniciales $y(0^-)$, $y^{(1)}(0^-)$,..., $y^{(N-1)}(0^-)$. Por ejemplo, si $N = 2$, entonces por los resultados anteriores,

$$C(s) = y(0^-)s + \dot{y}(0^-) + a_1 y(0^-)$$

La ecuación (6.97) es la representación en el dominio $s$ del sistema con la ecuación diferencial de entrada y salida de orden $N$, (6.96).

Debido a que $x^{(i)}(0^-) = 0$ para $i = 0, 1, 2,..., M - 1$, si las condiciones iniciales $y(0^-)$, $y^{(1)}(0^-)$,..., $y^{(N-1)}(0^-)$ son cero, lo que equivale a la condición $C(s) = 0$, entonces la transformada $Y(s)$ de la respuesta de salida está dada por

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} X(s) = \frac{b_M s^M + \cdots + b_1 s + b_0}{s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \cdots + a_1 s + a_0} X(s) \tag{6.98}$$

La función de transferencia del sistema $H(s)$ es la función racional en $s$ de orden $N$, dada por

$$H(s) = \frac{b_M s^M + \cdots + b_1 s + b_0}{s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{6.99}$$

Al combinar (6.98) y (6.99) resulta en el modelo de la función de transferencia $Y(s) = H(s)X(s)$. Es importante resaltar que el modelo de la función de transferencia expresa la relación entre $X(s)$ y $Y(s)$, cuando suponemos que todas las condiciones iniciales en el tiempo $t = 0$ (o $t = 0^-$) son iguales a cero.

### 6.4.4 Cálculo de la respuesta de salida

De nuevo, considere la representación de la función de transferencia (6.98). Si la transformada $X(s)$ de la entrada $x(t)$ es una función racional de $s$, el producto $H(s)X(s)$ es una función racional de $s$. En este caso, la salida $y(t)$ puede calcularse si primero expandimos $H(s)X(s)$ en fracciones parciales. El siguiente ejemplo ilustra el proceso.

---

**Ejemplo 6.30 Cálculo de la respuesta de salida**

Considere el sistema con la función de transferencia

$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 16}{s^3 + 4s^2 + 8s}$$

Calcularemos la respuesta de salida $y(t)$ que resulta de la entrada $x(t) = e^{-2t}u(t)$, suponiendo que las condiciones iniciales son cero al tiempo $t = 0$. La transformada de $x(t)$ es

$$X(s) = \frac{1}{s + 2}$$

y así

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{s^2 + 2s + 16}{(s^3 + 4s^2 + 8s)(s + 2)} = \frac{s^2 + 2s + 16}{[(s + 2)^2 + 4]s(s + 2)}$$

Al expandir en fracciones parciales obtenemos

$$Y(s) = \frac{cs + d}{(s + 2)^2 + 4} + \frac{c_3}{s} + \frac{c_4}{s + 2} \tag{6.100}$$

donde

$$c_3 = [sY(s)]_{s=0} = \frac{16}{2(8)} = 1$$

$$c_4 = [(s + 2)Y(s)]_{s=-2} = \frac{(-2)^2 - (2)(2) + 16}{(-2)(4)} = -2$$

Al colocar el lado derecho de (6.100) sobre un común denominador e igualando los numeradores obtenemos

$$s^2 + 2s + 16 = (cs + d)s(s + 2) + c_3[(s + 2)^2 + 4](s + 2) + c_4[(s + 2)^2 + 4]s$$

Si agrupamos los términos en potencias comunes de $s$ tenemos

$$s^3 - 2s^3 + cs^3 = 0$$
$$6s^2 - 8s^2 + (d + 2c)s^2 = s^2$$

lo que implica que $c = 1$ y $d = 1$. Por lo tanto,

$$Y(s) = \frac{s + 1}{(s + 2)^2 + 4} + \frac{1}{s} + \frac{-2}{s + 2}$$

$$Y(s) = \frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 4} + \frac{-1}{(s + 2)^2 + 4} + \frac{1}{s} + \frac{-2}{s + 2}$$

Si utilizamos la tabla 6.1

$$y(t) = e^{-2t}\cos 2t - \tfrac{1}{2}e^{-2t}\operatorname{sen} 2t + 1 - 2e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

y cuando utilizamos la identidad trigonométrica (6.73), $y(t)$ puede expresarse de la forma

$$y(t) = \frac{\sqrt{5}}{2}e^{-2t}\cos(2t + 26.565^\circ) + 1 - 2e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

## 6.5 TRANSFORMADA DE LA INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN DE ENTRADA Y SALIDA

Si un sistema lineal e invariante en el tiempo está dado por una ecuación diferencial de entrada y salida, entonces, como vimos en la sección 6.4, podemos generar una representación en el dominio $s$ (o representación de la función de transferencia) del sistema si tomamos la transformada de Laplace de la ecuación diferencial de entrada y salida. Como mostraremos a continuación, podemos generar la representación de la función de transferencia para cualquier sistema causal, lineal e invariante en el tiempo si tomamos la transformada de Laplace de la expresión de convolución de entrada y salida dada por

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_0^t h(\lambda)x(t - \lambda)\, d\lambda, t \geq 0 \tag{6.101}$$

donde $h(t)$ es la respuesta al impulso del sistema, suponemos que la entrada $x(t)$ es cero para toda $t < 0$, y que todas las condiciones iniciales al tiempo $t = 0$ (o $t = 0^-$) son iguales a cero. A partir de los resultados del capítulo 2, vemos que $y(t)$, dada por (6.101), es la respuesta de salida que resulta al aplicar la entrada $x(t)$ para $t \geq 0$. También recuerde que la causalidad implica que $h(t)$ es cero para $t < 0$, y por lo tanto el límite inferior de la integral en (6.101) se toma en $\lambda = 0$. Por último, es importante observar que, en contraste con el enfoque de la transformada de Fourier que desarrollamos en el capítulo 5, aquí no se necesita que la respuesta al impulso $h(t)$ sea completamente integrable [vea (5.2)].

Debido a que la entrada $x(t)$ es cero para toda $t < 0$, la transformada de Laplace (unilateral) puede aplicarse a ambos lados de (6.101), lo cual resulta en la representación de la función de transferencia

$$Y(s) = H(s)X(s) \tag{6.102}$$

donde la función de transferencia $H(s)$ es la transformada de Laplace de la respuesta al impulso $h(t)$. La relación entre la respuesta al impulso $h(t)$ y la función de transferencia $H(s)$ puede expresarse en términos de la notación del par de transformadas

$$h(t) \leftrightarrow H(s) \tag{6.103}$$

El par de transformadas (6.103) es de fundamental importancia. En particular, proporciona un puente entre la representación en el dominio del tiempo dada por la relación de convolución (6.101), y la representación en el dominio $s$ (6.102) dada en términos de la función de transferencia $H(s)$.

Es importante destacar que si la entrada $x(t)$ no es la función cero, tal que $X(s)$ no es cero, ambos lados de (6.102) pueden dividirse entre $X(s)$, lo cual arroja

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \tag{6.104}$$

A partir de (6.104) vemos que la función de transferencia $H(s)$ es igual a la división de la transformada $Y(s)$ de la salida y de la transformada $X(s)$ de la entrada.

Debido a que $H(s)$ es la transformada de la respuesta al impulso $h(t)$, y un sistema tiene sólo una $h(t)$, cada sistema tiene una única función de transferencia. Por lo tanto, aunque $Y(s)$ cambia cuando la entrada $x(t)$ se encuentra en el intervalo de una colección de señales, por (6.104), la relación $Y(s)/X(s)$ no puede cambiar. También se desprende de (6.104) que la función de transferencia $H(s)$ puede determinarse si conocemos la respuesta $y(t)$ a cual-

quier señal de entrada diferente de cero $x(t)$. Debemos resaltar que este resultado es válido sólo si se sabe que el sistema dado es lineal e invariante en el tiempo. Si el sistema varía con el tiempo o es no lineal, no hay función de transferencia y, por lo tanto, (6.104) no tiene significado en tales casos.

---

**Ejemplo 6.31 Cómo determinar la función de transferencia**

Suponga que la entrada $x(t) = e^{-t}u(t)$ se aplica al sistema causal, lineal e invariante en el tiempo continuo, y que la respuesta de salida resultante es

$$y(t) = 2 - 3e^{-t} + e^{-2t}\cos 2t, t \geq 0$$

Entonces

$$Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{3}{s+1} + \frac{s+2}{(s+2)^2+4}$$

y

$$X(s) = \frac{1}{s+1}$$

Al sustituir estas expresiones para $Y(s)$ y $X(s)$ en (6.104) obtenemos

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{\frac{2}{s} - \frac{3}{s+1} + \frac{s+2}{(s+2)^2+4}}{\frac{1}{s+1}} \\ &= \frac{2(s+1)}{s} - 3 + \frac{(s+1)(s+2)}{(s+2)^2+4} \\ &= \frac{[2(s+1)-3s][(s+2)^2+4] + s(s+1)(s+2)}{s[(s+2)^2+4]} \\ &= \frac{s^2+2s+16}{s^3+4s^2+8s} \end{aligned}$$

---

### 6.5.1 Sistemas dimensionalmente finitos

Se dice que un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo es *dimensionalmente finito* si la función de transferencia $H(s)$ tiene la forma racional

$$H(s) = \frac{b_M s^M + \cdots + b_1 s + b_0}{s^N + a_{N-1}s^{N-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{6.105}$$

En este caso, el grado $N$ del polinomio del denominador de (6.105) se conoce como el *orden* del sistema. Es evidente que cualquier sistema dimensionalmente finito tiene una ecuación

diferencial de entrada y salida. Para ver esto, multiplique ambos lados de (6.105) por el polinomio del denominador, lo cual arroja

$$(s^N + a_{N-1}s^{N-1} + \cdots + a_1 s + a_0)Y(s) = (b_M s^M + \cdots + b_1 s + b_0)X(s) \quad (6.106)$$

Al calcular la transformada inversa de ambos lados de (6.106) obtenemos

$$\frac{d^N y(t)}{dt^N} + \sum_{i=0}^{N-1} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{M} b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i} \quad (6.107)$$

Por lo tanto, el sistema puede describirse mediante una ecuación diferencial de entrada y salida.

Así, si un sistema es dimensionalmente finito, es posible ir directamente de la representación de la función de transferencia a la ecuación diferencial de entrada y salida, y de la ecuación diferencial de entrada y salida a la representación de la función de transferencia. Esto produce otro vínculo fundamental entre el dominio del tiempo y el dominio $s$. También observe que, por el resultado anterior, un sistema causal, lineal e invariante en el tiempo es dimensionalmente finito si y sólo si el sistema puede describirse mediante una ecuación diferencial de entrada y salida.

**Polos y ceros de un sistema.** Dado un sistema dimensionalmente finito con la función de transferencia

$$H(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1}s^{M-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^N + a_{N-1}s^{N-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (6.108)$$

$H(s)$ puede expresarse en la forma factorizada

$$H(s) = \frac{b_M(s - z_1)(s - z_2)\cdots(s - z_M)}{(s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_N)} \quad (6.109)$$

donde $z_1, z_2, \ldots, z_M$ son los ceros de $H(s)$ y $p_1, p_2, \ldots, p_N$ son los polos de $H(s)$. Se dice que los ceros de $H(s)$ son los *ceros del sistema*, y que los polos de $H(s)$ son los *polos del sistema*. Observe que el número de polos del sistema es igual a su orden $N$. De (6.109) vemos que, excepto por la constante $b_M$, la función de transferencia es determinada completamente por los valores de los polos y los ceros del sistema. Los polos y ceros de un sistema dimensionalmente finito con frecuencia se despliegan en un *diagrama de ceros-polos*, el cual es una gráfica en el plano complejo que muestra la ubicación de los polos (marcados con $\times$) y todos los ceros (marcados con O). Como veremos en el capítulo 8, la ubicación de los polos y los ceros es de fundamental importancia para determinar el comportamiento del sistema.

### Ejemplo 6.32 Sistema masa-resorte-amortiguador

Sistema masa-resorte-amortiguador

Para el sistema masa-resorte-amortiguador definido en el capítulo 1 (vea la sección 1.4), la ecuación diferencial de entrada y salida del sistema está dada por

$$M\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + D\frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = x(t)$$

donde $M$ es la masa, $D$ es la constante de amortiguamiento, $K$ es la constante de rigidez, $x(t)$ es la fuerza aplicada a la masa, y $y(t)$ es el desplazamiento de la masa, respecto a la posición de equilibrio. Entonces, al utilizar la relación entre (6.105) y (6.107), se revela que la función de transferencia $H(s)$ del sistema masa-resorte-amortiguador está dada por

$$H(s) = \frac{1}{Ms^2 + Ds + K} = \frac{1/M}{s^2 + (D/M)s + (K/M)}$$

El sistema es de segundo orden; es decir, el sistema tiene dos polos, $p_1$ y $p_2$. A partir de la fórmula cuadrática, $p_1$ y $p_2$ están dados por

$$p_1 = -\frac{D}{2M} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{D^2}{M^2} - 4\frac{K}{M}}$$

$$p_2 = -\frac{D}{2M} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{D^2}{M^2} - 4\frac{K}{M}}$$

Vemos que los polos $p_1$ y $p_2$ pueden ser números reales, o números complejos con un polo igual al complejo conjugado del otro. Los polos son reales si y sólo si

$$\frac{D^2}{M^2} - 4\frac{K}{M} \geq 0$$

lo que equivale a la condición $D^2 \geq 4KM$. Los polos son reales y diferentes (no se repiten) si y sólo si $D^2 > 4KM$. Si suponemos que ambos polos son reales y diferentes, la transformada de Laplace $Y(s)$ de la respuesta de salida $y(t)$ resultante de la entrada constante $x(t) = A$, $t \geq 0$, está dada por

$$Y(s) = \frac{1/M}{(s - p_1)(s - p_2)}\frac{A}{s} = \frac{A/(p_1p_2M)}{s} + \frac{A/[M(p_1 - p_2)]}{s - p_1} + \frac{A/[M(p_2 - p_1)]}{s - p_2}$$

Al tomar la transformada inversa de Laplace en la respuesta de salida

$$y(t) = \frac{A}{p_1p_2M} + \frac{A}{(p_1 - p_2)M}[e^{p_1t} - e^{p_2t}], t \geq 0$$

Si $M$, $D$ y $K$ son estrictamente positivos (mayores que 0), y $D^2 > 4KM$, vemos que $p_1$ y $p_2$ son números reales estrictamente negativos (menores que 0) y, por lo tanto, la respuesta $y(t)$ converge en la constante $A/(p_1p_2M)$ cuando $t \to \infty$. El lector puede ver una animación de este comportamiento si ejecuta el demo en línea del sitio Web.

---

**Ejemplo 6.33 Sistema de tercer orden**

Considere el sistema con la función de transferencia

$$H(s) = \frac{2s^2 + 12s + 20}{s^3 + 6s^2 + 10s + 8}$$

Factorizar $H(s)$, arroja

$$H(s) = \frac{2(s + 3 - j)(s + 3 + j)}{(s + 4)(s + 1 - j)(s + 1 + j)}$$

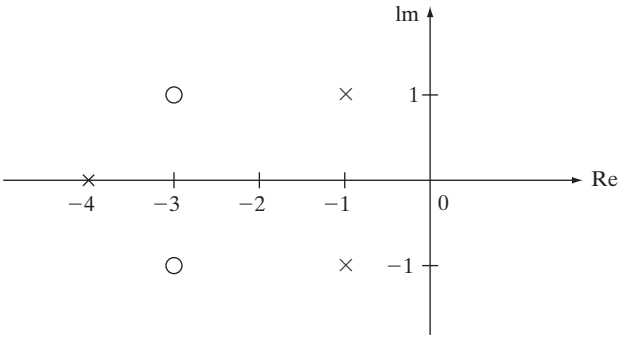



**FIGURA 6.5**
Diagrama de polos-ceros del ejemplo 6.33.

Así, los ceros del sistema son

$$z_1 = -3 + j \quad \text{y} \quad z_2 = -3 - j$$

y los polos del sistema son

$$p_1 = -4, \qquad p_2 = -1 + j, \qquad p_3 = -1 - j$$

El diagrama de polos-ceros aparece en la figura 6.5.

---

**Cálculo de la respuesta de salida con MATLAB.** Dado un sistema dimensionalmente finito, la respuesta del sistema a cualquier entrada puede calcularse por medio de diversos métodos en MATLAB, que diferirán de acuerdo con la versión para el estudiante o la versión profesional que se utilice. Primero considere los métodos descritos en la sección 2.5. Estos métodos modelan el sistema en forma de ecuación diferencial, y después la resuelven mediante el manipulador simbólico o mediante métodos de integración numérica, como la integración por Euler y los solucionadores ODE de MATLAB. Como mencionamos antes, una función de transferencia puede convertirse en una ecuación diferencial, y por lo tanto puede resolverse mediante los métodos de solución para ecuaciones diferenciales.

Si utilizamos el método de la función de transferencia que describimos en este capítulo para encontrar la respuesta, también podemos hacerlo simbólica o numéricamente. Para utilizar el método simbólico, las expresiones de forma cerrada deben ser conocidas tanto para la entrada $X(s)$ como para la función de transferencia $H(s)$. La respuesta de salida se calcula a partir de $Y(s) = H(s)X(s)$.

---

### Ejemplo 6.34 Solución con el manipulador simbólico

Suponga que la función de transferencia y la transformada de Laplace de la entrada están dadas por

$$H(s) = \frac{2}{s^2 + 4s + 4}, \quad X(s) = \frac{1}{s}$$

Los comandos de Symbolic Math Toolbox que utilizamos para resolver $y(t)$ y para graficarla son

```
syms s H X Y
H = 2/(s^2+4*s+4);
X = 1/s;
Y = H*X;
y = ilaplace(Y) % utilice simplify(y) para simplificar
el resultado
ezplot(y,[0,10]);
```

Ejecutar estos comandos devuelve

```
y =
1/2+(-1/2-t)*exp(-2*t)
```

---

La solución para una entrada cualquiera puede calcularse numéricamente con la versión completa de MATLAB, mediante los comandos `tf` y `lsim` de Control System Toolbox. Este método se conoce como *simulación numérica*. Cualquier función de transferencia $H(s)$ dada por (6.108) se representa en MATLAB como un objeto de función de transferencia, que puede ser creada con el comando `tf`. Los polinomios del numerador y denominador se representan en MATLAB como vectores que contienen los coeficientes de los polinomios en potencias descendentes de $s$. Así, la función de transferencia (6.108) se almacena en MATLAB a través de los comandos

```
num = [b_M b_M-1 … b_0];
den = [1 a_N-1 … a_0];
H = tf(num,den);
```

Para calcular la salida del sistema resultante de una entrada $x(t)$, se define un vector tiempo que contiene los valores de $t$ para los cuales $y(t)$ será calculada. El uso del comando `lsim` se ilustra en el siguiente ejemplo.

---

### Ejemplo 6.35 Respuesta de salida a partir de `lsim`

Considere el sistema con la función de transferencia dada en el ejemplo 6.30:

$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 16}{s^3 + 4s^2 + 8s}$$

La respuesta de este sistema a una entrada exponencial se obtiene a través de los siguientes comandos:

```
num = [1 2 16];
den = [1 4 8 0];
H = tf(num,den);
t = 0:10/300:10;
x = exp(-2*t);
y = lsim(H,x,t);
```

Ejecutar el programa de MATLAB da como resultado un vector `y` para la respuesta de salida que aparece graficada en la figura 6.6 junto con la respuesta exacta calculada en el ejemplo 6.30. Las respuestas obtenidas a partir de la simulación numérica y de la respuesta exacta son indistinguibles.

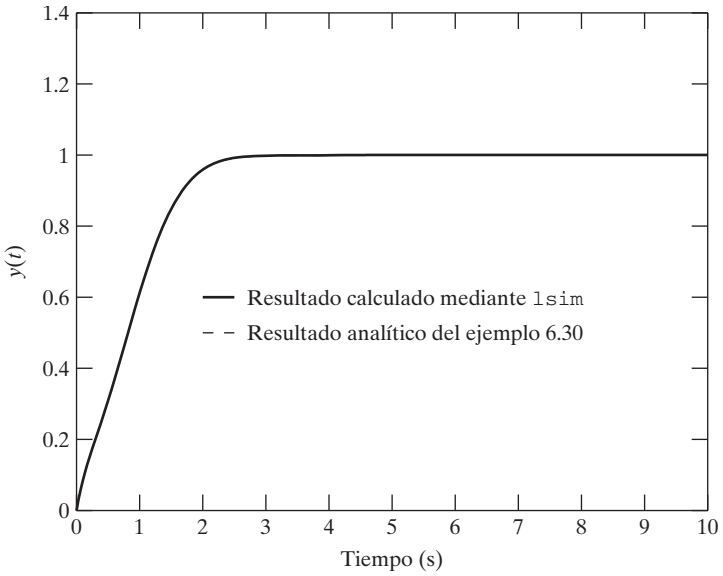



**FIGURA 6.6**
Respuesta de salida del sistema correspondiente al ejemplo 6.35.

La respuesta al escalón y la respuesta al impulso del sistema con la función de transferencia mencionada, $H(s)$, se obtienen reemplazando el comando `lsim` utilizado anteriormente por

```
y = impulse(H,t);
y = step(H,t);
```

---

La versión completa de MATLAB contiene un toolbox llamado Simulink® que está incluido en la versión para el estudiante. Este toolbox permite al usuario construir de manera gráfica un modelo y después simular el sistema. Simulink se inicia al escribir `simulink` en la casilla de MATLAB. Se abre una ventana que contiene una biblioteca de bloques disponibles. Para crear un nuevo modelo, el usuario hace un clic en "File" y después en "New", con lo cual se abre una nueva ventana para el modelo. El modelo se construye arrastrando los elementos del menú, llamados bloques, desde la ventana de la biblioteca hasta la ventana del nuevo modelo. Cada bloque puede personalizarse mediante un doble clic para establecer los parámetros de un modelo en particular.

---

### Ejemplo 6.36 Modelo Simulink

Considere nuevamente el sistema dado en el ejemplo 6.30. Inicie Simulink como describimos previamente. Usted encontrará el bloque para una función de transferencia para un sistema de tiempo continuo haciendo un clic en el elemento de menú "Continuous". Arrastre el bloque de la función de transferencia hacia la ventana del modelo, y haga un doble clic en él. Establezca los coeficientes del numerador y del denominador con el comando `tf`, de la misma forma como lo mostramos en el ejemplo 6.35. Las señales de entrada se encuentran debajo del elemento de menú "Sources". Éstas incluyen algunas señales comunes, como la función escalón, o la opción de

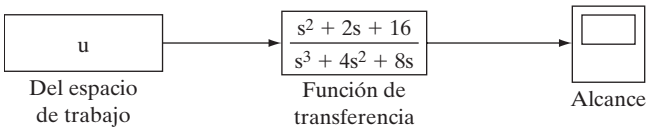



**FIGURA 6.7**
Modelo Simulink del sistema descrito en el ejemplo 6.36.

utilizar una señal definida por un vector creado en el espacio de trabajo normal de MATLAB. Por ejemplo, para utilizar la señal exponencial que usamos en el ejemplo 6.35, genere el arreglo

```
u = [t',x'];
```

de la casilla estándar de MATLAB. Arrastre el bloque descrito como "From Workspace" hacia la ventana del modelo, y establezca los parámetros del bloque haciendo doble clic en él. En particular, en el campo de datos escriba el nombre del vector de entrada, u, en este caso. Arrastre un bloque desde el menú "Sink" hacia la ventana del modelo para desplegar o guardar la respuesta de salida. El bloque Scope es un elemento del menú Sink que permite al usuario ver graficada la respuesta de salida conforme progresa la simulación. Para verlo, haga doble clic en el bloque Scope de la ventana del modelo. Conecte los bloques haciendo un clic en el puerto de salida de un bloque, y arrastrando el ratón hacia el puerto de entrada de otro bloque. Haga un clic en "Simulation", y después en "Start" para simular la respuesta. El modelo Simulink resultante para el sistema descrito en el ejemplo 6.30 con la entrada exponencial aparece en la figura 6.7.

## 6.6 CONSTRUCCIÓN DIRECTA DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

La función de transferencia de un sistema con frecuencia se determina directamente a partir de un diagrama eléctrico del sistema, por lo que no siempre es necesario determinar la respuesta al impulso o la ecuación diferencial de entrada y salida para generar la representación de la función de transferencia. Esto puede hacerse para circuitos *RLC* y sistemas que consisten en interconexiones de integradores. El siguiente desarrollo comienza con circuitos *RLC*.

### 6.6.1 Circuitos *RLC*

En la sección 2.4 definimos el resistor, el capacitor y el inductor en términos de las relaciones voltaje-corriente

$$v(t) = Ri(t) \tag{6.110}$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{C}i(t) \tag{6.111}$$

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \tag{6.112}$$

En (6.110)-(6.112), $i(t)$ es la corriente dentro del elemento del circuito, y $v(t)$ es el voltaje a través del elemento (vea la figura 2.10). Podemos expresar las relaciones voltaje-corriente

en el dominio $s$ si tomamos la transformada de Laplace de ambos lados de (6.110)-(6.112). Si utilizamos la propiedad de derivación de la transformada de Laplace obtenemos

$$V(s) = RI(s) \tag{6.113}$$

$$sV(s) - v(0) = \frac{1}{C}I(s) \quad \text{o} \quad V(s) = \frac{1}{Cs}I(s) + \frac{1}{s}v(0) \tag{6.114}$$

$$V(s) = LsI(s) - Li(0) \tag{6.115}$$

donde $V(s)$ es la transformada de Laplace del voltaje, e $I(s)$ es la transformada de la corriente. En (6.114), $v(0)$ es el voltaje inicial sobre el capacitor en el tiempo $t = 0$; y en (6.115), $i(0)$ es la corriente inicial en el inductor en el tiempo $t = 0$.

Utilizar (6.113)-(6.115) resulta en las representaciones del resistor, el capacitor y el inductor en el dominio $s$, las cuales aparecen en la figura 6.8. Aquí, los elementos del circuito se representan en términos de sus impedancias; es decir, el resistor tiene una impedancia $R$, el capacitor tiene una impedancia (compleja) $1/Cs$, y el inductor tiene una impedancia (compleja) $Ls$. Observe que el voltaje inicial sobre el capacitor y la corriente inicial en el inductor se tratan como fuentes de voltaje en las representaciones del dominio $s$.

Ahora, dada una interconexión de $RLC$, podemos construir una representación del circuito en el dominio $s$ si tomamos la transformada de Laplace para los voltajes y corrientes en el circuito, y si expresamos a los resistores, capacitores e inductores en términos de sus representaciones en el dominio $s$. La representación resultante en el dominio $s$ satisface las mismas leyes de circuitos que un circuito puramente resistivo con fuentes de voltaje y corriente. En particular, podemos aplicar las reglas de división de voltaje y corriente para los circuitos resistivos. Por ejemplo, considere dos impedancias $Z_1(s)$ y $Z_2(s)$ conectadas en

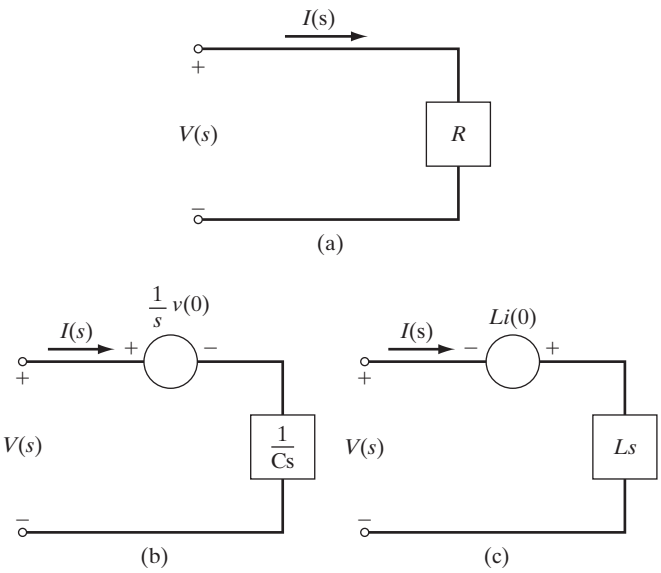



**FIGURA 6.8**
Representaciones en el dominio $s$ del (a) resistor; (b) capacitor; (c) inductor.

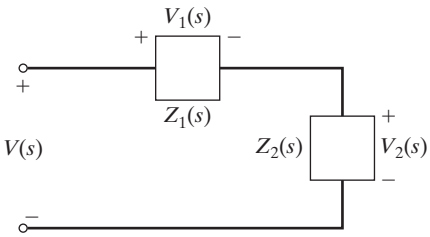



**FIGURA 6.9**
Conexión en serie de dos impedancias.

serie, como muestra la figura 6.9. Con $V(s)$ igual a la transformada de Laplace del voltaje aplicado, y con $V_1(s)$ y $V_2(s)$ iguales a las transformadas de Laplace de los voltajes a través de las impedancias $Z_1(s)$ y $Z_2(s)$, por la regla de división de voltaje,

$$V_1(s) = \frac{Z_1(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} V(s)$$

$$V_2(s) = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} V(s)$$

Ahora suponga que las dos impedancias $Z_1(s)$ y $Z_2(s)$ se conectan en paralelo, como muestra la figura 6.10. Con $I(s)$ igual a la transformada de la corriente dentro de la conexión, y con $I_1(s)$ e $I_2(s)$ iguales a las transformadas de las corrientes en las impedancias, por la regla de división de corriente,

$$I_1(s) = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} I(s)$$

$$I_2(s) = \frac{Z_1(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} I(s)$$

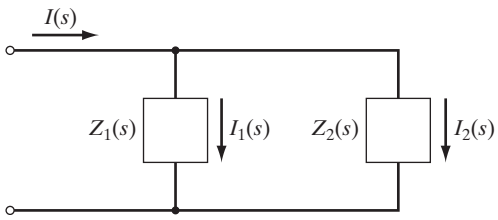



**FIGURA 6.10**
Dos impedancias en paralelo.

Al utilizar las reglas de división de voltaje y corriente, y otras leyes básicas de circuitos, podemos determinar de manera directa la función de transferencia de un circuito *RLC* a partir de la representación en el dominio *s* del circuito. Al calcular la función de transferencia, suponemos que las condiciones iniciales son cero al tiempo $t = 0$; y por lo tanto, suponemos que los voltajes iniciales sobre los capacitores y las corrientes iniciales en los inductores son cero.

En los siguientes dos ejemplos ilustramos la construcción de la función de transferencia.

### Ejemplo 6.37 Circuito *RLC* en serie

Considere el circuito *RLC* que aparece en la figura 6.11. Como muestra, la entrada es el voltaje $x(t)$ aplicado a la conexión en serie, y la salida es el voltaje $v_c(t)$ a través del capacitor. Dado que el voltaje inicial sobre el capacitor y la corriente inicial en el inductor son cero, la representación del circuito en el dominio *s* aparece en la figura 6.12. Si trabajamos con la representación en el dominio *s*, y utilizamos la división de voltaje obtenemos

$$V_c(s) = \frac{1/Cs}{Ls + R + (1/Cs)} X(s) = \frac{1/LC}{s^2 + (R/L)s + (1/LC)} X(s) \tag{6.116}$$

Al comparar (6.116) con la forma general de la representación de la función de transferencia (6.102) vemos que la función de transferencia $H(s)$ del circuito es

$$H(s) = \frac{1/LC}{s^2 + (R/L)s + (1/LC)} \tag{6.117}$$

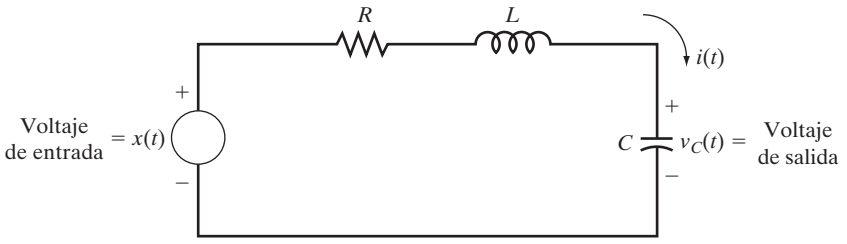



**FIGURA 6.11**
Circuito *RLC* en serie.

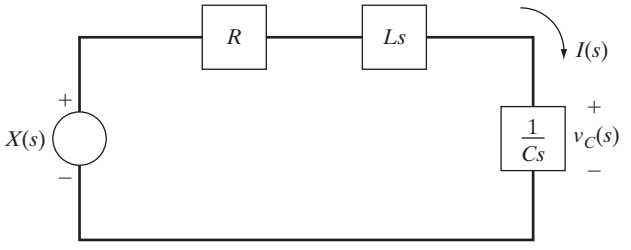



**FIGURA 6.12**
Representación en el dominio *s* del circuito *RLC* en serie.

Es interesante observar que, si hubiésemos elegido una opción diferente para la entrada y salida del circuito, la función de transferencia no hubiese igualado el resultado dado en (6.117). Por ejemplo, si la definición de la entrada se mantiene igual, pero la salida se considera como el voltaje $v_R(t)$ a través del resistor, por la división de voltaje,

$$V_R(s) = \frac{R}{Ls + R + (1/Cs)} X(s) = \frac{(R/L)s}{s^2 + (R/L)s + (1/LC)} X(s)$$

El resultado de la función de transferencia es

$$H(s) = \frac{(R/L)s}{s^2 + (R/L)s + (1/LC)}$$

lo que difiere de (6.117).

### Ejemplo 6.38 Cálculo de la función de transferencia

En el circuito que aparece en la figura 6.13, la entrada $x(t)$ es el voltaje aplicado, y la salida $y(t)$ es la corriente en el capacitor con capacitancia $C_1$. Si suponemos que los voltajes iniciales sobre los capacitores y las corrientes iniciales en los inductores son cero, entonces la representación en el dominio $s$ del circuito es la que muestra la figura 6.14. La impedancia de la conexión en paralelo consistente en la capacitancia $C_1$ y la inductancia $L_2$ en serie con la capacitancia $C_2$ es igual a

$$\frac{(1/C_1s)[L_2s + (1/C_2s)]}{(1/C_1s) + L_2s + (1/C_2s)} = \frac{C_2L_2s^2 + 1}{C_1C_2L_2s^3 + (C_1 + C_2)s}$$

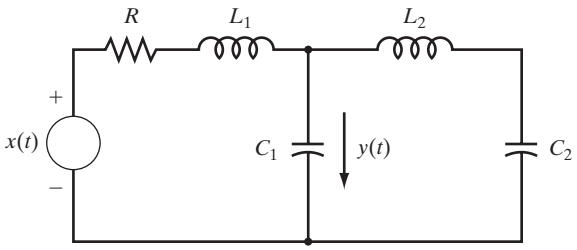



**FIGURA 6.13**
Circuito del ejemplo 6.38.

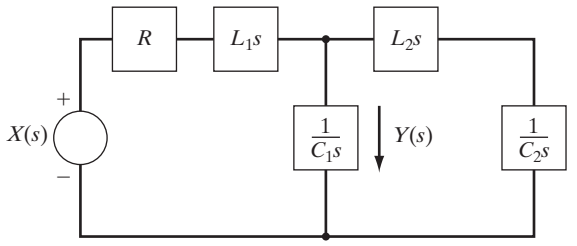



**FIGURA 6.14**
Representación en el dominio $s$ del circuito del ejemplo 6.38.

Al hacer que $V_1(s)$ denote la transformada del voltaje a través de la capacitancia $C_1$ [con $V_1(s)$ definido para que $Y(s) = C_1 s V_1(s)$], obtenemos, por la división de voltaje,

$$V_1(s) = \frac{\dfrac{C_2L_2s^2 + 1}{C_1C_2L_2s^3 + (C_1 + C_2)s}}{R + L_1s + \dfrac{C_2L_2s^2 + 1}{C_1C_2L_2s^3 + (C_1 + C_2)s}} X(s)$$

$$V_1(s) = \frac{C_2L_2s^2 + 1}{(R + L_1s)(C_1C_2L_2s^3 + (C_1 + C_2)s) + C_2L_2s^2 + 1} X(s)$$

$$V_1(s) = \frac{C_2L_2s^2 + 1}{C_1C_2L_1L_2s^4 + RC_1C_2L_2s^3 + [L_1(C_1 + C_2) + L_2C_2]s^2 + R(C_1 + C_2)s + 1} X(s)$$

Por último, ya que $Y(s) = C_1 s V_1(s)$, entonces

$$Y(s) = \frac{C_1C_2L_2s^3 + C_1s}{C_1C_2L_1L_2s^4 + RC_1C_2L_2s^3 + [L_1(C_1 + C_2) + L_2C_2]s^2 + R(C_1 + C_2)s + 1} X(s)$$

y, por lo tanto, la función de transferencia es

$$H(s) = \frac{C_1C_2L_2s^3 + C_1s}{C_1C_2L_1L_2s^4 + RC_1C_2L_2s^3 + [L_1(C_1 + C_2) + L_2C_2]s^2 + R(C_1 + C_2)s + 1}$$

---

**Interconexión de integradores.** En ocasiones, los sistemas de tiempo continuo están dados en términos de la interconexión de integradores, sumadores, restadores y multiplicadores escalares. Estos componentes básicos de un sistema aparecen en la figura 6.15. Como muestra el inciso (a) de dicha figura, la salida $y(t)$ del integrador es igual al valor inicial de $y(t)$ más la integral de la entrada (por lo tanto, el término integrador). En términos matemáticos,

$$y(t) = y(0) + \int_0^t x(\lambda)\, d\lambda \tag{6.118}$$

Al derivar ambos lados de (6.118) obtenemos la ecuación diferencial de entrada y salida

$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t) \tag{6.119}$$

A partir de (6.119) vemos que si la entrada del integrador es la derivada de una señal $v(t)$, la salida resultante es $v(t)$. Esto tiene sentido, ya que la integración "deshace" la derivación.

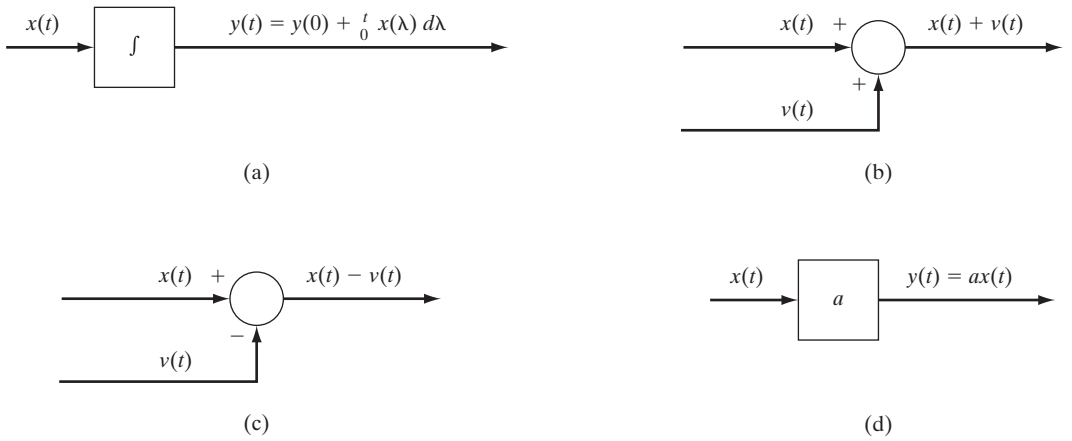



**FIGURA 6.15**
Componentes básicos de un sistema: (a) integrador; (b) sumador; (c) restador; (d) multiplicador escalar.

Como muestran las figuras 6.15b y 6.15c, el sumador simplemente suma las entradas y el restador las resta. Como su nombre lo indica, el multiplicador escalar escala la entrada en un factor $a$, donde $a$ es cualquier número real.

Ahora, al tomar la transformada de Laplace de ambos lados de (6.119) da como resultado la representación del integrador en el dominio $s$:

$$sY(s) - y(0) = X(s)$$

o

$$Y(s) = \frac{1}{s}y(0) + \frac{1}{s}X(s)$$

Si $y(0) = 0$, la representación en el dominio $s$ se reduce a

$$Y(s) = \frac{1}{s}X(s) \tag{6.120}$$

De (6.120) vemos que el integrador tiene la función de transferencia $1/s$.

Ahora considere una interconexión de integradores, sumadores, restadores y multiplicadores escalares. Para calcular la función de transferencia, podemos comenzar por dibujar de nuevo la interconexión en el dominio $s$ tomando las transformadas de todas las señales en la interconexión, y representando los integradores con $1/s$. Después podemos escribir una ecuación para la transformada de Laplace de la entrada de cada integrador en la interconexión. La ecuación para la transformada de la salida también puede escribirse en términos de las transformadas de las salidas de los integradores. Estas ecuaciones después se combinan de manera algebraica para deducir la relación de la función de transferencia. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento.

### Ejemplo 6.39 Interconexión de integradores

Considere el sistema que aparece en la figura 6.16. La salida del primer integrador se denota con $q_1(t)$, y la salida del segundo integrador con $q_2(t)$. Si suponemos que $q_1(0) = q_2(0) = 0$, observamos que la representación en el dominio $s$ del sistema aparece en la figura 6.17. Entonces,

$$sQ_1(s) = -4Q_1(s) + X(s) \tag{6.121}$$

$$sQ_2(s) = Q_1(s) - 3Q_2(s) + X(s) \tag{6.122}$$

$$Y(s) = Q_2(s) + X(s) \tag{6.123}$$

Al resolver (6.121) para $Q_1(s)$ obtenemos

$$Q_1(s) = \frac{1}{s+4}X(s) \tag{6.124}$$

Si resolvemos (6.122) para $Q_2(s)$ y utilizamos (6.124) obtenemos

$$Q_2(s) = \frac{1}{s+3}[Q_1(s) + X(s)] = \frac{1}{s+3}\left(\frac{1}{s+4} + 1\right)X(s)$$

$$= \frac{s+5}{(s+3)(s+4)}X(s) \tag{6.125}$$

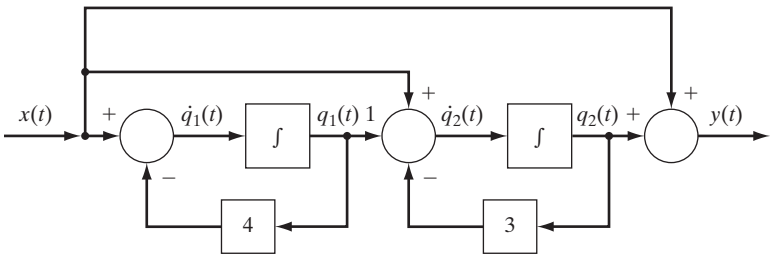



**FIGURA 6.16**
Sistema con dos integradores.

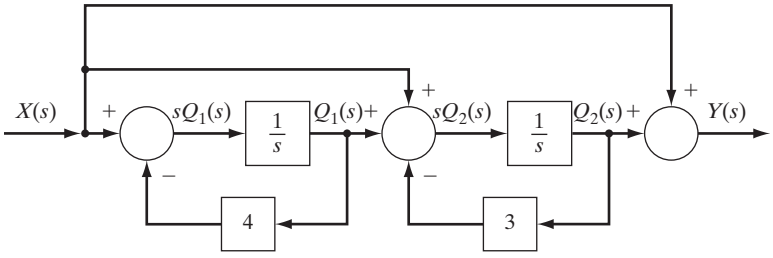



**FIGURA 6.17**
Representación de un sistema en el dominio $s$.

Al sustituir la expresión (6.125) para $Q_2(s)$ en (6.123) obtenemos

$$Y(s) = \left[\frac{s + 5}{(s + 3)(s + 4)} + 1\right]X(s) = \frac{s^2 + 8s + 17}{(s + 3)(s + 4)}X(s)$$

Por lo tanto, la función de transferencia $H(s)$ es

$$H(s) = \frac{s^2 + 8s + 17}{(s + 3)(s + 4)} = \frac{s^2 + 8s + 17}{s^2 + 7s + 12}$$

## FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE DIAGRAMAS DE BLOQUES

Un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo en ocasiones se especifica mediante un diagrama de bloques, el cual consiste en una interconexión de "bloques", con cada bloque representado por una función de transferencia. Los bloques pueden considerarse subsistemas que conforman el sistema. Podemos determinar la función de transferencia de un sistema dado por un diagrama de bloque si combinamos los bloques en el diagrama. En esta sección consideraremos las funciones de transferencia para tres tipos básicos de interconexiones.

**Interconexión en paralelo.** Considere una interconexión en paralelo de dos sistemas lineales e invariantes en el tiempo continuo, con funciones de transferencia $H_1(s)$ y $H_2(s)$. La interconexión aparece en la figura 6.18. La transformada de Laplace $Y(s)$ de la salida de una conexión en paralelo está dada por

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) \tag{6.126}$$

Si las condiciones iniciales de cada sistema son iguales a cero, entonces

$$Y_1(s) = H_1(s)X(s) \text{ y } Y_2(s) = H_2(s)X(s)$$

Al sustituir estas expresiones en (6.126) tenemos

$$\begin{aligned} Y(s) &= H_1(s)X(s) + H_2(s)X(s) \\ &= (H_1(s) + H_2(s))X(s) \end{aligned} \tag{6.127}$$

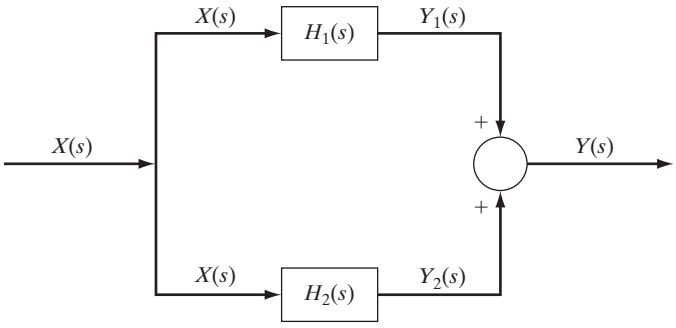



**FIGURA 6.18**
Interconexión en paralelo de dos sistemas.

A partir de (6.127) vemos que la función de transferencia $H(s)$ de la interconexión en paralelo es la suma de las funciones de transferencia de los sistemas en la conexión; es decir,

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s) \tag{6.128}$$

**Conexión en serie.** Ahora considere la conexión en serie (también conocida como conexión en cascada) que aparece en la figura 6.19. Suponemos que las condiciones iniciales son cero en ambos sistemas y que el segundo sistema no carga al primero. No cargar significa que

$$Y_1(s) = H_1(s)X(s) \tag{6.129}$$

Si $y_1(t)$ es una onda de voltaje, debemos suponer que no hay carga si la impedancia de salida del primer sistema es mucho menor que la impedancia de entrada del segundo sistema.

Ahora, ya que

$$Y_2(s) = H_2(s)Y_1(s)$$

y si utilizamos (6.129) obtenemos

$$Y(s) = Y_2(s) = H_2(s)H_1(s)X(s) \tag{6.130}$$

De (6.130) se desprende que la función de transferencia $H(s)$ de la conexión en serie es igual al producto de las funciones de transferencia de los sistemas en la conexión, es decir,

$$H(s) = H_2(s)H_1(s)$$

Debido a que $H_1(s)$ y $H_2(s)$ son funciones de $s$, valuadas en escalares,

$$H_2(s)H_1(s) = H_1(s)H_2(s)$$

y por lo tanto, $H(s)$ también puede expresarse de la forma

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) \tag{6.131}$$

**Conexión con retroalimentación.** Ahora considere la interconexión que muestra la figura 6.20. En esta conexión la salida del primer sistema retroalimenta su entrada a través del segundo sistema, y por lo tanto la conexión se conoce como *conexión de retroalimentación*. Observe que si el lazo de retroalimentación se desconecta, la función de transferencia de $X(s)$ hacia $Y(s)$ es $H_1(s)$. El sistema con la función de transferencia $H_1(s)$ se conoce como *sistema de lazo abierto*, ya que la función de transferencia de $X(s)$ hacia $Y(s)$ es igual $H_1(s)$ si se desconecta la retroalimentación. [Algunos autores se refieren a $H_1(s)H_2(s)$ como *función de transferencia de lazo abierto*]. El sistema con función de transferencia $H_2(s)$ se conoce como *sistema de retroalimentación*, y la conexión de retroalimentación se conoce como

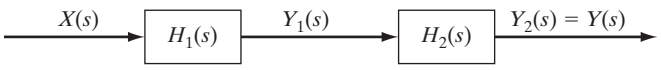



**FIGURA 6.19**
Conexión en serie.

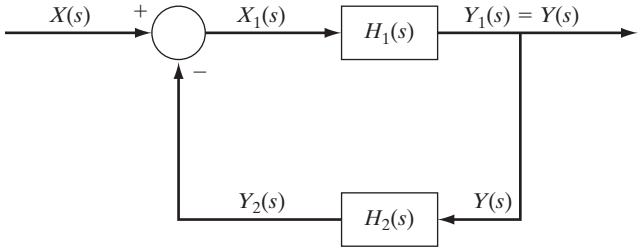



**FIGURA 6.20**
Conexión con retroalimentación.

*sistema de lazo cerrado*. El objetivo aquí es calcular la función de transferencia del sistema de lazo cerrado.

Suponemos que las condiciones iniciales en cualquiera de los sistemas son cero y que el sistema de retroalimentación no carga al sistema de lazo abierto. Entonces, de la figura 6.20,

$$Y(s) = H_1(s)X_1(s) \tag{6.132}$$

$$X_1(s) = X(s) - Y_2(s) = X(s) - H_2(s)Y(s) \tag{6.133}$$

Al sustituir la expresión (6.133) para $X_1(s)$ en (6.132) obtenemos

$$Y(s) = H_1(s)[X(s) - H_2(s)Y(s)] \tag{6.134}$$

Al reacomodar los términos de (6.134) resulta

$$[1 + H_1(s)H_2(s)]Y(s) = H_1(s)X(s) \tag{6.135}$$

Si resolvemos (6.135) para $Y$(s) resulta

$$Y(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}X(s) \tag{6.136}$$

De (6.136) vemos que la función de transferencia $H(s)$ de la conexión con retroalimentación está dada por

$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)} \tag{6.137}$$

De (6.137) se desprende que la función de transferencia de lazo cerrado $H(s)$ es igual a la función de transferencia de lazo abierto $H_1(s)$, dividida entre 1 más el producto $H_1(s)H_2(s)$ de las funciones de transferencia del sistema de lazo abierto y el sistema de retroalimentación. Observe que si el restador de la figura 6.20 fuese cambiado por un sumador, la función de transferencia $H(s)$ del sistema de lazo cerrado cambiaría a

$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 - H_1(s)H_2(s)} \tag{6.138}$$

Es importante observar que MATLAB puede utilizarse para calcular la función de transferencia para retroalimentar conexiones en serie o en paralelo. Podrá encontrar algunos detalles sobre esto en el tutorial que está disponible en el sitio Web de este libro.

## 6.7 RESUMEN DEL CAPÍTULO

La transformada de Laplace es una poderosa herramienta para resolver ecuaciones diferenciales, encontrar la respuesta de un sistema, y realizar el análisis general de sistemas de tiempo continuo. La transformada de Laplace de un solo lado (unilateral) está definida por la expresión

$$X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}\,dt$$

Existen diversas funciones comunes que tienen transformadas de Laplace bien definidas, tales como la función escalón, la función impulso, las exponenciales, sinusoides y sinusoides amortiguadas. Estas señales y sus transformadas de Laplace forman un conjunto de pares de transformadas comunes. Por lo general encontramos la transformada inversa de Laplace de expresiones complicadas utilizando la expansión en fracciones parciales para rescribir la expresión en una suma de términos más sencillos, a partir del conjunto de pares comunes. Después tomamos la transformada inversa de Laplace término por término, mediante una tabla de pares comunes. Este procedimiento utiliza la propiedad de linealidad de la transformada de Laplace y su transformada inversa. Algunas otras propiedades útiles de la transformada de Laplace incluyen el desplazamiento por la derecha en el tiempo, derivación, integración, convolución y el teorema del valor final.

La propiedad de derivación de la transformada de Laplace puede utilizarse cuando resolvemos una ecuación diferencial lineal. El procedimiento de solución es el siguiente: primero tome la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación diferencial, mediante la propiedad de derivación a medida que se necesite para encontrar la transformada de las derivadas de la salida $y(t)$ o de la entrada $x(t)$. La salida $Y(s)$ se resuelve en términos de las condiciones iniciales y de la entrada $X(s)$. Para una $X(s)$ específica, encuentre la salida $y(t)$ mediante la transformada inversa de Laplace de $Y(s)$. Así, una ecuación diferencial en $t$ se transforma en una ecuación algebraica en $s$, la cual es más fácil de resolver en parte por la existencia de tablas de pares comunes de transformadas de Laplace.

La propiedad de convolución se utiliza para encontrar la respuesta de un sistema lineal e invariante a una entrada cualquiera. Dada la respuesta al impulso, la integral de convolución que estudiamos en el capítulo 2 es con frecuencia una forma tediosa para resolver la respuesta de un sistema a una entrada cualquiera. Al tomar la transformada de Laplace de la integral de convolución resulta en la expresión $Y(s) = H(s)X(s)$, donde la transformada de Laplace de la respuesta al impulso $H(s)$ se conoce como la función de transferencia del sistema. De manera alterna, podemos encontrar la función de transferencia si dividimos la transformada de Laplace de la salida de un sistema entre la transformada de Laplace de su entrada correspondiente, cuando no hay condiciones iniciales aplicadas al sistema. Mediante este procedimiento, podemos encontrar la función de transferencia de un sistema si manipulamos la transformada de Laplace de la ecuación diferencial del sistema. Podemos encontrar directamente la función de transferencia de un circuito a partir de su diagrama utilizando un método de impedancias, donde los elementos del circuito se reemplazan con sus contrapartes en el dominio $s$.

Un diagrama de bloque es una representación gráfica de una interconexión de subsistemas, donde cada subsistema se representa por un bloque que contiene la función de transferencia del subsistema. Las interconexiones comunes incluyen la conexión en serie, en la que la salida de un sistema es la entrada de otro; la conexión en paralelo, en la que las salidas de dos sistemas se juntan; y la conexión de retroalimentación, en la que la salida de un sistema retroalimenta a su propia entrada a través de otro sistema. Cada uno de estos tipos de conexión puede reducirse a un solo bloque que contiene la función de transferencia del sistema combinado. Un diagrama de bloques más complejos puede reducirse de manera similar a un bloque, mediante la reducción sucesiva de cualquier conexión en serie, paralelo o retroalimentación en el diagrama de bloques a un bloque.

## PROBLEMAS

**6.1.** Determine la transformada de Laplace de las siguientes señales:

**(a)** $\cos(3t)u(t)$

**(b)** $e^{-10t}u(t)$

**(c)** $e^{-10t}\cos(3t)u(t)$

**(d)** $e^{-10t}\cos(3t - 1)u(t)$

**(e)** $(2 - 2e^{-4t})u(t)$

**(f)** $(t - 1 + e^{-10t}\cos(4t - \pi/3))u(t)$

**6.2.** Una señal de tiempo continuo $x(t)$ tiene la transformada de Laplace

$$X(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 5s + 7}$$

Determine la transformada de Laplace, $V(s)$, de las siguientes señales:

**(a)** $v(t) = x(3t - 4)u(3t - 4)$

**(b)** $v(t) = tx(t)$

**(c)** $v(t) = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$

**(d)** $v(t) = \displaystyle\int_0^t x(\tau)\, d\tau$

**(e)** $v(t) = x(t)\,\text{sen}\, 2t$

**(f)** $v(t) = e^{-3t}x(t)$

**(g)** $v(t) = x(t) * x(t)$

**6.3.** Calcule la transformada de Laplace de cada una de las señales que aparecen en la figura P6.3.

**6.4.** Utilizando los pares de transformadas de la tabla 6.2, y las propiedades de la transformada de Laplace de la tabla 6.1, determine la transformada de Laplace de las siguientes señales:

**(a)** $x(t) = (e^{-bt}\cos^2\omega t)u(t)$

**(b)** $x(t) = (e^{-bt}\,\text{sen}^2\omega t)u(t)$

**(c)** $x(t) = (t\cos^2\omega t)u(t)$

**(d)** $x(t) = (t\,\text{sen}^2\omega t)u(t)$

**(e)** $x(t) = (\cos^3\omega t)u(t)$

**(f)** $x(t) = (\text{sen}^3\omega t)u(t)$

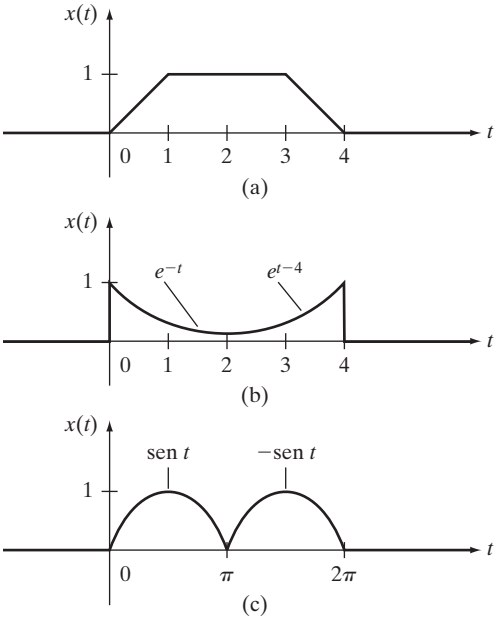



**FIGURA P6.3**

**(g)** $x(t) = (t^2 \cos \omega t)u(t)$

**(h)** $x(t) = (t^2 \operatorname{sen} \omega t)u(t)$

**6.5.** Determine los valores finales $[\lim_{t\to\infty} x(t)]$ de cada una de las señales cuyas transformadas de Laplace presentamos a continuación. Si no hay valor final, explique por qué. No intente calcular las transformadas inversas de Laplace.

**(a)** $X(s) = \dfrac{4}{s^2 + s}$

**(b)** $X(s) = \dfrac{3s + 4}{s^2 + s}$

**(c)** $X(s) = \dfrac{4}{s^2 - s}$

**(d)** $X(s) = \dfrac{3s^2 + 4s + 1}{s^3 + 2s^2 + s + 2}$

**(e)** $X(s) = \dfrac{3s^2 + 4s + 1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 2}$

**(f)** $X(s) = \dfrac{3s^2 + 4s + 1}{s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s}$

**6.6.** Determine los valores iniciales $x(0)$ para cada una de las señales cuyas transformadas están dadas en el problema 6.5.

**6.7.** Una señal $x(t)$ que es cero para toda $t < 0$ se repite cada $T$ segundos para $t \geq 0$; es decir, $x(t + T) = x(t)$ para toda $t \geq 0$. Sea $x_0(t) = x(t)[u(t) - u(t - T)]$, y suponga que la transformada de Laplace de $x_0(t)$ es $X_0(s)$. Deduzca una expresión de forma cerrada para la transformada de Laplace $X(s)$ de $x(t)$, en términos de $X_0(s)$.

**6.8.** Mediante la transformada de Laplace, calcule la convolución $x(t)*v(t)$, donde aplican las siguientes condiciones:

**(a)** $x(t) = e^{-t}u(t), v(t) = (\text{sen } t)u(t)$

**(b)** $x(t) = (\cos t)u(t), v(t) = (\text{sen } t)u(t)$

**(c)** $x(t) = (\text{sen } t)u(t), v(t) = (t \text{ sen } t)u(t)$

**(d)** $x(t) = (\text{sen}^2 t)u(t), v(t) = tu(t)$

**6.9.** Sea $p$ un número complejo dado por $p = \sigma + j\omega$. Utilice la fórmula de Euler e identidades trigonométricas para demostrar la siguiente expresión:

$$ce^{pt} + \bar{c}e^{\bar{p}t} = 2|c|e^{\sigma t}\cos(\omega t + \angle c)$$

**6.10.** Determine la transformada inversa de Laplace de cada una de las siguientes funciones. Calcule de manera analítica la expansión en fracciones parciales para cada caso. Puede utilizar el comando de MATLAB `residue` para comprobar sus respuestas a los incisos (a) a (e).

**(a)** $X(s) = \dfrac{s + 2}{s^2 + 7s + 12}$

**(b)** $X(s) = \dfrac{s + 1}{s^3 + 5s^2 + 7s}$

**(c)** $X(s) = \dfrac{2s^2 - 9s - 35}{s^2 + 4s + 2}$

**(d)** $X(s) = \dfrac{3s^2 + 2s + 1}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}$

**(e)** $X(s) = \dfrac{s^2 + 1}{s^5 + 18s^3 + 81s}$

**(f)** $X(s) = \dfrac{s + e^{-s}}{s^2 + s + 1}$

**(g)** $X(s) = \dfrac{s}{s + 1} + \dfrac{se^{-s} + e^{-2s}}{s^2 + 2s + 1}$

**6.11.** Calcule la transformada inversa de Laplace de las señales definidas en el problema 6.10, utilizando Symbolic Math Toolbox. Grafique los resultados, y compárelos con los que encontró de manera analítica en el problema 6.10.

**6.12.** Determine la transformada inversa de Laplace para cada una de las siguientes funciones. Calcule de manera analítica la expansión en fracciones parciales para cada caso. Puede utilizar `residue` para verificar sus respuestas a los incisos (a) a (h).

**(a)** $X(s) = \dfrac{s^2 - 2s + 1}{s(s^2 + 4)}$

**(b)** $X(s) = \dfrac{s^2 - 2s + 1}{s(s^2 + 4)^2}$

**(c)** $X(s) = \dfrac{s^2 - 2s + 1}{s^2(s^2 + 4)}$

**(d)** $X(s) = \dfrac{s^2 - 2s + 1}{s^2(s^2 + 4)^2}$

**(e)** $X(s) = \dfrac{s^2 - 2s + 1}{(s + 2)^2 + 4}$

**(f)** $X(s) = \dfrac{s^2 - 2s + 1}{s[(s + 2)^2 + 4]}$

**(g)** $X(s) = \dfrac{s^2 - 2s + 1}{[(s + 2)^2 + 4]^2}$

**(h)** $X(s) = \dfrac{s^2 - 2s + 1}{s[(s + 2)^2 + 4]^2}$

**(i)** $X(s) = \dfrac{1}{s + se^{-s}}$

**(j)** $X(s) = \dfrac{1}{(s + 1)(1 + e^{-s})}$

**6.13.** Calcule la transformada inversa de Laplace de las señales definidas en el problema 6.12, utilizando Symbolic Math Toolbox. Grafique los resultados y compárelos con los que encontró de manera analítica en el problema 6.12.

**6.14.** Utilice las transformadas de Laplace para calcular la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales:

**(a)** $\dfrac{dy}{dt} + 2y = u(t), \quad y(0) = 0$

**(b)** $\dfrac{dy}{dt} - 2y = u(t), \quad y(0) = 1$

**(c)** $\dfrac{dy}{dt} + 10y = 4\,\text{sen}(2t)u(t), \quad y(0) = 1$

**(d)** $\dfrac{dy}{dt} + 10y = 8e^{-10t}u(t), \quad y(0) = 0$

**(e)** $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 6\dfrac{dy}{dt} + 8y = u(t), \quad y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1$

**(f)** $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 6\dfrac{dy}{dt} + 9y = \text{sen}(2t)u(t), \quad y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0$

**(g)** $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 6\dfrac{dy}{dt} + 13y = u(t), \quad y(0) = 1, \dot{y}(0) = 1$

**6.15.** Un sistema de tiempo continuo está dado por la ecuación diferencial de entrada y salida

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t - 2)$$

**(a)** Calcule la función de transferencia del sistema, $H(s)$.
**(b)** Calcule la respuesta al impulso $h(t)$.
**(c)** Calcule la respuesta al escalón.
**(d)** Demuestre los resultados de (*b*) y (*c*) mediante simulación, utilizando `lsim` (o `step` e `impulse`) o Simulink.

**6.16.** Un sistema de tiempo continuo está dado por la ecuación diferencial de entrada y salida

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 2\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 4\frac{dx(t)}{dt} - x(t)$$

En cada uno de los siguientes incisos, calcule la respuesta $y(t)$ para toda $t \geq 0$.
**(a)** $y(0^-) = -2, \dot{y}(0^-) = 1, x(t) = 0$ para toda $t \geq 0^-$.
**(b)** $y(0^-) = 0, \dot{y}(0^-) = 0, x(t) = \delta(t), \delta(t) =$ impulso unitario
**(c)** $y(0^-) = 0, \dot{y}(0^-) = 0, x(t) = u(t)$
**(d)** $y(0^-) = -2, \dot{y}(0^-) = 1, x(t) = u(t)$
**(e)** $y(0^-) = -2, \dot{y}(0^-) = 1, x(t) = u(t + 1)$

**6.17.** Considere el motor de cd controlado por campo que aparece en la figura P6.17. La ecuación diferencial de entrada y salida del motor es

$$IL_f\frac{d^3y(t)}{dt^3} + (k_dL_f + R_fI)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + R_fk_d\frac{dy(t)}{dt} = kx(t)$$

donde la entrada $x(t)$ es el voltaje aplicado al devanado de campo y la salida $y(t)$ es el ángulo del eje del motor y la carga, $I$ es el momento de inercia del motor y la carga, $k_d$ es el coeficiente de fricción viscosa del motor y la carga, y $k$ es una constante.

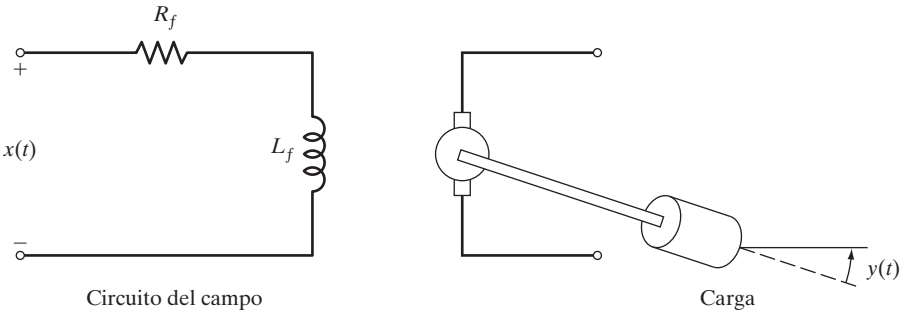



**FIGURA P6.17**

**(a)** Determine la función de transferencia del sistema.
**(b)** Encuentre la respuesta al impulso del sistema $h(t)$.

**6.18.** Considere el sistema de un solo ojo que estudiamos en el problema 2.35. El modelo para el movimiento del ojo está dado por las ecuaciones

$$T_e\frac{d\theta_E(t)}{dt} + \theta_E(t) = R(t)$$

$$R(t) = b\theta_T(t - d) - b\theta_T(t - d - c) + \theta_T(t - d)$$

donde la entrada es la posición angular del objetivo $\theta_T(t)$ y la salida es la posición angular del ojo $\theta_E(t)$ (vea la figura P2.35).

**(a)** Determine la función de transferencia del sistema $H(s)$.
**(b)** Encuentre la respuesta al impulso del sistema $h(t)$.
**(c)** Mediante la representación de la función de transferencia, calcule $\theta_E(t)$ para toda $t > 0$, cuando $\theta_T(t) = Au(t)$ y $\theta_E(0) = 0$.
**(d)** Repita el inciso (c), cuando $\theta_T(t) = Atu(t)$ y $\theta_E(0) = 0$.
**(e)** Grafique la salida $\theta_E(t)$ que encontró en los incisos (c) y (d), suponiendo que $T_e = c = 0.1, d = 0.2, A = 1$, y $b = 0.58$. ¿El ojo ubica al objetivo? Explique sus resultados.

**6.19.** Como se explica en McClamroch [1980], las siguientes ecuaciones describen la ingestión y metabolización de una droga en un humano

$$\frac{dq(t)}{dt} = -k_1q(t) + x(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = k_1q(t) - k_2y(t)$$

donde la entrada $x(t)$ es la velocidad de ingestión de la droga, la salida $y(t)$ es la masa de la droga en el torrente sanguíneo, y $q(t)$ es la masa de la droga en el tracto gastrointestinal. Las constantes $k_1$ y $k_2$ son las velocidades de metabolización que satisfacen la desigualdad $k_1 > k_2 > 0$. La constante $k_2$ caracteriza el proceso excretor del individuo.

**(a)** Determine la función de transferencia $H(s)$.

**(b)** Determine la respuesta al impulso $h(t)$. Suponga que $k_1 \neq k_2$.

**(c)** Utilizando la transformada de Laplace, calcule $y(t)$ para $t > 0$, cuando $x(t) = 0$ para $t \geq 0$, $q(0) = M_1$ y $y(0) = M_2$. Suponga que $k_1 \neq k_2$.

**(d)** Grafique la respuesta del inciso (c), suponiendo que $M_1 = 100$ mg, $M_2 = 10$ mg, $k_1 = 0.05$, y $k_2 = 0.02$. ¿Su resultado "tiene sentido"? Explique.

**(e)** Utilizando la transformada de Laplace, calcule $y(t)$ para $t > 0$, cuando $x(t) = e^{-at}u(t)$, $q(0) = y(0) = 0$. Suponga que $a \neq k_1 \neq k_2$.

**(f)** Grafique la respuesta del inciso (e), suponiendo que $a = 0.1$, $k_1 = 0.05$, y $k_2 = 0.02$. ¿Cuándo es que la masa de la droga en el torrente sanguíneo es igual a su máximo valor? ¿Cuándo es que la masa de la droga en el tracto gastrointestinal es igual a su máximo valor?

**6.20.** Determine la función de transferencia del sistema masa/resorte del problema 2.23.

**6.21.** Para cada uno de los sistemas de tiempo continuo definidos a continuación, determine la función de transferencia $H(s)$ del sistema, si éste tiene una. Si no hay función de transferencia, diga por qué no.

**(a)** $\dfrac{dy(t)}{dt} + e^{-t}y(t) = x(t)$

**(b)** $\dfrac{dy(t)}{dt} + v(t) * y(t) = x(t)$, donde $v(t) = (\text{sen } t)u(t)$

**(c)** $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + \displaystyle\int_0^t y(\lambda)\, d\lambda = \frac{dx(t)}{dt} - x(t)$

**(d)** $\dfrac{dy(t)}{dt} = y(t) * x(t)$

**(e)** $\dfrac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = tx(t)$

**6.22.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo tiene la función de transferencia $H(s) = (s + 7)/(s^2 + 4)$. Deduzca una expresión para la respuesta de salida $y(t)$ en términos de $y(0^-)$, $\dot{y}(0^-)$, y la entrada $x(t)$. Suponga que $x(0^-) = 0$.

**6.23.** La entrada $x_1(t) = e^{-t}u(t)$ se aplica a un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo con cero condiciones iniciales $y(0)$ y $\dot{y}(0)$. La respuesta resultante es $y_1(t) = 3t + 2 - e^{-t}$, $t \geq 0$. Una segunda entrada $x_2(t) = e^{-2t}u(\text{t})$ se aplica al sistema con las *mismas* condiciones iniciales $y(0)$, $\dot{y}(0)$. La respuesta resultante es $y_2(t) = 2t + 2 - e^{-2t}$, $t \geq 0$. Calcule $y(0)$, $\dot{y}(0)$, y la respuesta al impulso $h(t)$ del sistema.

**6.24.** La entrada

$$x(t) = \begin{cases} \text{sen } t, & 0 \leq t \leq \pi \\ -\text{sen } t, & \pi \leq t \leq 2\pi \\ 0, & \text{cualquier otra } t \end{cases}$$

se aplica a un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo con cero condiciones iniciales en el sistema, en el tiempo $t = 0$. La respuesta resultante aparece en la figura P6.24. Determine la función de transferencia $H(s)$ del sistema.

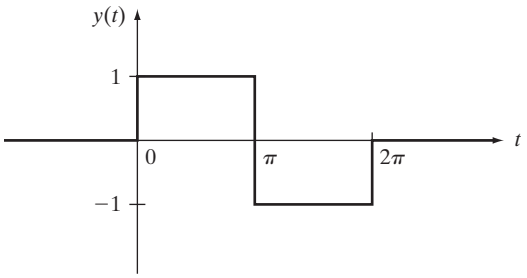



FIGURA P6.24

**6.25.** Mediante la representación en el dominio *s*, calcule las funciones de transferencia de los circuitos *RC* que aparecen en la figura P6.25.

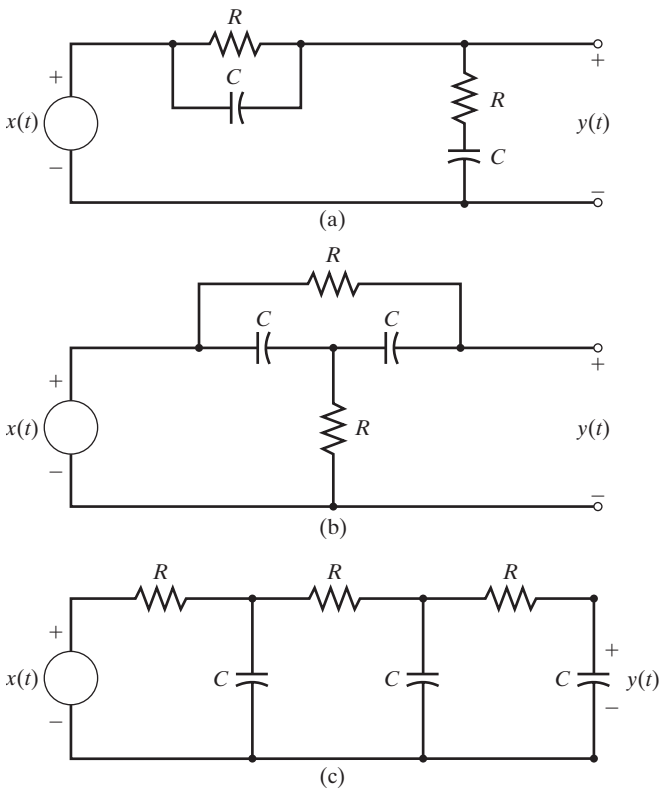



FIGURA P6.25

**6.26.** Mediante la representación en el dominio *s*, calcule las funciones de transferencia de los circuitos que aparecen en la figura P6.26.

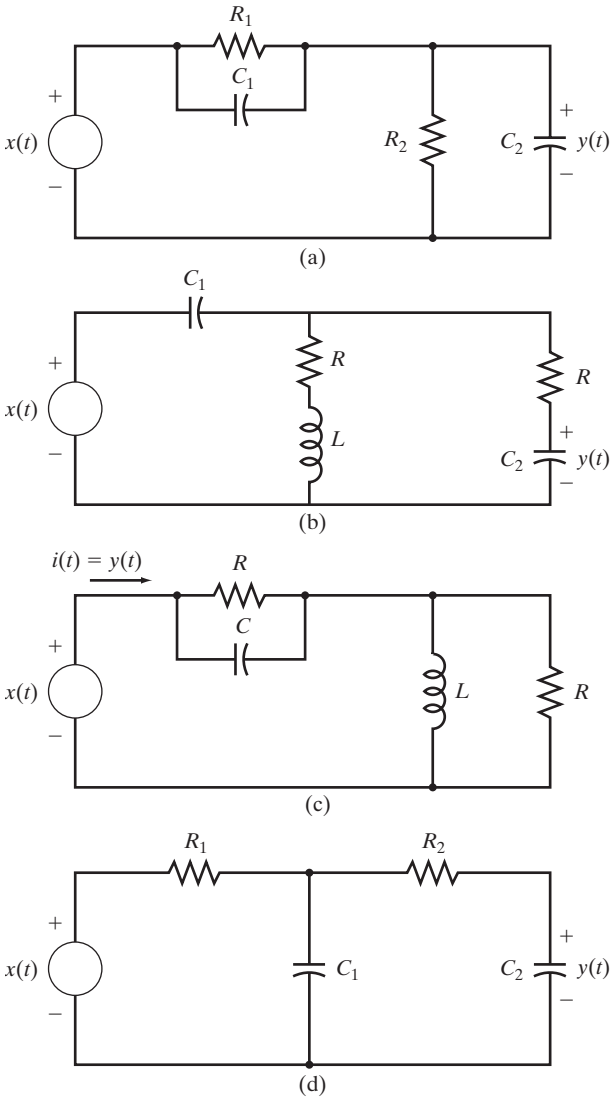



**FIGURA P6.26**

**6.27.** Para el circuito de la figura P6.26c, determine todos los valores de $R$, $L$ y $C$ tal que $H(s) = K$, donde $K$ es una constante.

**6.28.** Utilizando la representación en el dominio *s*, calcule la función de transferencia para el sistema desplegado en la figura P6.28.

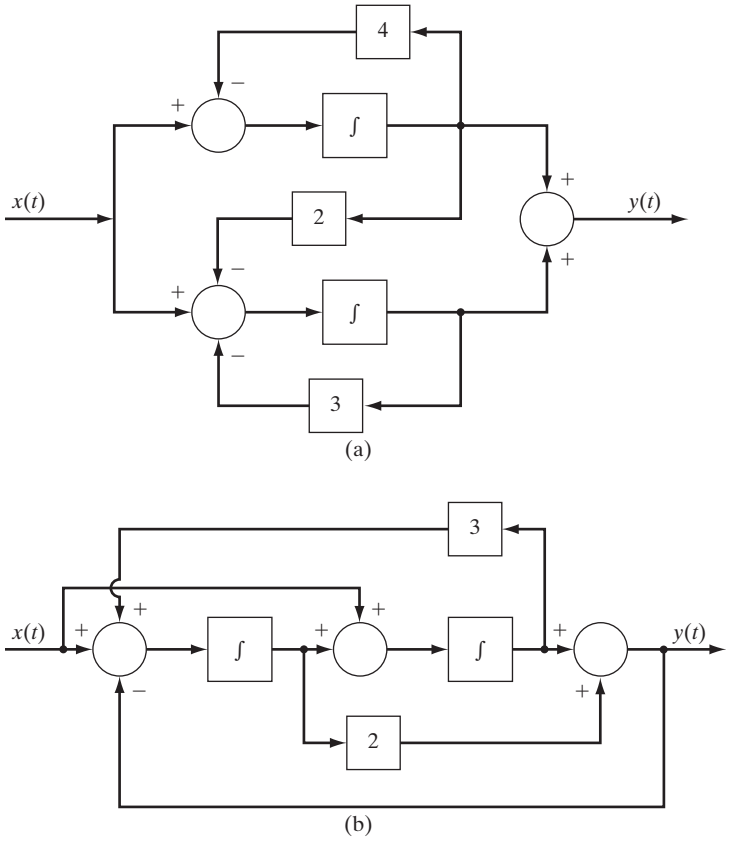



FIGURA P6.28

**6.29.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo tiene la respuesta al impulso $h(t) = [\cos 2t + 4 \operatorname{sen} 2t]u(t)$.

**(a)** Determine la función de transferencia $H(s)$ del sistema.

**(b)** Mediante la transformada de Laplace, calcule la respuesta de salida $y(t)$ cuando la entrada $x(t)$ es igual a $\frac{5}{7}e^{-t} - \frac{12}{7}e^{-8t}$ para $t \geq 0$, con cero condiciones iniciales en el sistema al tiempo $t = 0$.

**(c)** Con MATLAB, encuentre $y(t)$ mediante Symbolic Math Toolbox, y compare esta respuesta con la que encontró en el inciso (b).

**(d)** Utilice MATLAB para encontrar de manera numérica $y(t)$, ya sea con `lsim` o con Simulink, y compare la respuesta simulada con la respuesta encontrada de manera analítica en el inciso (b) o (c), graficando ambas respuestas.

**6.30.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo tiene la respuesta al impulso $h(t)$ dada por

$$h(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 \leq t \leq 2 \\ e^{t-4}, & 2 \leq t \leq 4 \\ 0, & \text{cualquier otra } t \end{cases}$$

**(a)** Determine la función de transferencia $H(s)$ del sistema.
**(b)** Mediante la transformada de Laplace, calcule la respuesta de salida $y(t)$ que resulta de la entrada $x(t) = (\text{sen } t)u(t)$, con cero condiciones iniciales.
**(c)** Con MATLAB, encuentre $y(t)$ mediante Symbolic Math Toolbox, y compare esta respuesta con la que encontró en el inciso (b).
**(d)** Utilice MATLAB para encontrar de manera numérica $y(t)$, ya sea con `lsim` o con Simulink, y compare la respuesta simulada con la respuesta encontrada de manera analítica en el inciso (b) o (c).

**6.31.** En este problema, el objetivo es diseñar el oscilador que muestra la figura P6.31. Utilizando dos integradores y restadores, sumadores, y multiplicadores escalares, diseñe el oscilador tal que cuando el interruptor se cierre en el tiempo $t = 0$, el voltaje de salida $v(t)$ sea sen $200t$, $t \geq 0$. Suponemos que la condición inicial del oscilador es cero al tiempo $t = 0$.

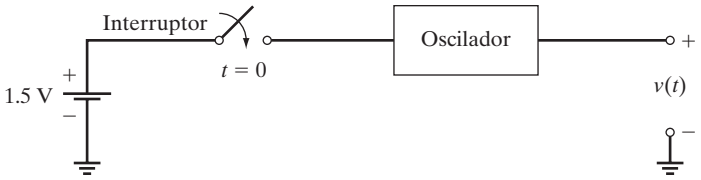



**FIGURA P6.31**

**6.32.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo tiene la respuesta al impulso $h(t)=[e^{-t}\cos(2t - 45°)]u(t) - tu(t)$. Determine la ecuación diferencial de entrada y salida del sistema.

**6.33.** Un sistema tiene la siguiente función de transferencia:

$$H(s) = \frac{s + 2}{(s + 1)^2 + 4}$$

Utilice Symbolic Math Toolbox para encontrar la respuesta a las siguientes entradas:
**(a)** $x(t) = \delta(t)$
**(b)** $x(t) = u(t)$
**(c)** $x(t) = u(t) - u(t - 5)$
**(d)** $x(t) = \text{sen}(2t)u(t)$

**6.34.** Repita el problema 6.33, pero utilice la simulación numérica para resolver $y(t)$. Puede utilizar Simulink o `lsim`.

CAPÍTULO

7

# La transformada z y los sistemas de tiempo discreto

Este capítulo analiza la transformada z, la cual es la contraparte de tiempo discreto de la transformada de Laplace. La transformada z opera sobre una señal de tiempo discreto $x[n]$, a diferencia de la transformada de Laplace, que opera sobre una señal analógica o de tiempo continuo $x(t)$. En las secciones 7.1 y 7.2 definimos la transformada z de una señal de tiempo discreto $x[n]$, y después estudiamos las propiedades básicas de la transformada z. En la sección 7.3 consideramos el cálculo de la transformada z inversa, y después en la sección 7.4 aplicamos la transformada z al estudio de los sistemas causales, lineales e invariantes en el tiempo discreto. Comenzamos el desarrollo en la sección 7.4 con la generación de la representación del dominio z, a partir de la ecuación diferencial de entrada y salida, y después generamos la representación de la función de transferencia aplicando la transformada z a la representación de la suma de convolución de entrada y salida de un sistema. En la sección 7.4 también estudiamos la función de transferencia de interconexiones que contienen elementos de retraso unitario e interconexiones de bloques; en la sección 7.5 utilizamos la representación de la función de transferencia en el estudio de la estabilidad y en el estudio del comportamiento de la respuesta en frecuencia de un sistema de tiempo discreto. La sección 7.6 presenta un resumen del capítulo.

La teoría de la transformada z y su aplicación a los sistemas causales, lineales e invariantes en el tiempo discreto se parecen mucho a la teoría de la transformada de Laplace y a su aplicación a los sistemas causales, lineales e invariantes de tiempo continuo. En particular, los resultados y las técnicas de este capítulo son muy parecidos a los resultados y a las técnicas que presentamos en los capítulos 6 y 8 sobre la transformada de Laplace. Sin embargo, existen algunas diferencias entre la teoría de la transformada en el caso de tiempo continuo y en el de tiempo discreto aunque, en su mayoría, éstas son mínimas. Al leer este capítulo y el 6 y 8, el lector debe buscar las similitudes y las diferencias entre ambos casos.

## 7.1 TRANSFORMADA z DE UNA SEÑAL DE TIEMPO DISCRETO

Dada una señal de tiempo discreto $x[n]$, recuerde que en el capítulo 4 definimos la transformada de Fourier de tiempo discreto (DTFT) como

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \tag{7.1}$$

Recuerde que $X(\Omega)$ es, en general, una función valuada en complejos de la variable frecuencia $\Omega$.

La transformada $z$ de la señal $x[n]$ se genera adicionando el factor $\rho^{-n}$ a la sumatoria en (7.1), donde $\rho$ es un número real. El factor $\rho^{-n}$ desempeña el mismo papel que el factor

exponencial $e^{-\sigma_t}$ que se añadió a la transformada de Fourier para generar la transformada de Laplace, en el caso de tiempo continuo. Si sustituimos $\rho^{-n}$ en (7.1) obtenemos

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\rho^{-n}e^{-j\Omega n} \tag{7.2}$$

que puede rescribirse como

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](\rho e^{j\Omega})^{-n} \tag{7.3}$$

La función $X(\Omega)$ dada por (7.3) es ahora una función del número complejo

$$z = \rho e^{j\Omega}$$

Entonces, $X$ debe escribirse como una función de $z$, lo que arroja

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \tag{7.4}$$

La función $X(z)$ dada por (7.4) es la *transformada z bilateral* de la señal de tiempo discreto $x[n]$. La transformada $z$ *unilateral* para $x[n]$, también denotada por $X(z)$, se define como

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \cdots \tag{7.5}$$

Como vimos de (7.5), la transformada $z$ unilateral es una serie de potencias de $z^{-1}$, cuyos coeficientes son los valores de la señal $x[n]$.

Observe que si $x[n] = 0$ para $n = -1, -2,\ldots$, las transformadas $z$ unilateral y bilateral son idénticas. La transformada $z$ unilateral puede aplicarse a señales $x[n]$ que son diferentes de cero para $n = -1, -2,\ldots$, pero ningún valor diferente de cero de $x[n]$ para $n < 0$ puede recuperarse a partir de la transformada $z$ unilateral. En este libro, sólo trataremos la transformada $z$ unilateral, y nos referiremos a ella como la transformada $z$.

Dada una señal de tiempo discreto $x[n]$ con transformada $z$, $X(z)$, al conjunto de todos los números complejos $z$, tal que la sumatoria del lado derecho de (7.5) converja (es decir, que exista), se le conoce como *región de convergencia* de la transformada $z$, $X(z)$. La transformada $z$, $X(z)$, existe (está bien definida) para cualquier valor de $z$ que pertenece a la región de convergencia.

---

### Ejemplo 7.1 Transformada z de un pulso unitario

Sea $\delta[n]$ quien denote el pulso unitario concentrado en $n = 0$, dado por

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

Debido a que $\delta[n]$ es cero para toda $n$, excepto $n = 0$, la transformada $z$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta[n]z^{-n} = \delta[0]z^{-0} = 1 \tag{7.6}$$

Entonces, la transformada $z$ del pulso unitario $\delta[n]$ es igual a 1. Además, es evidente que la sumatoria en (7.6) existe para cualquier valor de $z$ y, por lo tanto, la región de convergencia de la transformada $z$ del pulso unitario es el conjunto de todos los números complejos.

Observe que el pulso unitario $\delta[n]$ es la contraparte de tiempo discreto del impulso unitario $\delta(t)$, en el sentido en que la transformada $z$ de $\delta[n]$ es igual a 1, y la transformada de Laplace de $\delta(t)$ también es igual a 1. Sin embargo, como vimos en la sección 1.2, el pulso $\delta[n]$ no es una versión muestreada de $\delta(t)$.

### Ejemplo 7.2 Transformada z de un pulso desplazado

Dado un entero positivo $q$, considere el pulso unitario $\delta[n - q]$ ubicado en $n = q$. Por ejemplo, cuando $q = 2$, $\delta[n - 2]$ es el pulso que aparece en la figura 7.1. Para cualquier valor entero positivo de $q$, la transformada $z$ de $\delta[n - q]$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta[n - q]z^{-n} = \delta[0]z^{-q} = z^{-q} = \frac{1}{z^q}$$

La región de convergencia es el conjunto de todos los números complejos $z$, tal que $z$ no es cero.

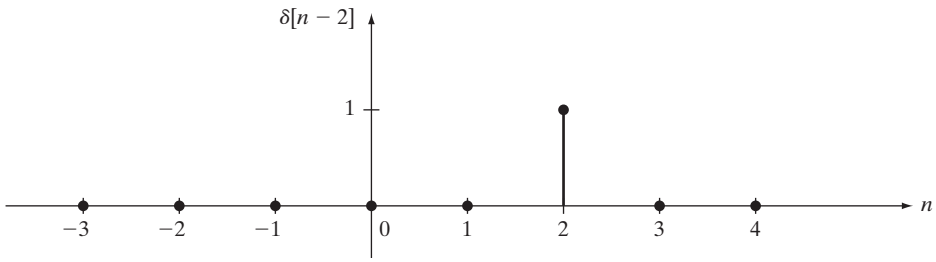



**FIGURA 7.1**
Pulso unitario $\delta[n - 2]$ ubicado en $n = 2$.

### Ejemplo 7.3 Función escalón unitario

Considere la función escalón unitario de tiempo discreto, $u[n]$, dada por

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, & n = -1, -2, \ldots \end{cases}$$

La transformada $z$, $U(z)$, e

$$\begin{aligned} U(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} u[n]z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\ &= 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots \end{aligned} \tag{7.7}$$

La transformada $U(z)$ puede expresarse como una función racional de $z$: al multiplicar ambos lados de (7.7) por $z - 1$, obtenemos

$$\begin{aligned}(z-1)U(z) &= (z + 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots) - (1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots) \\ &= z\end{aligned} \tag{7.8}$$

Al dividir ambos lados de (7.8) entre $z - 1$, obtenemos

$$U(z) = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \tag{7.9}$$

Observe que la forma de la transformada $z$, $U(z)$, de la función de tiempo discreto escalón unitario $u[n]$ es diferente de la forma de la transformada de Laplace $1/s$ de la función de tiempo continuo escalón unitario $u(t)$.

La región de convergencia para la transformada $z$, $U(z)$, dada por (7.9), incluye el conjunto de todos los números complejos $z$, tal que $|z| > 1$. Esto se desprende del resultado de que

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} (1) z^{-n} \right| < \infty \qquad \text{si } |z| > 1 \tag{7.10}$$

Para demostrar (7.10), primero observe que si utilizamos (4.5) (vea el problema 4.2), para cualquier entero positivo $q$ resulta

$$\sum_{n=0}^{q} z^{-n} = \frac{(1/z)^{q+1} - 1}{(1/z) - 1} \tag{7.11}$$

donde suponemos que $z \neq 1$. Entonces, al utilizar (7.11)

$$\left| \sum_{n=0}^{q} z^{-n} \right| = \left| \frac{(1/z)^{q+1} - 1}{(1/z) - 1} \right| \leq \frac{(1/|z|)^{q+1} + 1}{|(1/z) - 1|} \tag{7.12}$$

y con (7.12), si $|z| > 1$, obtenemos

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \right| = \lim_{q \to \infty} \left| \sum_{n=0}^{q} z^{-n} \right| \leq \frac{1}{|(1/z) - 1|} < \infty$$

Entonces, (7.10) queda demostrada.

---

### Ejemplo 7.4 Transformada z de $a^n u[n]$

Dado un número real o complejo $a$, sea $x[n] = a^n u[n]$. La transformada $z$, $X(z)$, de $x[n]$ está dada por

$$\begin{aligned}X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \\ &= 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \cdots\end{aligned} \tag{7.13}$$

Esta transformada también puede escribirse como una función racional de $z$: al multiplicar ambos lados de (7.13) por $z - a$ obtenemos

$$\begin{aligned}(z-a)X(z) &= (z + a + a^2 z^{-1} + a^3 z^{-2} + \cdots) - (a + a^2 z^{-1} + a^3 z^{-2} + \cdots) \\ &= z\end{aligned}$$

Entonces,

$$X(z) = \frac{z}{z - a} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \tag{7.14}$$

Observe que si $a = 1$, (7.14) es la misma que (7.9). La región de convergencia para la transformada $X(z) = z/(z - a)$ incluye el conjunto de todos los números complejos $z$, tal que $|z| > |a|$. Esto se desprende de un argumento similar al proporcionado en el ejemplo 7.3. Los detalles se los dejamos al lector.

### 7.1.1 Relación entre la DTFT y la transformada z

Como demostramos, la transformada $z$ $X(z)$ de una señal de tiempo discreto $x[n]$, puede considerarse como una generalización de la transformada de Fourier de tiempo discreto (DTFT) $X(\Omega)$. De hecho, si partimos de (7.5) vemos que

$$X(\Omega) = X(z)\big|_{z=e^{j\Omega}} \tag{7.15}$$

Sin embargo, (7.15) *no es válida* en general, a menos que la región de convergencia de $X(z)$ incluya a todos los números complejos $z$, tal que $|z| = 1$. Si éste es el caso, la DTFT $X(\Omega)$ de $x[n]$ está dada por (7.15). Por ejemplo, suponga que $x[n] = a^n u[n]$, donde $a$ es un número real o complejo. En el ejemplo 7.4 mostramos que la transformada $z$ de $x[n]$ es $X(z) = z/(z - a)$, y que la región de convergencia de la transformada $z$ incluye al conjunto de todos los números complejos $z$, tal que $|z| > |a|$. Entonces, si $|a| < 1$, la DTFT de $x[n]$ existe (en el sentido ordinario), y está dada por

$$X(\Omega) = X(z)\big|_{z=e^{j\Omega}} = \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - a} = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} \tag{7.16}$$

Dada una señal $x[n]$ con la transformada $z$, $X(z)$, la notación del par de transformadas

$$x[n] \leftrightarrow X(z)$$

algunas veces se utilizará para denotar el hecho de que $X(z)$ es la transformada $z$ de $x[n]$ y, por otro lado, que $x[n]$ es la transformada inversa de $X(z)$. Los pares de transformadas derivados en los ejemplos anteriores aparecen en la tabla 7.1.

Como muestra la tabla 7.1, en ocasiones la transformada $z$ puede expresarse como una razón de polinomios en $z$ o $z^{-1}$. En este libro, preferimos expresar la transformada $z$ en términos de potencias positivas de $z$, lo opuesto a sus potencias negativas.

**TABLA 7.1** Pares básicos de transformadas $z$

| |
|---|
| $\delta[n] \leftrightarrow 1$ |
| $\delta[n - q] \leftrightarrow \frac{1}{z^q} = z^{-q}$ |
| $u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z - 1} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$ |
| $a^n u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z - a} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$, $a$ real o complejo |

## 7.2 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA Z

La transformada $z$ posee características que son útiles para deducir pares de transformadas, y en la aplicación de la transformada para el estudio de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo discreto. Estas propiedades son muy parecidas a las propiedades de la transformada de Laplace que vimos en la sección 6.2. En esta sección establecemos y demostramos las propiedades de la transformada $z$. Como ejemplo del uso de las propiedades, generaremos una colección de pares comunes de transformadas a partir del conjunto básico de pares dados en la tabla 7.1.

### 7.2.1 Linealidad

La transformada $z$ es una operación lineal, como la transformada de Laplace. Por lo tanto, si $x[n] \leftrightarrow X(z)$ y $v[n] \leftrightarrow V(z)$, entonces para cualesquiera escalares reales o complejos $a, b$,

$$ax[n] + bv[n] \leftrightarrow aX(z) + bV(z) \tag{7.17}$$

La demostración de (7.17) se desprende directamente de la definición de la transformada $z$. Omitimos los detalles.

---

**Ejemplo 7.5 Linealidad**

Sean $x[n] = u[n]$ y $v[n] = a^n u[n]$, donde $a \neq 1$. De la tabla 7.1,

$$u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-1} \quad \text{y} \quad a^n u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-a}$$

Entonces, por linealidad,

$$u[n] + a^n u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-a} = \frac{2z^2 - (1+a)z}{(z-1)(z-a)}$$

---

### 7.2.2 Desplazamiento por la derecha de $x[n]u[n]$

Suponga que $x[n] \leftrightarrow X(z)$. Dado un entero positivo $q$, considere la señal de tiempo discreto $x[n-q]u[n-q]$, que es el desplazamiento de $q$ pasos por la derecha de $x[n]u[n]$. Entonces,

$$x[n-q]u[n-q] \leftrightarrow z^{-q}X(z) \tag{7.18}$$

Para demostrar esta propiedad, primero observe que por definición de la transformada $z$,

$$x[n-q]u[n-q] \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x[n-q]u[n-q]z^{-n}$$

Entonces, debido a que $u[n-q] = 1$, para $n \geq q$ y $u[n-q] = 0$, para $n < q$,

$$x[n-q]u[n-q] \leftrightarrow \sum_{n=q}^{\infty} x[n-q]z^{-n} \tag{7.19}$$

Considere un cambio en el índice de la sumatoria en (7.19): con $\bar{n} = n - q$, tal que $n = \bar{n} + q$, entonces $\bar{n} = 0$ cuando $n = q$, y $\bar{n} = \infty$ cuando $n = \infty$. Entonces, vemos que

$$\sum_{n=q}^{\infty} x[n-q]z^{-n} = \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} x[\bar{n}]z^{-(\bar{n}+q)}$$

$$= z^{-q} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} x[\bar{n}]z^{-\bar{n}}$$

$$= z^{-q}X(z)$$

Por lo tanto, al combinar esto con (7.19) obtenemos el par de transformadas (7.18).

---

**Ejemplo 7.6 Transformada z de un pulso**

Dado un entero positivo $q$, el objetivo es determinar la transformada $z$ del pulso $p[n]$ definido por

$$p[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, 2, \ldots, q-1 \\ 0, & \text{cualquier otra } n \end{cases}$$

Al escribir $p[n]$ en términos de la función escalón unitario $u[n]$, obtenemos

$$p[n] = u[n] - u[n-q]$$

De la tabla 7.1, vemos que la transformada $z$ de $u[n]$ es $z/(z-1)$ y, entonces, por la propiedad de desplazamiento por la derecha (7.18), la transformada $z$ de $u[n-q]$ es igual a

$$z^{-q}\frac{z}{z-1} = \frac{z^{-q+1}}{z-1}$$

Por lo tanto, por linealidad, la transformada $z$ del pulso $p[n]$ es

$$\frac{z}{z-1} - \frac{z^{-q+1}}{z-1} = \frac{z(1-z^{-q})}{z-1} = \frac{z^q - 1}{z^{q-1}(z-1)}$$

---

### 7.2.3 Desplazamiento por la derecha de *x*[*n*]

Suponga que $x[n] \leftrightarrow X(z)$. Entonces

$$x[n-1] \leftrightarrow z^{-1}X(z) + x[-1] \tag{7.20}$$

$$x[n-2] \leftrightarrow z^{-2}X(z) + x[-2] + z^{-1}x[-1] \tag{7.21}$$

$$\vdots$$

$$x[n-q] \leftrightarrow z^{-q}X(z) + x[-q] + z^{-1}x[-q+1] + \cdots + z^{-q+1}x[-1] \tag{7.22}$$

Observe que si $x[n] = 0$ para $n = -1, -2, \ldots, -q$, el par de transformadas (7.22) se reduce a

$$x[n - q] \leftrightarrow z^{-q}X(z) \tag{7.23}$$

que es idéntico al par de transformadas (7.18).

Para demostrar el par de transformadas (7.20), primero observe que por definición de la transformada $z$,

$$x[n - 1] \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x[n - 1]z^{-n} \tag{7.24}$$

Al definir el cambio de índice $\bar{n} = n - 1$ en la sumatoria de (7.24) tenemos

$$x[n - 1] \leftrightarrow \sum_{\bar{n}=-1}^{\infty} x[\bar{n}]z^{-(\bar{n}+1)} = \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} x[\bar{n}]z^{-(\bar{n}+1)} + x[-1]$$

$$\leftrightarrow z^{-1} \sum_{\bar{n}=0}^{\infty} x[\bar{n}]z^{-\bar{n}} + x[-1]$$

$$\leftrightarrow z^{-1}X(z) + x[-1]$$

Por lo tanto, el par de transformadas (7.20) queda demostrado. La demostración de (7.21) y (7.22) para $q > 2$ puede demostrarse de manera similar. Los detalles los dejamos para el lector interesado.

### 7.2.4 Desplazamiento en el tiempo por la izquierda

En contraste con la transformada de Laplace, la transformada $z$ tiene una propiedad de desplazamiento por la izquierda, de la siguiente manera. Dada una señal de tiempo discreto $x[n]$ y un entero positivo $q$, el desplazamiento de $q$ pasos por la izquierda de $x[n]$, es la señal $x[n + q]$. Ahora suponga que $x[n] \leftrightarrow X(z)$. Entonces,

$$x[n + 1] \leftrightarrow zX(z) - x[0]z \tag{7.25}$$

$$x[n + 2] \leftrightarrow z^2X(z) - x[0]z^2 - x[1]z \tag{7.26}$$

$$\vdots$$

$$x[n + q] \leftrightarrow z^qX(z) - x[0]z^q - x[1]z^{q-1} - \cdots - x[q - 1]z \tag{7.27}$$

Para demostrar (7.25), primero observe que

$$x[n + 1] \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x[n + 1]z^{-n} \tag{7.28}$$

Al definir el cambio de índice $\bar{n} = n + 1$ en la sumatoria (7.28) tenemos

$$\begin{aligned} x[n+1] &\leftrightarrow \sum_{\bar{n}=1}^{\infty} x[\bar{n}]z^{-(\bar{n}-1)} \\ &\leftrightarrow z\sum_{\bar{n}=1}^{\infty} x[\bar{n}]z^{-\bar{n}} = z\left[\sum_{\bar{n}=0}^{\infty} x[\bar{n}]z^{-\bar{n}} - x[0]\right] \\ &\leftrightarrow z[X(z) - x[0]] \end{aligned}$$

Por lo tanto, (7.25) queda demostrada.

---

**Ejemplo 7.7 Desplazamiento por la izquierda de la función escalón unitario**

Considere el desplazamiento por la izquierda de un paso, $u[n + 1]$ de la función escalón unitario $u[n]$de tiempo discreto. Mediante la propiedad de desplazamiento por la izquierda (7.25), la transformada $z$ de $u[n + 1]$ es igual a

$$zU(z) - u[0]z = \frac{z^2}{z-1} - z = \frac{z^2 - z(z-1)}{z-1} = \frac{z}{z-1}$$

Entonces, la transformada $z$ de $u[n + 1]$ es igual a la transformada $z$ de $u[n]$. Este resultado no es inesperado, ya que $u[n + 1] = u[n]$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$.

---

### 7.2.5 Multiplicación por $n$ y $n^2$

Si $x[n] \leftrightarrow X(z)$, entonces

$$nx[n] \leftrightarrow -z\frac{d}{dz}X(z) \tag{7.29}$$

y

$$n^2x[n] \leftrightarrow z\frac{d}{dz}X(z) + z^2\frac{d^2}{dz^2}X(z) \tag{7.30}$$

Para demostrar (7.29), primero recuerde la definición de la transformada $z$:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \tag{7.31}$$

Si tomamos la derivada de ambos lados de (7.31) respecto a $z$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-n)x[n]z^{-n-1} \\ &= -z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} nx[n]z^{-n} \end{aligned} \tag{7.32}$$

Por lo tanto,

$$-z\frac{d}{dz}X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nx[n]z^{-n} \tag{7.33}$$

Ahora, el lado derecho de (7.33) es igual a la transformada $z$ de la señal $nx[n]$, y entonces (7.29) queda demostrada. Si tomamos la segunda derivada de $X(z)$ respecto a $z$, demostramos (7.30). Dejamos los detalles al lector.

---

**Ejemplo 7.8 Transformada z de $na^n u[n]$**

Sea $x[n] = a^n u[n]$, donde $a$ es cualquier número real o complejo diferente de cero. De la tabla 7.1 vemos que

$$X(z) = \frac{z}{z - a}$$

Entonces,

$$z\frac{d}{dz}X(z) = z\left[\frac{-z}{(z-a)^2} + \frac{1}{z-a}\right] = \frac{-az}{(z-a)^2}$$

lo que arroja el par de transformadas

$$na^n u[n] \leftrightarrow \frac{az}{(z-a)^2} \tag{7.34}$$

Observe que cuando $a = 1$, (7.34) se vuelve

$$nu[n] \leftrightarrow \frac{z}{(z-1)^2} \tag{7.35}$$

---

**Ejemplo 7.9 Transformada z de $n^2a^n u[n]$**

Para calcular la transformada $z$ de la señal $n^2a^n u[n]$, primero establezcamos $x[n] = a^n u[n]$, tal que $X(z) = z/(z - a)$. Entonces,

$$\frac{d^2}{dz^2}X(z) = \frac{2a}{(z-a)^3}$$

y por lo tanto, si utilizamos los resultados del ejemplo 7.8 y el par de transformadas (7.30) tenemos

$$\begin{aligned} n^2a^n u[n] &\leftrightarrow \frac{-az}{(z-a)^2} + \frac{2az^2}{(z-a)^3} \\ &\leftrightarrow \frac{az(z+a)}{(z-a)^3} \end{aligned} \tag{7.36}$$

Si establecemos $a = 1$ en (7.36) obtenemos el par de transformadas

$$n^2 u[n] \leftrightarrow \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \tag{7.37}$$

---

### 7.2.6 Multiplicación por $a^n$

Si $x[n] \leftrightarrow X(z)$, entonces para cualquier número real o complejo diferente de cero $a$,

$$a^n x[n] \leftrightarrow X\left(\frac{z}{a}\right) \tag{7.38}$$

Por (7.38), la multiplicación por $a^n$ en el dominio del tiempo corresponde a escalar a la variable $z$ en el dominio de la transformada. Para demostrar (7.38), observe que

$$a^n x[n] \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a^n x[n] z^{-n}$$

$$\leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

---

**Ejemplo 7.10 Transformada z de $a^n p[n]$**

Sea $p[n]$ quien denote el pulso definido por $p[n] = u[n] - u[n - q]$, donde $q$ es un entero positivo. En el ejemplo 7.6, vimos que la transformada $z$ del pulso era

$$\frac{z(1 - z^{-q})}{z - 1}$$

Entonces, si utilizamos (7.38) obtenemos el par de transformadas

$$a^n p[n] \leftrightarrow \frac{(z/a)[1 - (z/a)^{-q}]}{(z/a) - 1}$$

$$\leftrightarrow \frac{z(1 - a^q z^{-q})}{z - a}$$

---

### 7.2.7 Multiplicación por cos $\Omega n$ y sen $\Omega n$

Si $x[n] \leftrightarrow X(z)$, entonces para cualquier número positivo real $\Omega$,

$$(\cos \Omega n) x[n] \leftrightarrow \frac{1}{2}[X(e^{j\Omega} z) + X(e^{-j\Omega} z)] \tag{7.39}$$

y

$$(\text{sen } \Omega n) x[n] \leftrightarrow \frac{j}{2}[X(e^{j\Omega} z) - X(e^{-j\Omega} z)] \tag{7.40}$$

Para demostrar (7.39) y (7.40), primero observe que al utilizar la fórmula de Euler tenemos que

$$(\cos \Omega n) x[n] = \frac{1}{2}[e^{-j\Omega n} x[n] + e^{j\Omega n} x[n]] \tag{7.41}$$

$$(\text{sen } \Omega n) x[n] = \frac{j}{2}[e^{-j\Omega n} x[n] - e^{j\Omega n} x[n]] \tag{7.42}$$

Por (7.38),

$$e^{-j\Omega n} x[n] \leftrightarrow X(e^{j\Omega} z) \quad \text{y} \quad e^{j\Omega n} x[n] \leftrightarrow X(e^{-j\Omega} z) \tag{7.43}$$

Entonces, utilizando (7.43) con (7.41) y (7.42), obtenemos (7.39) y (7.40).

### Ejemplo 7.11 Transformada z de sinusoides

Sea $v[n] = (\cos\Omega n)u[n]$. Con $x[n]$ igual al escalón unitario $u[n]$, $X(z) = z/(z-1)$, y al utilizar (7.39) tenemos

$$\begin{aligned}(\cos \Omega n)u[n] &\leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{e^{j\Omega}z}{e^{j\Omega}z - 1} + \frac{e^{-j\Omega}z}{e^{-j\Omega}z - 1}\right)\\ &\leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{e^{j\Omega}z(e^{-j\Omega}z - 1) + e^{-j\Omega}z(e^{j\Omega}z - 1)}{(e^{j\Omega}z - 1)(e^{-j\Omega}z - 1)}\right]\\ &\leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{z^2 - e^{j\Omega}z + z^2 - e^{-j\Omega}z}{z^2 - (e^{j\Omega} + e^{-j\Omega})z + 1}\right]\\ &\leftrightarrow \frac{z^2 - (\cos \Omega)z}{z^2 - (2\cos \Omega)z + 1}\end{aligned} \tag{7.44}$$

De modo similar, si utilizamos (7.40) obtenemos el par de transformadas

$$(\text{sen } \Omega n)u[n] \leftrightarrow \frac{(\text{sen } \Omega)z}{z^2 - (2\cos \Omega)z + 1} \tag{7.45}$$

### Ejemplo 7.12 $a^n$ veces un sinusoide

Ahora sea $v[n] = a^n(\cos\Omega n)u[n]$. Podemos calcular la transformada $z$ de $v[n]$ si establecemos $x[n] = a^n u[n]$ y utilizamos la propiedad de multiplicación por $\cos \Omega n$. Sin embargo, es fácil establecer $x[n]$ igual a $(\cos \Omega n)u[n]$ y después aplicar la propiedad de multiplicación por $a^n$. Si utilizamos (7.38) y el par de transformadas (7.44) obtenemos

$$\begin{aligned}a^n(\cos \Omega n)u[n] &\leftrightarrow \frac{(z/a)^2 - (\cos \Omega)(z/a)}{(z/a)^2 - (2\cos \Omega)(z/a) + 1}\\ &\leftrightarrow \frac{z^2 - (a\cos \Omega)z}{z^2 - (2a\cos \Omega)z + a^2}\end{aligned} \tag{7.46}$$

Al utilizar (7.38) y el par de transformadas (7.45) resulta en el par de transformadas

$$a^n(\text{sen } \Omega n)u[n] \leftrightarrow \frac{(a \text{ sen } \Omega)z}{z^2 - (2a\cos \Omega)z + a^2} \tag{7.47}$$

## 7.2.8 Sumatoria

Dada la señal de tiempo discreto $x[n]$ con $x[n] = 0$ para $n = -1, -2, \ldots$, sea $v[n]$ quien denote la suma de $x[n]$, definida por

$$v[n] = \sum_{i=0}^{n} x[i] \tag{7.48}$$

Para deducir una expresión para la transformada $z$ de $v[n]$, primero observe que $v[n]$ puede expresarse de la forma

$$v[n] = \sum_{i=0}^{n-1} x[i] + x[n]$$

y al utilizar la definición (7.48) de $v[n]$ tenemos

$$v[n] = v[n-1] + x[n] \tag{7.49}$$

Entonces, si tomamos la transformada $z$ de ambos lados de (7.49) y utilizamos la propiedad de desplazamiento por la derecha tenemos

$$V(z) = z^{-1}V(z) + X(z)$$

y al resolver para $V(z)$ obtenemos

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{1}{1 - z^{-1}} X(z) \\ &= \frac{z}{z-1} X(z) \end{aligned} \tag{7.50}$$

Por lo tanto, la transformada $z$ de la suma de una señal $x[n]$ es igual a $z/(z-1)$ veces la transformada $z$ de la señal.

---

**Ejemplo 7.13 Transformada z de $(n+1)u[n]$**

Sea $x[n] = u[n]$. Entonces la suma es

$$v[n] = \sum_{i=0}^{n} u[i] = (n+1)u[n]$$

y por lo tanto, la suma del escalón es una rampa. Por (7.50), la transformada de la suma es

$$V(z) = \frac{z}{z-1} X(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2}$$

Esto arroja el par de transformadas

$$(n+1)u[n] \leftrightarrow \frac{z^2}{(z-1)^2} \tag{7.51}$$

---

### 7.2.9 Convolución

Dadas dos señales de tiempo discreto $x[n]$ y $v[n]$ con ambas señales iguales a cero para $n = -1, -2, \ldots$, en el capítulo 2 definimos la convolución de $x[n]$ y $v[n]$ como

$$x[n] * v[n] = \sum_{i=0}^{n} x[i]v[n-i]$$

Observe que, debido a que $v[n] = 0$ para $n = -1, -2, \ldots$, la suma de convolución puede tomarse desde $i = 0$ hasta $i = \infty$; es decir, la operación de convolución está dada por

$$x[n] * v[n] = \sum_{i=0}^{\infty} x[i]v[n-i] \tag{7.52}$$

Si tomamos la transformada $z$ bilateral de (7.52) obtenemos el par de transformadas

$$x[n] * v[n] \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{i=0}^{\infty} x[i]v[n-i]\right]z^{-n}$$

$$\leftrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} x[i]\left[\sum_{n=0}^{\infty} v[n-i]z^{-n}\right] \tag{7.53}$$

A través del cambio de índice $\bar{n} = n - i$ en la segunda sumatoria de (7.53) obtenemos

$$x[n] * v[n] \leftrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} x[i]\left[\sum_{\bar{n}=-i}^{\infty} v[\bar{n}]z^{-\bar{n}\ -i}\right]$$

$$\leftrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} x[i]\left[\sum_{\bar{n}=0}^{\infty} v[\bar{n}]z^{-\bar{n}\ -i}\right], \text{ ya que } v[\bar{n}] = 0 \text{ para } \bar{n} < 0$$

$$\leftrightarrow \left[\sum_{i=0}^{\infty} x[i]z^{-i}\right]\left[\sum_{\bar{n}=0}^{\infty} v[\bar{n}]z^{-\bar{n}}\right]$$

$$\leftrightarrow X(z)V(z) \tag{7.54}$$

A partir de (7.54) vemos que la transformada $z$ de la convolución $x*v$ es igual al producto $X(z)V(z)$, donde $X(z)$ y $V(z)$ son las transformadas $z$ de $x[n]$ y $v[n]$, respectivamente. Por lo tanto, la convolución en el dominio de tiempo discreto corresponde a un producto en el dominio de la transformada $z$. Este resultado es análogo al del marco de trabajo de tiempo continuo, en el que la convolución corresponde a una multiplicación en el dominio $s$. En la sección 7.4 presentaremos ejemplos sobre el uso del par de transformadas (7.54), cuando desarrollemos la representación de la función de transferencia para los sistemas lineales e invariantes en el tiempo discreto.

### 7.2.10 Teorema del valor inicial

Si $x[n] \leftrightarrow X(z)$, los valores iniciales de $x[n]$ pueden calcularse directamente de $X(z)$ mediante las relaciones

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z) \tag{7.55}$$

$$x[1] = \lim_{z\to\infty} [zX(z) - zx[0]]$$

$$\vdots$$

$$x[q] = \lim_{z\to\infty} [z^q X(z) - z^q x[0] - z^{q-1}x[1] - \cdots - zx[q-1]] \tag{7.56}$$

Para demostrar (7.55), primero observe que

$$z^{-n} \to 0 \text{ cuando } z \to \infty \text{ para toda } n \geq 1$$

y entonces,

$$x[n]z^{-n} \to 0 \text{ cuando } z \to \infty \text{ para toda } n \geq 1$$

Por lo tanto, al tomar el límite cuando $z \to \infty$ de ambos lados de

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

obtenemos (7.55).

En la siguiente sección mostraremos que, si la transformada $X(z)$ es una función racional de $z$, los valores iniciales de $x[n]$ pueden calcularse mediante una operación de división larga.

### 7.2.11 Teorema del valor final

Dada una señal de tiempo discreto $x[n]$ con transformada $z$, $X(z)$, suponga que $x[n]$ tiene un límite cuando $n \to \infty$. Entonces el teorema del valor final establece que

$$\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1}(z - 1)X(z) \tag{7.57}$$

La demostración de (7.57) es análoga a la demostración que hicimos del teorema del valor final para el caso de tiempo continuo. Aquí no mostramos los detalles.

Como en el caso de tiempo continuo, debemos ser cuidadosos con el uso del teorema del valor final, ya que puede existir el límite del lado derecho de (7.57) aunque $x[n]$ no tenga un límite cuando $n \to \infty$. La existencia del límite de $x[n]$ cuando $n \to \infty$ puede verificarse sin problemas si la transformada $X(z)$ es racional en $z$, es decir, $X(z)$ puede escribirse de la forma $X(z) = B(z)/A(z)$, donde $B(z)$ y $A(z)$ son polinomios en $z$ con coeficientes reales. Aquí suponemos que $B(z)$ y $A(z)$ no tienen factores comunes; si existen, deben ser cancelados.

Ahora, si $p_1, p_2, \ldots, p_N$ denotan los polos de $X(z) = B(z)/A(z)$ [es decir, las raíces de $A(z) = 0$], vemos que $x[n]$ tiene límite cuando $n \to \infty$ si y sólo si las magnitudes $|p_1|, |p_2|, \ldots, |p_N|$ son estrictamente menores que 1, excepto por el $p_i$ que puede ser igual que 1. Esto equivale a la condición de que todos los polos de $(z - 1)X(z)$ tienen magnitudes estrictamente menores que 1. La demostración de que la condición de polos sobre $(z - 1)X(z)$ es necesaria y suficiente para la existencia del límite, se desprende de los resultados de la siguiente sección. Si se satisface esta condición, el límite de $x[n]$ cuando $n \to \infty$ está dado por

$$\lim_{n\to\infty} x[n] = [(z - 1)X(z)]_{z=1} \tag{7.58}$$

Como en el caso de tiempo continuo, la relación (7.58) hace posible determinar el valor límite de una señal en el tiempo, directamente de la transformada de la señal (sin tener que calcular la transformada inversa).

**Ejemplo 7.14 Valor límite**

Suponga que

$$X(z) = \frac{3z^2 - 2z + 4}{z^3 - 2z^2 + 1.5z - 0.5}$$

En este caso $X(z)$ tiene un polo en $z = 1$, y entonces existe una cancelación de polo-cero en $(z - 1)$ $X(z)$. Al desarrollar la cancelación obtenemos

$$(z - 1)X(z) = \frac{3z^2 - 2z + 4}{z^2 - z + 0.5}$$

Mediante el comando `roots` de MATLAB se revela que los polos de $(z - 1)X(z)$ son $z = 0.5 \pm j0.5$. La magnitud de ambos polos es igual a 0.707 y, por lo tanto, $x[n]$ tiene límite cuando $n \to \infty$. De (7.58), el límite es

$$\lim_{n\to\infty} x[n] = [(z - 1)X(z)]_{z=1} = \left[\frac{3z^2 - 2z + 4}{z^2 - z + 0.5}\right]_{z=1} = \frac{5}{0.5} = 10$$

Las propiedades de la transformada $z$ antes mencionadas aparecen resumidas en la tabla 7.2. En la tabla 7.3 proporcionamos una colección de pares de transformadas $z$ comunes, la cual incluye a los pares de transformadas que dedujimos previamente a través de las propiedades de la transformada $z$.

## 7.3 CÁLCULO DE LA TRANSFORMADA *z* INVERSA

Si $X(z)$ es la transformada $z$ de la señal de tiempo discreto $x[n]$, podemos calcular la señal a partir de $X(z)$ si tomamos la transformada inversa de $X(z)$ dada por

$$x[n] = \frac{1}{j2\pi}\int X(z)z^{n-1}\,dz \tag{7.59}$$

Podemos evaluar la integral en (7.59) si integramos en el sentido contrario a las manecillas del reloj, alrededor del contorno circular cerrado que está contenido en la región de convergencia de $X(z)$.

Cuando la transformada $X(z)$ es una función racional de $z$, podemos calcular la transformada $z$ inversa (¡afortunadamente!) sin tener que evaluar la integral en (7.59). En esta sección consideraremos el cálculo de $x[n]$ a partir de una $X(z)$ racional. Cuando $X(z)$ es racional, $x[n]$ puede calcularse por expansión de $X(z)$ en una serie de potencias de $z^{-1}$, o por expansión de $X(z)$ en fracciones parciales. El siguiente desarrollo comienza con el enfoque de la expansión en series de potencias.

### 7.3.1 Expansión por división larga

Sea $X(z)$ dada en la forma racional $X(z) = B(z)/A(z)$, con los polinomios $B(z)$ y $A(z)$ escritos en potencias descendentes de $z$. Para calcular la transformada $z$ inversa $x[n]$ para un intervalo finito de valores de $n$, podemos expandir $X(z)$ en una serie de potencias de $z^{-1}$

dividiendo $B(z)$ entre $A(z)$ mediante la división larga. Los valores de la señal $x\,[n]$ son el "resultado" de los coeficientes de la expansión en series de potencias. El siguiente ejemplo ilustra el proceso:

**TABLA 7.2** Propiedades de la transformada $z$

| Propiedad | Par de transformadas/Propiedad |
|---|---|
| Linealidad | $ax[n] + bv[n] \leftrightarrow aX(z) + bV(z)$ |
| Desplazamiento por la derecha de $x[n]u[n]$ | $x[n-q]u[n-q] \leftrightarrow z^{-q}X(z)$ |
| Desplazamiento por la derecha de $x[n]$ | $x[n-1] \leftrightarrow z^{-1}X(z) + x[-1]$ |
| | $x[n-2] \leftrightarrow z^{-2}X(z) + x[-2] + z^{-1}x[-1]$ |
| | $\vdots$ |
| | $x[n-q] \leftrightarrow z^{-q}X(z) + x[-q] + z^{-1}x[-q+1] + \cdots + z^{-q+1}x[-1]$ |
| Desplazamiento en el tiempo por la izquierda | $x[n+1] \leftrightarrow zX(z) - x[0]z$ |
| | $x[n+2] \leftrightarrow z^2X(z) - x[0]z^2 - x[1]z$ |
| | $x[n+q] \leftrightarrow z^qX(z) - x[0]z^q - x[1]z^{q-1} - \cdots - x[q-1]z$ |
| Multiplicación por $n$ | $nx[n] \leftrightarrow -z\dfrac{d}{dz}X(z)$ |
| Multiplicación por $n^2$ | $n^2x[n] \leftrightarrow z\dfrac{d}{dz}X(z) + z^2\dfrac{d^2}{dz^2}X(z)$ |
| Multiplicación por $a^n$ | $a^nx[n] \leftrightarrow X\left(\dfrac{z}{a}\right)$ |
| Multiplicación por cos $\Omega n$ | $(\cos \Omega n)x[n] \leftrightarrow \dfrac{1}{2}[X(e^{j\Omega}z) + X(e^{-j\Omega}z)]$ |
| Multiplicación por sen $\Omega n$ | $(\text{sen } \Omega n)x[n] \leftrightarrow \dfrac{j}{2}[X(e^{j\Omega}z) - X(e^{-j\Omega}z)]$ |
| Sumatoria | $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} x[i] \leftrightarrow \frac{z}{z-1}X(z)$ |
| Convolución | $x[n] * v[n] \leftrightarrow X(z)V(z)$ |
| Teorema del valor inicial | $x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$ |
| | $x[1] = \lim_{z\to\infty} [zX(z) - zX[0]]$ |
| | $\vdots$ |
| | $x[q] = \lim_{z\to\infty} [z^qX(z) - z^qx[0] - z^{q-1}x[1] - \cdots - zx[q-1]]$ |
| Teorema del valor final | Si $X(z)$ es racional y los polos de $(z-1)X(z)$ tienen magnitudes $<1$, entonces |
| | $\lim_{n\to\infty} x[n] = [(z-1)X(z)]_{z=1}$ |

**TABLA 7.3** Pares comunes de transformadas $z$

$$\delta[n] \leftrightarrow 1$$

$$\delta[n-q] \leftrightarrow \frac{1}{z^q}, \quad q = 1, 2, \ldots$$

$$u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-1}$$

$$u[n] - u[n-q] \leftrightarrow \frac{z^q - 1}{z^{q-1}(z-1)}, \quad q = 1, 2, \ldots$$

$$a^n u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-a}, \; a \text{ real o complejo}$$

$$nu[n] \leftrightarrow \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$(n+1)u[n] \leftrightarrow \frac{z^2}{(z-1)^2}$$

$$n^2 u[n] \leftrightarrow \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

$$na^n u[n] \leftrightarrow \frac{az}{(z-a)^2}$$

$$n^2 a^n u[n] \leftrightarrow \frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$$

$$n(n+1)a^n u[n] \leftrightarrow \frac{2az^2}{(z-a)^3}$$

$$(\cos \Omega n)u[n] \leftrightarrow \frac{z^2 - (\cos \Omega)z}{z^2 - (2\cos \Omega)z + 1}$$

$$(\text{sen } \Omega n)u[n] \leftrightarrow \frac{(\text{sen } \Omega)z}{z^2 - (2\cos \Omega)z + 1}$$

$$a^n(\cos \Omega n)u[n] \leftrightarrow \frac{z^2 - (a\cos \Omega)z}{z^2 - (2a\cos \Omega)z + a^2}$$

$$a^n(\text{sen } \Omega n)u[n] \leftrightarrow \frac{(a\,\text{sen } \Omega)z}{z^2 - (2a\cos \Omega)z + a^2}$$

### Ejemplo 7.15 Transformada z inversa mediante la división larga

Suponga que

$$X(z) = \frac{z^2 - 1}{z^3 + 2z + 4}$$

Al dividir $B(z)$ entre $A(z)$ tenemos

$$
\begin{array}{r}
z^{-1} + 0z^{-2} - 3z^{-3} - 4z^{-4} + \cdots \\
\hline
z^3 + 2z + 4 \,\big)\, z^2 - 1 \\
\underline{z^2 + 2 \quad + 4z^{-1}} \\
-3 \quad - 4z^{-1} \\
\underline{-3 \qquad - 6z^{-2} - 12z^{-3}} \\
-4z^{-1} + 6z^{-2} + 12z^{-3} \\
\underline{-4z^{-1} \qquad - 8z^{-3} - 16z^{-4}} \\
6z^{-2} + 20z^{-3} + 16z^{-4} \\
\vdots
\end{array}
$$

Entonces,

$$X(z) = z^{-1} - 3z^{-3} - 4z^{-4} \ldots \tag{7.60}$$

Por definición de la transformada $z$,

$$X(z) = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \cdots \tag{7.61}$$

Si comparamos (7.60) y (7.61) obtenemos los siguientes valores de $x[n]$

$$x[0] = 0, \quad x[1] = 1, \quad x[2] = 0, \quad x[3] = -3, \quad x[4] = -4, \ldots$$

---

A partir de los resultados del ejemplo 7.15, vemos que podemos calcular los valores iniciales $x[0], x[1], x[2], \ldots$, de una señal $x[n]$, llevando a cabo los primeros pasos de la expansión de $X(z) = B(z)/A(z)$ con la división larga. En particular, observe que el valor inicial $x[0]$ es diferente de cero si y sólo si el grado de $B(z)$ es igual al grado de $A(z)$. Si el grado de $B(z)$ es estrictamente menor que el grado de $A(z)$ menos 1, tanto $x[0]$ como $x[1]$ son cero, y así sucesivamente.

En lugar de realizar a mano la división larga, podemos utilizar MATLAB para calcular $x[n]$ mediante el manipulador simbólico o el comando `filter`, el cual surge en la formulación de la función de transferencia (que veremos en la siguiente sección). Considere una transformada $z$ de la forma

$$X(z) = \frac{b_M z^M + b_{M-1} z^{M-1} + \cdots + b_0}{a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \cdots + a_0}$$

donde $M \leq N$. Para resolver de manera simbólica los valores de la señal $x[n]$, utilice el comando `iztrans`. Para resolver de manera numérica la transformada $z$ inversa para $n = 0$ a $n = q$, utilice los comandos

```
num = [bM bM-1 … b0];
den = [aN aN-1 … a0];
x = filter(num,den,[1 zeros(1,q)]);
```

El siguiente ejemplo ilustra el cálculo de $x[n]$ a partir de $X(z)$ mediante MATLAB.

---

**Ejemplo 7.16 Transformada z inversa mediante MATLAB**

Considere la transformada $z$:

$$X(z) = \frac{8z^3 + 2z^2 - 5z}{z^3 - 1.75z + .75}$$

Para resolver de manera simbólica para $x[n]$, utilice los comandos

```
syms X x z
X = (8*z^3+2*z^2-5*z)/(z^3-1.75*z+.75);
x = iztrans(X)
```

los cuales arrojan

```
 x =
2*(1/2)^n+2*(-3/2)^n+4
```

Para evaluar de manera numérica $x[n]$ para $n = 0$ a $n = 10$, aplicamos los siguientes comandos de MATLAB:

```
num = [8 2 -5 0];
den = [1 0 -1.75 .75];
x = filter(num,den,[1 zeros(1,9)])
```

Al ejecutar el programa obtenemos como resultado el siguiente vector (del cual, el primer elemento es $x[0]$):

```
8    2    9    -2.5    14.25    -11.125    26.8125    -30.1563    55.2656
```

Observe que los valores de $|x[n]|$ aparentemente crecen sin límite conforme $n$ se incrementa. Como veremos en el siguiente desarrollo, el crecimiento ilimitado de la magnitud de $x[n]$ es un resultado de que $X(z)$ tenga un polo con magnitud $> 1$.

---

### 7.3.2 Inversión vía expansión por fracciones parciales

Por medio de la división larga, previamente descrita, podemos calcular la transformada $z$ inversa $x[n]$ de $X(z)$ para cualquier intervalo finito de valores enteros de $n$. Sin embargo, si deseamos una expresión analítica (forma cerrada) para $x[n]$ que sea válida para toda $n \geq 0$, es necesario utilizar la expansión por fracciones parciales, como hicimos en la teoría de la transformada de Laplace. Los pasos son los siguientes.

De nuevo suponga que $X(z)$ está dada en la forma racional $X(z) = B(z)/A(z)$. Si el grado de $B(z)$ es igual a $A(z)$, la expansión en fracciones parciales de la sección 6.3 no puede aplicarse directamente a $X(z)$. Sin embargo, dividir $B(z)$ entre $A(z)$ arroja la siguiente forma para $X(z)$:

$$X(z) = x[0] + \frac{R(z)}{A(z)}$$

Aquí, $x[0]$ es el valor inicial de la señal $x[n]$ al tiempo $n = 0$, y $R(z)$ es un polinomio en $z$ cuyo grado es estrictamente menor que el de $A(z)$. La función racional $R(z)/A(z)$ puede entonces expandirse por fracciones parciales.

Existe otro enfoque que evita el tener que dividir $B(z)$ entre $A(z)$; a saber, primero expanda

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{B(z)}{zA(z)}$$

La función racional $X(z)/z$ puede expandirse en fracciones parciales, ya que el grado de $B(z)$ es estrictamente menor que el grado de $zA(z)$, en el caso en que $B(z)$ y $A(z)$ tengan el mismo grado. Después de expandir $X(z)/z$, el resultado puede multiplicarse por $z$ para arrojar una expansión para $X(z)$. La transformada inversa de $X(z)$ puede entonces calcularse término por término. Hay dos casos por considerar.

**Polos distintos.** Suponga que los polos $p_1, p_2, \ldots, p_N$ de $X(z)$ son distintos y diferentes de cero. Entonces, $X(z)/z$ tiene la expansión en fracciones parciales

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z - p_1} + \frac{c_2}{z - p_2} + \cdots + \frac{c_N}{z - p_N} \tag{7.62}$$

donde $c_0$ es el número real dado por

$$c_0 = \left[ z \frac{X(z)}{z} \right]_{z=0} = X(0) \tag{7.63}$$

y los otros residuos (7.62) son números reales o complejos dados por

$$c_i = \left[ (z - p_i) \frac{X(z)}{z} \right]_{z=p_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, N \tag{7.64}$$

Al multiplicar ambos lados de (7.62) por $z$ obtenemos la siguiente expansión para $X(z)$:

$$X(z) = c_0 + \frac{c_1 z}{z - p_1} + \frac{c_2 z}{z - p_2} + \cdots + \frac{c_N z}{z - p_N} \tag{7.65}$$

Entonces, si tomamos la transformada $z$ inversa de cada término de (7.65) y utilizamos la tabla 7.3 obtenemos

$$x[n] = c_0 \delta[n] + c_1 p_1^n + c_2 p_2^n + \cdots + c_N p_N^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.66}$$

De (7.66) resulta claro que la forma de la variación en tiempo de la señal $x[n]$ es determinada por los polos $p_1, p_2, \ldots, p_N$ de la función racional $X(z)$. Entonces, los polos de $X(z)$ determinan las características de la variación en tiempo de $x[n]$. El lector recordará que éste también es el caso en la teoría de la transformada de Laplace, excepto que aquí los términos incluidos en $x[n]$ tienen la forma $cp^n$; mientras que en el caso de tiempo continuo, los términos son de la forma $ce^{pt}$.

Si todos los polos de $X(z)$ son reales, los términos que comprenden la señal definida por (7.66) son todos reales. Sin embargo, si dos o más de los polos son complejos, los términos correspondientes en (7.66) serán complejos. Tales términos pueden combinarse para arrojar una forma real. Para ver esto, suponga que el polo $p_1 = a + jb$ es complejo, por lo que $b \neq 0$. Entonces, uno de los otros polos de $X(z)$ debe ser igual al complejo conjugado $\overline{p}_1$ de $p_1$. Suponga que $p_2 = \overline{p}_1$; entonces en (7.66) debe ser cierto que $c_2 = \overline{c}_1$. Entonces, el segundo y tercer términos del lado derecho de (7.66) son iguales a

$$c_1 p_1^n + \overline{c}_1 \overline{p}_1^n \tag{7.67}$$

Este término puede expresarse en la forma

$$2|c_1|\sigma^n \cos(\Omega n + \angle c_1) \tag{7.68}$$

donde

$$\sigma = |p_1| = \text{magnitud del polo } p_1$$

y

$$\Omega = \angle p_1 = \text{ángulo de } p_1$$

La comprobación de que (7.67) y (7.68) son equivalentes se deja para los problemas de tarea (vea el problema 7.7). Al utilizar (7.68) en (7.66) resulta en la siguiente expresión para $x[n]$:

$$x[n] = c_0\delta[n] + 2|c_1|\sigma^n \cos(\Omega n + \angle c_1) + c_3 p_3^n + \cdots + c_n p_N^n, n = 0, 1, 2, \ldots \quad (7.69)$$

La expresión (7.69) muestra que, si $X(z)$ tiene un par de polos complejos $p_1, p_2$ con magnitud $\sigma$ y ángulo $\pm\Omega$, la señal $x[n]$ contiene un término de la forma

$$2|c|\sigma^n \cos(\Omega n + \angle c)$$

El siguiente ejemplo ilustra el cálculo de la transformada $z$ inversa mediante el procedimiento anterior.

---

**Ejemplo 7.17 Caso de un polo complejo**

Suponga que

$$X(z) = \frac{z^3 + 1}{z^3 - z^2 - z - 2}$$

Aquí,

$$A(z) = z^3 - z^2 - z - 2$$

Al utilizar el comando `roots` de MATLAB se revela que las raíces de $A(z)$ son

$$p_1 = -0.5 - j0.866$$
$$p_2 = -0.5 + j0.866$$
$$p_3 = 2$$

Entonces, si expandimos $X(z)/z$ tenemos

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z + 0.5 + j0.866} + \frac{\bar{c}_1}{z + 0.5 - j0.866} + \frac{c_3}{z - 2}$$

donde

$$c_0 = X(0) = \frac{1}{-2} = -0.5$$

$$c_1 = \left[(z + 0.5 + j0.866)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=-0.5-j0.866} = 0.429 + j0.0825$$

$$c_3 = \left[(z - 2)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=2} = 0.643$$

De (7.66) vemos que la transformada $z$ inversa es

$$x[n] = -0.5\delta[n] + c_1(-0.5 - j0.866)^n + \bar{c}_1(-0.5 + j0.866)^n + 0.643(2)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Podemos escribir el segundo y tercer términos en $x[n]$ de forma real utilizando la forma (7.68). Aquí, la magnitud y el ángulo de $p_1$ están dados por

$$|p_1| = \sqrt{(0.5)^2 + (0.866)^2} = 1$$

$$\angle p_1 = \pi + \tan^{-1}\frac{0.866}{0.5} = \frac{4\pi}{3}\text{rad}$$

y la magnitud y el ángulo de $c_1$ están dados por

$$|c_1| = \sqrt{(0.429)^2 + (0.0825)^2} = 0.437$$

$$\angle c_1 = \tan^{-1}\frac{0.0825}{0.429} = 10.89°$$

Entonces, al rescribir $x[n]$ en la forma (7.69), tenemos

$$x[n] = -0.5\delta[n] + 0.874\cos\left(\frac{4\pi}{3}n + 10.89°\right) + 0.643(2)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Debemos notar que los polos y los residuos asociados (los $c_i$) a $X(z)/z$ pueden calcularse mediante los comandos de MATLAB

```
num = [1 0 0 1];
den = [1 -1 -1 -2 0];
[r,p] = residue(num,den)
```

Al ejecutar el programa obtenemos

```
r =                    p =
   0.6429                 2.0000
   0.4286 - 0.0825i       -0.5000 + 0.8660i
   0.4286 + 0.0825i       -0.5000 - 0.8660i
  -0.5000                  0
```

lo cual coincide con los polos y residuos previamente calculados.

La transformada $z$ inversa de $X(z)$ también puede calcularse por manipulación simbólica o por el método numérico dado en el ejemplo 7.16. Los siguientes comandos calculan $x[n]$ para $n = 0$ a $n = 20$.

```
num = [1 0 0 1];
den = [1 -1 -1 -2];
x = filter(num,den,[1 zeros(1,19)]);
```

Invitamos al lector a graficar esta respuesta y a compararla con la calculada en forma analítica.

---

**Polos repetidos.** De nuevo, sea $p_1, p_2, \ldots, p_N$ quienes denoten los polos de $X(z) = B(z)/A(z)$, y suponga que todos los $p_i$ son diferentes de cero. Suponga que el polo $p_1$ se repite $r$ veces y que los otros $N - r$ polos son distintos. Entonces, $X(z)/z$ tiene la expansión en fracciones parciales

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z - p_1} + \frac{c_2}{(z - p_1)^2} + \cdots + \frac{c_r}{(z - p_1)^r} + \frac{c_{r+1}}{z - p_{r+1}} + \cdots + \frac{c_N}{z - p_N} \tag{7.70}$$

En (7.70), $c_0 = X(0)$ y los residuos $c_{r+1}, c_{r+2},\ldots, c_N$ se calculan de la misma forma que en el caso de polos distintos [vea (7.64)]. Las constantes $c_r, c_{r-1},\ldots, c_1$ están dadas por

$$c_r = \left[(z - p_1)^r \frac{X(z)}{z}\right]_{z=p_1}$$

$$c_{r-1} = \left[\frac{d}{dz}(z - p_1)^r \frac{X(z)}{z}\right]_{z=p_1}$$

$$c_{r-2} = \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{dz^2}(z - p_1)^r \frac{X(z)}{z}\right]_{z=p_1}$$

$$\vdots$$

$$c_{r-i} = \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i}{dz^i}(z - p_1)^r \frac{X(z)}{z}\right]_{z=p_1}$$

Después, si multiplicamos ambos lados de (7.70) por $z$ tenemos

$$X(z) = c_0 + \frac{c_1 z}{z - p_1} + \frac{c_2 z}{(z - p_1)^2} + \cdots + \frac{c_r z}{(z - p_1)^r} + \frac{c_{r+1} z}{z - p_{r+1}} + \cdots + \frac{c_N z}{z - p_N} \tag{7.71}$$

Podemos calcular la transformada $z$ inversa de los términos

$$\frac{c_i z}{(z - p_1)^i} \tag{7.72}$$

para $i = 2$ y 3 mediante los pares de transformadas de la tabla 7.2. Esto da como resultado los pares de transformadas

$$c_2 n(p_1)^{n-1} u[n] \leftrightarrow \frac{c_2 z}{(z - p_1)^2} \tag{7.73}$$

$$\frac{1}{2} c_3 n(n - 1)(p_1)^{n-2} u[n] \leftrightarrow \frac{c_3 z}{(z - p_1)^3} \tag{7.74}$$

Podemos calcular la transformada inversa de (7.72) para $i = 4, 5,\ldots$ si utilizamos de manera repetida la propiedad de multiplicación por $n$, de la transformada $z$. Esto resulta en el par de transformadas

$$\frac{c_i}{(i - 1)!} n(n - 1)\cdots(n - i + 2)(p_1)^{n-i-1} u[n - i + 2] \leftrightarrow \frac{c_i z}{(z - p_1)^i}, \quad i = 4, 5,\ldots$$

---

**Ejemplo 7.18 Caso de polos repetidos**

Suponga que

$$X(z) = \frac{6z^3 + 2z^2 - z}{z^3 - z^2 - z + 1}$$

Entonces,

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{6z^2 + 2z - 1}{z^3 - z^2 - z + 1} = \frac{6z^2 + 2z - 1}{(z-1)^2(z+1)}$$

Observe que el factor común de $z$ en el numerador y denominador de $X(z)/z$ se canceló. Para eliminar cálculos innecesarios, cualquier factor común en $X(z)/z$ debe cancelarse antes de realizar la expansión en fracciones parciales.

Ahora los polos de $X(z)/z$ son $p_1 = 1, p_2 = 1, p_3 = -1$, y por lo tanto la expansión tiene la forma

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{(z-1)^2} + \frac{c_3}{z+1}$$

donde

$$c_2 = \left[(z-1)^2 \frac{X(z)}{z}\right]_{z=1} = \frac{6 + 2 - 1}{2} = 3.5$$

$$c_1 = \left[\frac{d}{dz}(z-1)^2 \frac{X(z)}{z}\right]_{z=1} = \left[\frac{d}{dz}\frac{6z^2 + 2z - 1}{z+1}\right]_{z=1}$$

$$= \left.\frac{(z+1)(12z+2) - (6z^2 + 2z - 1)(1)}{(z+1)^2}\right|_{z=1}$$

$$= \frac{2(14) - 7}{4} = 5.25$$

y

$$c_3 = \left[(z+1)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=-1} = \frac{6 - 2 - 1}{(-2)^2} = 0.75$$

Así,

$$X(z) = \frac{5.25z}{z-1} + \frac{3.5z}{(z-1)^2} + \frac{0.75z}{z+1}$$

Por medio del par de transformadas (7.73) obtenemos la siguiente transformada inversa

$$x[n] = 5.25(1)^n + 3.5n(1)^{n-1} + 0.75(-1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$= 5.25 + 3.5n + 0.75(-1)^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

A manera de verificación de los resultados anteriores, calculamos los polos y residuos de $X(z)/z$ a través de los siguientes comandos

```
num = [6 2 -1];
den = [1 -1 -1 1];
[r,p] = residue(num,den)
```

Al ejecutar el programa tenemos

```
r =          p =
   5.2500       1.0000
   3.5000       1.0000
   0.7500      -1.0000
```

Esto coincide con los polos y residuos previamente calculados. Observe que el residuo 5.25 para la primera ocurrencia (en la lista anterior) del polo en $p = 1$ corresponde al término $c_1/(z - 1)$ en la expansión de $X(z)/z$, y la constante 3.5 para la segunda ocurrencia de $p = 1$ corresponde al término $c_2/(z - 1)^2$.

Como en el ejemplo 7.17, podemos calcular simbólica o numéricamente la transformada $z$ inversa a través de los siguientes comandos de MATLAB:

```
num = [6 2 -1 0];
den = [1 -1 -1 1];
x = filter(num,den,[1 zeros(1,19)]);
```

**Ubicación de los polos y la forma de una señal.** Dada una señal de tiempo discreto $x[n]$ con transformada $z$ racional $X(z) = B(z)/A(z)$, por los resultados anteriores vemos que existe una relación directa entre los polos de $X(z)$ y la forma de la variación en tiempo de la señal $x[n]$. En particular, si $X(z)$ tiene un polo real no repetido $p$, entonces $x[n]$ contiene un término de la forma $c(p)^n$ para alguna constante $c$; y si el polo $p$ se repite dos veces, $x[n]$ contiene los términos $c_1(p)^n$ y $c_2(p)^n$ para algunas constantes $c_1$ y $c_2$. Si $X(z)$ tiene un par de polos complejos no repetidos $a \pm jb$, con magnitud $\sigma$ y ángulos $\pm\Omega$, entonces $x[n]$ contiene un término de la forma $c\sigma^n \cos(\Omega n + \theta)$ para algunas constantes $c$ y $\theta$. Si el par de complejos $a \pm jb$ se repite dos veces, $x[n]$ contiene los términos $c_1\sigma^n \cos(\Omega n + \theta_1) + c_2 n\sigma^n \cos(\Omega n + \theta_2)$ para algunas constantes $c_1, c_2, \theta_1, \theta_2$.

Observe que estas relaciones entre términos de la señal y los polos son análogos a aquéllas de la teoría de la transformada de Laplace para señales de tiempo continuo. De hecho, como en el caso de las señales de tiempo continuo, el comportamiento de una señal de tiempo discreto cuando $n \to \infty$ puede determinarse en forma directa a partir de los polos de $X(z)$. En particular, de los resultados anteriores se desprende que $x[n]$ converge en 0 cuando $n \to \infty$ si y sólo si todos los polos de $X(z), p_1, p_2, \ldots, p_N$, tienen magnitudes estrictamente menores que 1; es decir,

$$|p_i| < 1 \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, N \tag{7.75}$$

Además, se desprende que $x[n]$ converge en una constante finita (cuando $n \to \infty$) si y sólo si se satisface (7.75), a excepción de que uno de los $p_i$ pueda ser igual a 1. Si éste es el caso, $x[n]$ converge en el valor del residuo de la expansión de $X(z)/z$, correspondiente al polo 1. En otras palabras,

$$\lim_{n\to\infty} x[n] = \left[(z - 1)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=1} = [(z - 1)X(z)]_{z=1}$$

Observe que este resultado es consistente con el teorema del valor final, expuesto en la sección 7.2.

## 7.4 REPRESENTACIÓN DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

En esta sección, la representación de la función de transferencia se genera para la clase de sistemas causales, lineales e invariantes en el tiempo discreto. El desarrollo comienza con los sistemas de tiempo discreto definidos por una ecuación en diferencias de entrada y salida. Primero consideraremos los sistemas dados por una ecuación en diferencias de entrada y salida de primer orden.

### 7.4.1 Caso de primer orden

Posición de los polos y la respuesta al impulso

Considere el sistema lineal e invariante en el tiempo discreto dado por la ecuación en diferencias de entrada y salida de primer orden

$$y[n] + ay[n - 1] = bx[n] \tag{7.76}$$

donde $a$ y $b$ son números reales, $y[n]$ es la salida y $x[n]$ es la entrada. Al tomar la transformada $z$ de ambos lados de (7.76), y si utilizamos la propiedad (7.20) de desplazamiento por la derecha tenemos

$$Y(z) + a[z^{-1}Y(z) + y[-1]] = bX(z) \tag{7.77}$$

donde $Y(z)$ es la transformada $z$ de la respuesta de salida $y[n]$, y $X(z)$ es la transformada $z$ de la entrada $x[n]$. Si resolvemos (7.77) para $Y(z)$ obtenemos

$$Y(z) = -\frac{ay[-1]}{1 + az^{-1}} + \frac{b}{1 + az^{-1}}X(z) \tag{7.78}$$

y al multiplicar los términos del lado derecho de (7.78) por $z/z$ tenemos

$$Y(z) = -\frac{ay[-1]z}{z + a} + \frac{bz}{z + a}X(z) \tag{7.79}$$

La ecuación (7.79) es la *representación en el dominio z* del sistema de tiempo discreto, definido por la ecuación en diferencias de entrada y salida (7.76). El primer término del lado derecho de (7.79) es la transformada $z$ de la parte de la respuesta de salida resultante de la condición inicial $y[-1]$, y el segundo término del lado derecho de (7.79) es la transformada $z$ de la parte de la respuesta de salida que resulta de la entrada $x[n]$, aplicada para $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Si la condición inicial $y[-1]$ es igual a cero, (7.79) se reduce a

$$Y(z) = \frac{bz}{z + a}X(z) \tag{7.80}$$

Si definimos

$$H(z) = \frac{bz}{z + a}$$

entonces (7.80) se vuelve

$$Y(z) = H(z)X(z) \tag{7.81}$$

A la función $H(z)$ le llamamos *función de transferencia* del sistema, ya que especifica la transferencia de la entrada a la salida en el dominio $z$, si suponemos que la condición inicial es igual cero ($y[-1] = 0$). La ecuación (7.81) es la *representación de la función de transferencia* del sistema.

Para cualquier condición inicial $y[-1]$ y cualquier entrada $x[n]$, con transformada $z$ racional $X(z)$, podemos calcular la salida $y[n]$ si tomamos la transformada $z$ inversa de $Y(z)$, dada por (7.79). El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento.

### Ejemplo 7.19 Respuesta al escalón

Para el sistema dado por (7.76), suponga que $a \neq -1$, y $x[n]$ es igual a la función escalón unitario, $u[n]$. Entonces, $X(z) = z/(z-1)$, y a partir de (7.79) la transformada $z$ de la respuesta de salida es

$$Y(z) = -\frac{ay[-1]z}{z+a} + \frac{bz}{z+a}\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

$$= -\frac{ay[-1]z}{z+a} + \frac{bz^2}{(z+a)(z-1)} \tag{7.82}$$

Al expandirla,

$$\frac{bz^2}{(z+a)(z-1)}\frac{1}{z} = \frac{ab/(a+1)}{z+a} + \frac{b/(a+1)}{z-1}$$

y al tomar la transformada $z$ inversa de ambos lados de (7.82) tenemos

$$y[n] = -ay[-1](-a)^n + \frac{b}{a+1}[a(-a)^n + (1)^n]$$

$$= -ay[-1](-a)^n + \frac{b}{a+1}[-(-a)^{n+1} + 1], \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.83}$$

Si la condición inicial $y[-1]$ es cero, (7.83) se reduce a

$$y[n] = \frac{b}{a+1}[-(-a)n + 1], \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.84}$$

La salida $y[n]$ dada por (7.84) se conoce como *respuesta al escalón*, ya que es la respuesta de salida cuando la entrada $x[n]$ es el escalón unitario $u[n]$, con condiciones iniciales igual a cero.

## 7.4.2 Caso de segundo orden

Posiciones de los polos y la respuesta al impulso

Ahora considere el sistema de tiempo discreto dado por la ecuación en diferencias de entrada y salida de segundo orden

$$y[n] + a_1y[n-1] + a_2y[n-2] = b_0x[n] + b_1x[n-1] \tag{7.85}$$

Si tomamos la transformada $z$ de ambos lados de (7.85), y utilizamos las propiedades (7.20) y (7.21) de desplazamiento por la derecha, obtenemos (suponiendo que $x[-1] = 0$)

$$Y(z) + a_1[z^{-1}Y(z) + y[-1]] + a_2[z^{-2}Y(z) + z^{-1}y[-1] + y[-2]]$$

$$= b_0X(z) + b_1z^{-1}X(z)$$

Al resolver para $Y(z)$ obtenemos

$$Y(z) = \frac{-a_2y[-2] - a_1y[-1] - a_2y[-1]z^{-1}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} + \frac{b_0 + b_1z^{-1}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}X(z) \tag{7.86}$$

Si multiplicamos ambos lados de (7.86) por $z^2/z^2$ obtenemos

$$Y(z) = \frac{-(a_1 y[-1] + a_2 y[-2])z^2 - a_2 y[-1]z}{z^2 + a_1 z + a_2} + \frac{b_0 z^2 + b_1 z}{z^2 + a_1 z + a_2} X(z) \quad (7.87)$$

La ecuación (7.87) es la representación en el dominio $z$ del sistema de tiempo discreto dado por la ecuación en diferencias de entrada y salida de segundo orden (7.85). El primer término del lado derecho de (7.87) es la transformada $z$ de la parte de la respuesta de salida resultante de las condiciones iniciales $y[-1]$ y $y[-2]$, y el segundo término del lado derecho de (7.87) es la transformada $z$ de la parte de la respuesta de salida que resulta de la entrada $x[n]$, aplicada para $n \geq 0$.

Si $y[-1] = y[-2] = 0$, (7.87) se reduce a la representación de la función de transferencia

$$Y(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z}{z^2 + a_1 z + a_2} X(z) \quad (7.88)$$

donde la función de transferencia $H(z)$ del sistema está dada por

$$H(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z}{z^2 + a_1 z + a_2} \quad (7.89)$$

Observe que $H(z)$ es una función racional de segundo orden de $z$.

---

**Ejemplo 7.20 Sistema de segundo orden**

Considere el sistema de tiempo discreto dado por la ecuación en diferencias de entrada y salida

$$y[n] + 1.5y[n-1] + 0.5y[n-2] = x[n] - x[n-1]$$

Por (7.89), la función de transferencia del sistema es

$$H(z) = \frac{z^2 - z}{z^2 + 1.5z + 0.5}$$

Suponga que el objetivo es calcular la respuesta de salida $y[n]$, cuando $y[-1] = 2$, $y[-2] = 1$, y la entrada $x[n]$ es el escalón unitario $u[n]$. Entonces, por (7.87), la transformada $z$ de la respuesta es

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{-[(1.5)(2) + (0.5)(1)]z^2 - (0.5)(2)z}{z^2 + 1.5z + 0.5} + \frac{z^2 - z}{z^2 + 1.5z + 0.5}\left(\frac{z}{z-1}\right) \\ &= \frac{-3.5z^2 - z}{z^2 + 1.5z + 0.5} + \frac{z^2}{z^2 + 1.5z + 0.5} \\ &= \frac{-2.5z^2 - z}{z^2 + 1.5z + 0.5} \\ &= \frac{0.5z}{z + 0.5} - \frac{3z}{z + 1} \end{aligned}$$

Entonces, al tomar la transformada $z$ inversa tenemos

$$y[n] = 0.5(-0.5)^n - 3(-1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Podemos obtener la respuesta a una entrada escalón cuando $y[-1] = 2$ y $y[-2] = 1$ si utilizamos el comando `filter` de MATLAB. Las condiciones iniciales requeridas por este comando están relacionadas, pero no son iguales a $y[-1]$ y $y[-2]$. Para la ecuación en diferencias general de segundo orden dada en (7.85), definamos un vector condición inicial para que sea `zi = [-a1*y[-1] - a2*y[-2], -a2*y[-1]]`, si $x = 0$ para $n < 0$. A continuación mostramos el uso del comando `filter`:

```
num = [1 -1 0];
den = [1 1.5 .5];
n = 0:20;
x = ones(1,length(n));
zi = [-1.5*2-0.5*1,-0.5*2];
y = filter(num,den,x,zi);
```

La respuesta de este sistema aparece en la figura 7.2. Observe que esta respuesta coincide con el resultado obtenido de manera analítica, donde el término $0.5(0.5)^n$ decae rápidamente hacia cero, y el término $-3(-1)^n$ sólo oscila entre $-3$ y 3.

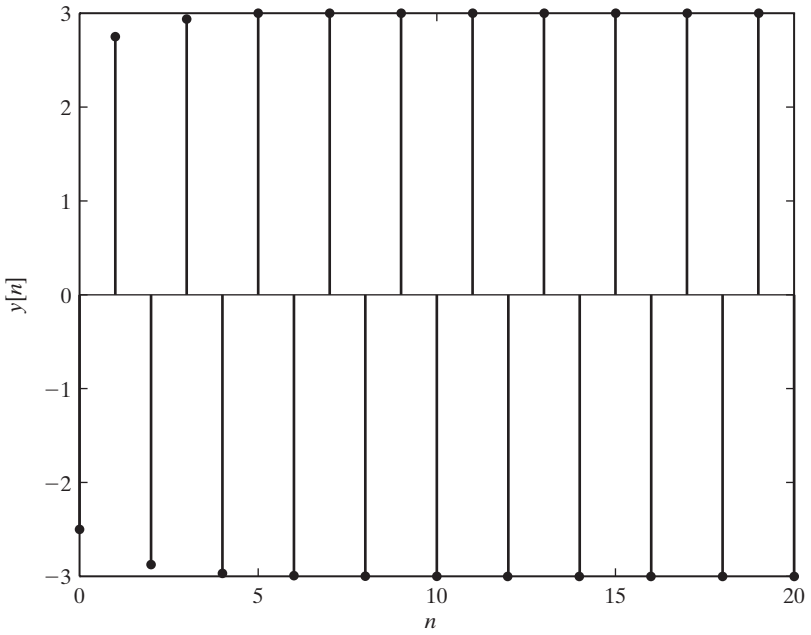



**FIGURA 7.2**
Respuesta de salida del ejemplo 7.20.

### 7.4.3 Caso de orden *N*

Ahora suponga que el sistema de tiempo discreto en estudio está definido por la ecuación en diferencias de entrada y salida de orden $N$

$$y[n] + \sum_{i=1}^{N} a_i y[n - i] = \sum_{i=1}^{M} b_i x[n - i] \tag{7.90}$$

Al tomar la transformada $z$ de ambos lados de (7.90), y al multiplicar la ecuación resultante por $z^N/z^N$, obtenemos la representación del sistema en el dominio $z$, dada por

$$Y(z) = \frac{C(z)}{A(z)} + \frac{B(z)}{A(z)}X(z) \tag{7.91}$$

donde

$$B(z) = b_0z^N + b_1z^{N-1} + \cdots + b_Mz^{N-M}$$

y

$$A(z) = z^N + a_1z^{N-1} + \cdots + a_{N-1}z + a_N$$

y donde $C(z)$ es un polinomio en $z$, cuyos coeficientes son determinados por las condiciones iniciales $y[-1], y[-2],\ldots, y[-N]$ (si suponemos que $x[n] = 0$, para $n = -1,-2,\ldots, -M$). Si todas las condiciones iniciales son cero, entonces $C(z) = 0$, y (7.91) se reduce a la representación de la función de transferencia

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)}X(z) \tag{7.92}$$

donde la función de transferencia del sistema $H(z)$ está dada por

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0z^N + b_1z^{N-1} + \cdots + b_Mz^{N-M}}{z^N + a_1z^{N-1} + \cdots + a_{N-1}z + a_N} \tag{7.93}$$

### 7.4.4 Transformada de la suma de convolución de entrada y salida

Suponga que un sistema causal, lineal e invariante en el tiempo discreto está dado por la relación de convolución de entrada y salida

$$y[n] = h[n]*x[n] = \sum_{i=0}^{n} h[i]x[n-i], \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.94}$$

donde $h[n]$ es la respuesta al pulso unitario del sistema, la entrada es cero para $n < 0$, y todas las condiciones iniciales son cero (vea el capítulo 2). La transformada $z$ puede aplicarse a ambos lados de (7.94), lo cual resulta en la representación de la función de transferencia

$$Y(z) = H(z)X(z) \tag{7.95}$$

donde la función de transferencia $H(z)$ es la transformada $z$ de la respuesta al pulso unitario $h[n]$. La relación entre la respuesta al pulso unitario $h[n]$ y la función de transferencia $H(z)$ puede expresarse en términos de la notación del par de transformadas

$$h[n] \leftrightarrow H(z) \tag{7.96}$$

El par de transformadas (7.96) es análogo a la relación generada en la sección 6.5, entre la respuesta al impulso y la función de transferencia en el caso de tiempo continuo. Como en la teoría de tiempo continuo, (7.96) proporciona un mejor enlace entre el dominio del tiempo y el dominio de la transformada para el estudio de los sistemas de tiempo discreto.

Como vimos previamente, si el sistema de tiempo discreto está dado por una ecuación en diferencias de entrada y salida, la función de transferencia es una función racional de $z$; se hace evidente que lo contrario también es cierto, es decir, si $H(z)$ es racional, el sistema puede describirse con una ecuación en diferencias de entrada y salida. Para ver esto, suponga que $H(z)$ puede expresarse en la forma racional (7.93). Entonces, al multiplicar ambos lados de (7.92) por $A(z)$, tenemos

$$A(z)Y(z) = B(z)X(z)$$

y si tomamos la transformada $z$ inversa de esto, resulta en la ecuación en diferencias (7.90).

Se dice que un sistema causal, lineal e invariante en el tiempo discreto, es *dimensionalmente finito* si la función de transferencia $H(z)$ es una función racional de $z$; es decir, $H(z)$ puede expresarse de la forma (7.93). Así, como vimos antes, un sistema de tiempo discreto es dimensionalmente finito si y sólo si puede describirse mediante una ecuación en diferencias de entrada y salida de la forma (7.90).

Si un sistema de tiempo discreto dado es dimensionalmente finito, tal que $H(z)$ sea racional, los polos y ceros del sistema se definen para que sean los polos y ceros de $H(z)$. También es posible definir el diagrama de polos y ceros de un sistema de tiempo discreto, tal como hicimos en el caso de tiempo continuo (vea la sección 6.5).

Es importante destacar que, si la entrada $x[n]$ es diferente de cero para al menos un valor positivo de $n$, tal que $X(z) \neq 0$, entonces ambos lados de la representación de la función de transferencia (7.95) puede dividirse entre $X(z)$, lo que arroja

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \tag{7.97}$$

Entonces, la función de transferencia $H(z)$ es igual a la razón de las transformadas $z$ de la salida y la entrada. Observe que, debido a que $H(z)$ es única, la razón $Y(z)/X(z)$ no puede cambiar cuando la entrada $x[n]$ está en el intervalo de cierta colección de señales de entrada. De (7.97) también vemos que $H(z)$ puede determinarse a partir de la respuesta de salida a cualquier entrada que no sea idéntica a cero, para $n \geq 0$.

---

### Ejemplo 7.21 Cálculo de la función de transferencia

Un sistema lineal e invariante en el tiempo discreto tiene una respuesta al pulso unitario

$$h[n] = 3(2^{-n}) \cos\left(\frac{\pi n}{6} + \frac{\pi}{12}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.98}$$

donde el argumento del coseno en (7.98) está en radianes. La función de transferencia del sistema, $H(z)$, es igual a la transformada $z$ de $h[n]$ dada por (7.98). Para calcular la transformada de $h[n]$, primero expanda el coseno en (7.98) utilizando la identidad trigonométrica

$$\cos(a + b) = (\cos a)(\cos b) - (\operatorname{sen} a)(\operatorname{sen} b) \tag{7.99}$$

Al aplicar (7.99) a (7.98) tenemos

$$\begin{aligned} h[n] &= 3(2^{-n})\left[\cos\left(\frac{\pi n}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{6}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)\right], \quad n \geq 0 \\ &= 2.898\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{\pi n}{6}\right) - 0.776\left(\frac{1}{2}\right)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{6}\right), \qquad n \geq 0 \end{aligned} \tag{7.100}$$

Si tomamos la transformada $z$ de (7.100) obtenemos

$$H(z) = 2.898\frac{z^2 - [0.5\cos(\pi/6)]z}{z^2 - [\cos(\pi/6)]z + 0.25} - 0.776\frac{[0.5\,\text{sen}(\pi/6)]z}{z^2 - [\cos(\pi/6)]z + 0.25}$$

$$= \frac{2.898z^2 - 1.449z}{z^2 - 0.866z + 0.25}$$

Si tanto $H(z)$ como $X(z)$ son funciones racionales de $z$, podemos calcular la respuesta de salida, primero expandiendo el producto $H(z)X(z)$ [o $H(z)X(z)/z$] en fracciones parciales. El siguiente ejemplo ilustra el proceso.

### Ejemplo 7.22 Cálculo de la respuesta al escalón

Suponga que el objetivo es calcular la respuesta al escalón del sistema del ejemplo 7.21, donde la respuesta al escalón es la salida resultante a la entrada escalón $x[n] = u[n]$, con cero condiciones iniciales. Al sustituir $X(z) = z/(z - 1)$ y $H(z)$ en $Y(z) = H(z)X(z)$, obtenemos

$$Y(z) = \frac{2.898z^3 - 1.449z^2}{(z - 1)(z^2 - 0.866z + 0.25)}$$

Debido a que los ceros de $z^2 - 0.866z + 0.25$ son complejos, evitamos la aritmética compleja expandiendo $Y(z)/z$ en la forma

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{cz + d}{z^2 - 0.866z + 0.25} + \frac{c_3}{z - 1}$$

donde

$$c_3 = \left[(z - 1)\frac{Y(z)}{z}\right]_{z=1} = \frac{2.898 - 1.449}{1 - 0.866 + 0.25} = 3.773$$

Así,

$$Y(z) = \frac{cz^2 + dz}{z^2 - 0.866z + 0.25} + \frac{3.773z}{z - 1} \tag{7.101}$$

Al colocar el lado derecho de (7.101) sobre un común denominador y al comparar coeficientes tenemos

$$c + 3.773 = 2.898$$

$$d - c - (0.866)(3.773) = -1.449$$

Si resolvemos para $c$ y $d$ tenemos

$$c = -0.875 \quad \text{y} \quad d = 0.943$$

Ahora, para determinar la transformada $z$ inversa del primer término del lado derecho de (7.101), establecemos

$$z^2 - 0.866z + 0.25 = z^2 - (2a\cos\Omega)z + a^2$$

Entonces,

$$a = \sqrt{0.25} = 0.5$$

$$\Omega = \cos^{-1}\left(\frac{0.866}{2a}\right) = \frac{\pi}{6}\text{rad}$$

y así

$$\frac{cz^2 + dz}{z^2 - 0.866z + 0.25} = \frac{-0.875z^2 + 0.943z}{z^2 - (\cos \pi/6)z + 0.25} \tag{7.102}$$

Si expresamos el lado derecho de (7.102) en la forma

$$\frac{\alpha(z^2 - 0.5(\cos \pi/6)z)}{z^2 - (\cos \pi/6)z + 0.25} + \frac{\beta(\text{sen } \pi/6)z}{z^2 - (\cos \pi/6)z + 0.25}$$

resulta en $\alpha = -0.875$ y

$$-0.5\alpha \cos\frac{\pi}{6} + \beta \,\text{sen}\frac{\pi}{6} = 0.943 \tag{7.103}$$

Al resolver (7.103) para $\beta$, tenemos $\beta = 1.128$. Así,

$$Y(z) = \frac{-0.875(z^2 - 0.5(\cos \pi/6)z)}{z^2 - (\cos \pi/6)z + 0.25} + \frac{1.128(\text{sen } \pi/6)z}{z^2 - (\cos \pi/6)z + 0.25} + \frac{3.773z}{z - 1}$$

Por último, al utilizar la tabla 7.3 obtenemos

$$y[n] = -0.875\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\frac{\pi n}{6} + 2.26\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{sen}\frac{\pi n}{6} + 3.773, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

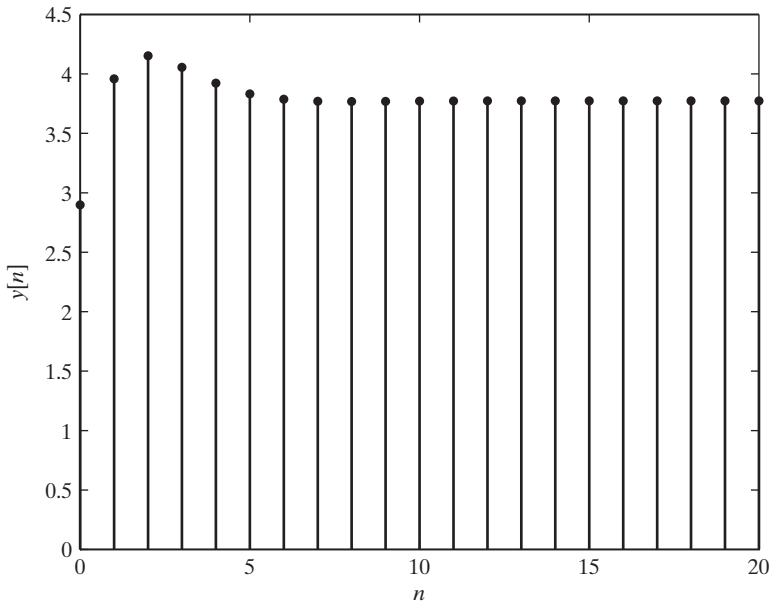



**FIGURA 7.3**
Respuesta al escalón del ejemplo 7.22.

También podemos calcular en forma numérica la respuesta al escalón mediante el comando `filter` de MATLAB. Para este ejemplo, los siguientes comandos calculan y grafican la respuesta al escalón:

```
num = [2.898 -1.449 0];
den = [1 -.866 .25];
n = 0:20;
u = ones(length(n));
y = filter(num,den,u);
stem(n,y,'filled')
```

La gráfica resultante de la respuesta al escalón aparece en la figura 7.3. Observe que la respuesta se establece en un valor de estado estable de 3.773, lo cual coincide con el valor límite de $y[n]$, que obtuvimos analizando la expresión anterior para $y[n]$.

Observe que los polos de $(z-1)Y(z)$ son $0.433 \pm j0.25$, que tienen una magnitud de 0.5. Entonces, debido a que los polos de $(z-1)Y(z)$ tienen una magnitud menor que 1, el teorema del valor final puede aplicarse para calcular el valor límite de $y[n]$. El resultado es

$$\lim_{n\to\infty} y[n] = [(z-1)Y(z)]_{z=1} = \left[\frac{2.898z^3 - 1.449z^2}{z^2 - 0.866z + 0.25}\right]_{z=1} = \frac{1.449}{0.384} = 3.773$$

lo que coincide con el valor anterior.

### 7.4.5 Función de transferencia para interconexiones

La función de transferencia de un sistema lineal e invariante en el tiempo discreto puede calcularse directamente a partir de un diagrama de flujo del sistema. Aquí utilizamos este método para los sistemas dados por una interconexión de elementos de retraso unitario y una interconexión de bloques. Los siguientes resultados son directamente análogos a los que dedujimos en la sección 6.6 para los sistemas lineales e invariantes en el tiempo continuo.

**Interconexiones de los elementos de retraso unitario.** El *elemento de retraso unitario* es un sistema cuya relación de entrada y salida está dada por

$$y[n] = x[n-1] \tag{7.104}$$

El sistema dado por (7.104) se conoce como el *elemento de retraso unitario*, ya que la salida $y[n]$ es igual a un retraso de una unidad de la entrada $x[n]$. Como muestra la figura 7.4, el elemento de retraso unitario se representa mediante un cuadro con una D, que significa "retraso" (delay).

Al tomar la transformada $z$ de ambos lados de (7.104), con $x[-1] = 0$, obtenemos la representación de la función de transferencia del elemento de retraso unitario:

$$Y(z) = z^{-1}X(z) \tag{7.105}$$

De (7.105) es evidente que la función de transferencia del elemento de retraso unitario es igual a $1/z$. Observe que el retraso unitario es la contraparte de tiempo discreto del integrador, en el sentido de que el retraso unitario tiene la función de transferencia $1/z$ y el integrador tiene la función de transferencia $1/s$.

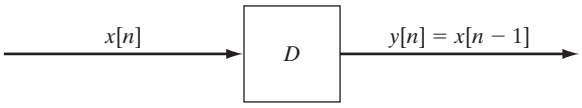



**FIGURA 7.4**
Elemento de retraso unitario.

Ahora suponga que un sistema de tiempo discreto está dado por una interconexión de retrasos unitarios, sumadores, restadores, y multiplicadores escalares. Podemos calcular la función de transferencia para cualquiera de estas interconexiones si trabajamos en el dominio $z$ con los retrasos unitarios representados por su función de transferencia $1/z$. El procedimiento es muy parecido al que consideramos en la sección 6.6 para los sistemas de tiempo continuo consistentes en interconexiones de integradores.

### Ejemplo 7.23 Cálculo de la función de transferencia

Considere el sistema de tiempo discreto dado por la interconexión de la figura 7.5. Observe que las salidas de los dos elementos de retraso unitario de la figura 7.4 se denotan como $q_1[n]$ y $q_2[n]$. La representación del sistema en el dominio $z$, con condiciones iniciales iguales a cero, aparece en la figura 7.6. En esta figura resulta claro que

$$zQ_1(z) = Q_2(z) + X(z) \tag{7.106}$$

$$zQ_2(z) = Q_1(z) - 3Y(z) \tag{7.107}$$

$$Y(z) = 2Q_1(z) + Q_2(z) \tag{7.108}$$

Al resolver (7.106) para $Q_1(z)$ y sustituir el resultado en (7.107) y (7.108), obtenemos

$$zQ_2(z) = z^{-1}Q_2(z) + z^{-1}X(z) - 3Y(z) \tag{7.109}$$

$$Y(z) = 2z^{-1}Q_2(z) + 2z^{-1}X(z) + Q_2(z) \tag{7.110}$$

Al resolver (7.109) para $Q_2(z)$ y sustituir el resultado en (7.110), obtenemos

$$Y(z) = \frac{2z^{-1} + 1}{z - z^{-1}}[z^{-1}X(z) - 3Y(z)] + 2z^{-1}X(z)$$

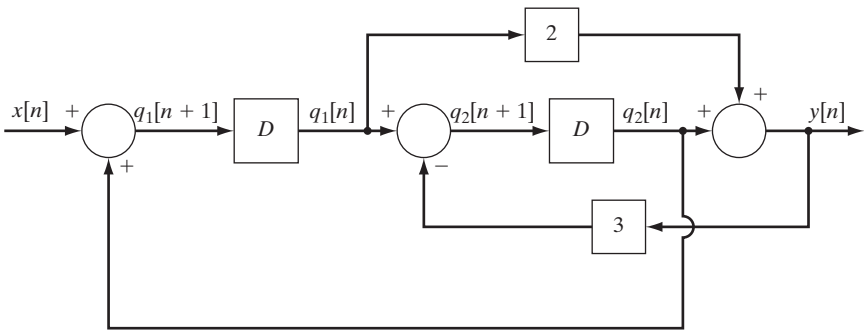



**FIGURA 7.5**
Sistema del ejemplo 7.23.

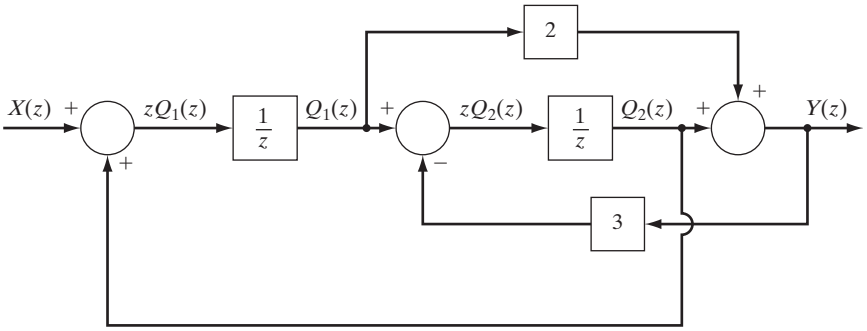



**FIGURA 7.6**
Representación del sistema en el dominio z.

Entonces,

$$\left[1 + \frac{3(2z^{-1} + 1)}{z - z^{-1}}\right]Y(z) = \frac{z^{-1}(2z^{-1} + 1)}{z - z^{-1}}X(z) + 2z^{-1}X(z)$$

$$\frac{z + 5z^{-1} + 3}{z - z^{-1}}Y(z) = \left[\frac{z^{-1}(2z^{-1} + 1)}{z - z^{-1}} + 2z^{-1}\right]X(z)$$

$$= \frac{z^{-1} + 2}{z - z^{-1}}X(z)$$

Así,

$$Y(z) = \frac{z^{-1} + 2}{z + 5z^{-1} + 3}X(z) = \frac{2z + 1}{z^2 + 3z + 5}X(z)$$

Por lo tanto, la función de transferencia es

$$H(z) = \frac{2z + 1}{z^2 + 3z + 5}$$

---

**Función de transferencia de interconexiones básicas.** La función de transferencia de conexiones en serie, en paralelo y de retroalimentación, tiene exactamente la misma forma que en el caso de tiempo continuo. Los resultados aparecen en la figura 7.7.

## 7.5 ANÁLISIS DE SISTEMAS MEDIANTE LA REPRESENTACIÓN DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

Considere el sistema lineal e invariante en el tiempo discreto, dado por la función de transferencia

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_M z^M + b_{M-1}z^{M-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_N z^N + a_{N-1}z^{N-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \tag{7.111}$$

Suponemos que el sistema es causal, y así $M \leq N$. También suponemos que los polinomios $B(z)$ y $A(z)$ no tienen factores comunes. Si existen factores comunes, deben cancelarse.

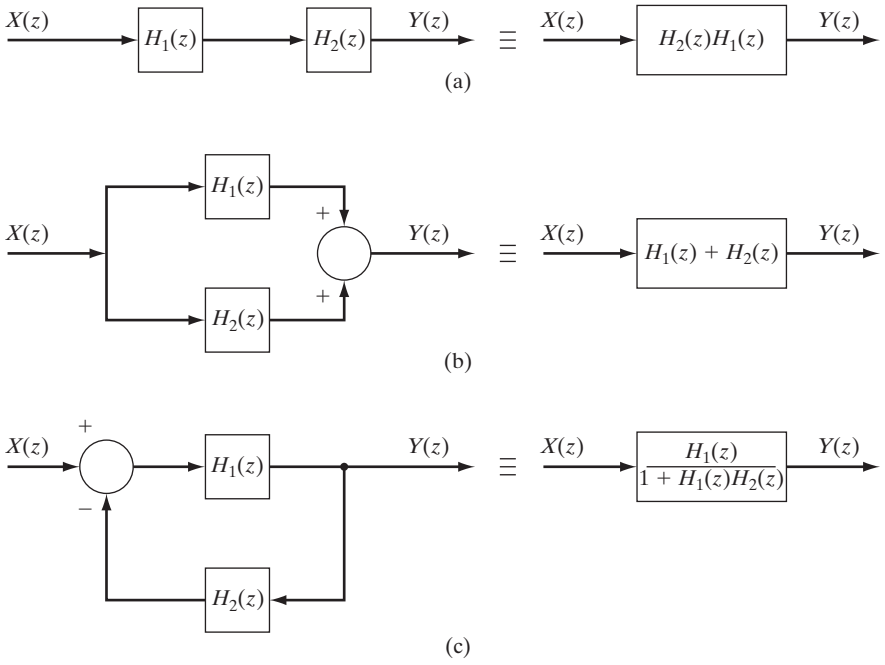



**FIGURA 7.7**
Funciones de transferencia de interconexiones básicas: (a) conexión en serie; (b) conexión en paralelo; (c) conexión de retroalimentación.

Como vimos en la sección 7.4, la función de transferencia $H(z)$ es la transformada $z$ de la respuesta al pulso unitario del sistema, $h[n]$. A partir del desarrollo en la sección 7.3 se desprende que la forma de la variación en el tiempo de $h[n]$ se determina directamente por medio de los polos del sistema, que son las raíces de $A(z) = 0$. En particular, si $H(z)$ tiene un polo real $p$, entonces $h[n]$ contiene un término de la forma $c(p)^n$, y si $H(z)$ tiene un par de polos complejos, $a \pm jb$, con magnitud $\sigma$ y ángulos $\pm \Omega$, entonces $h[n]$ contiene un término de la forma $c(\sigma)^n \cos(\Omega n + \theta)$. Si $H(z)$ tiene polos repetidos, contendrá términos de la forma $cn(n + 1)\ldots(n + i)(p)^n$ y/o $cn(n + 1)\ldots(n + i)\sigma^n \cos(\Omega n + \theta)$.

De la relación entre la forma de $h[n]$ y los polos de $H(z)$ se desprende que $h[n]$ converge en cero cuando $n \to \infty$ si y sólo si

$$|p_i| < 1 \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, N \tag{7.112}$$

donde $p_1, p_2, \ldots, p_N$ son los polos de $H(z)$. La condición (7.112) es equivalente a requerir que los polos se encuentren en el *disco unitario abierto* del plano complejo. El disco unitario abierto es esa parte del plano complejo, que consiste en todos los números complejos cuya magnitud es estrictamente menor que 1. El disco unitario abierto es la región tramada que aparece en la figura 7.8.

Se dice que un sistema de tiempo discreto con función de transferencia $H(z)$ dada por (7.111) es *estable* si su respuesta al pulso unitario $h[n]$ converge en cero cuando $n \to \infty$. Así, la estabilidad es equivalente a requerir que todos los polos del sistema se encuentren en el

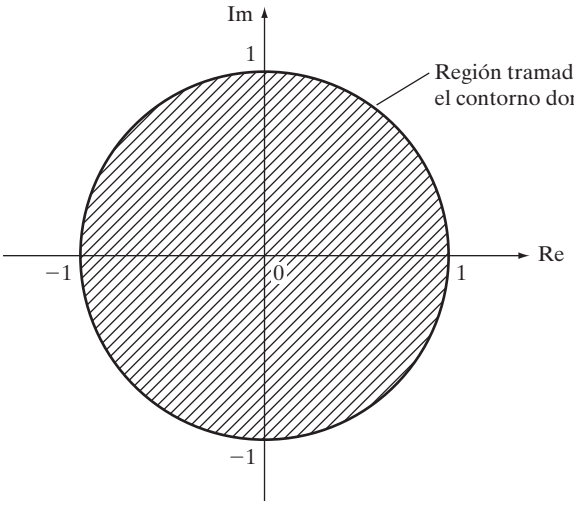



**FIGURA 7.8**
Disco unitario abierto.

disco unitario abierto del plano complejo. El sistema es marginalmente estable si la respuesta al pulso unitario $h[n]$ está limitada; es decir,

$$|h[n]| < c \quad \text{para toda } n \tag{7.113}$$

donde $c$ es una constante positiva finita. De la relación entre la forma de $h[n]$ y los polos de $H(z)$ también se desprende que un sistema es marginalmente estable si y sólo si $|p_i| \leq 1$ para todos los polos no repetidos de $H(z)$, y $|p_i| < 1$ para todos los polos repetidos. Esto equivale a requerir que todos los polos se encuentren en el disco unitario abierto, excepto por los polos no repetidos que pueden ubicarse en el *círculo unitario* (es decir, todos los números complejos $z$, tal que $|z| = 1$).

Por último, un sistema es inestable si la magnitud de $h[n]$ crece sin límite, cuando $n \to \infty$; es decir,

$$|h[n]| \to \infty \quad \text{cuando } n \to \infty \tag{7.114}$$

La condición de inestabilidad (7.114) es equivalente a tener uno o más polos ubicados fuera del disco unitario cerrado (todos los números complejos $z$, tal que $|z| > 1$), o a tener uno o más polos repetidos ubicados en el círculo unitario.

A partir de los resultados anteriores, vemos que el límite de la estabilidad en el caso de tiempo discreto es el círculo unitario del plano complejo.

La convergencia de $h[n]$ en cero resulta ser equivalente (cuando $H(z)$ es racional) a la total capacidad de suma de $h[n]$; es decir,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| < \infty \tag{7.115}$$

Así, la estabilidad equivale a la total capacidad de suma de la respuesta al pulso unitario $h[n]$. Además, la convergencia en cero de $h[n]$ es equivalente a la estabilidad de entrada limitada, salida limitada (BIBO), lo que implica que la salida $y[n]$ es una señal limitada, siempre

que la entrada $x[n]$ sea una señal limitada (suponiendo condiciones iniciales iguales a cero). En términos matemáticos, la estabilidad BIBO significa que siempre que $|x[n]| \leq c_1$, para toda $n$ y para alguna constante positiva finita $c_1$, entonces $|y[n]| \leq c_2$, para toda $n$ y para alguna constante positiva finita $c_2$, donde $y[n]$ es la respuesta a $x[n]$ con condiciones iniciales iguales a cero. Entonces, la estabilidad de un sistema (es decir, la convergencia en cero de $h[n]$) es equivalente a la estabilidad BIBO.

### 7.5.1 Respuesta a una entrada sinusoidal

De nuevo, considere un sistema lineal e invariante en el tiempo discreto y dimensionalmente finito, con la función de transferencia

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_M z^M + b_{M-1} z^{M-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \tag{7.116}$$

A través de esta sección, suponemos que el sistema es estable, y por lo tanto que todos los polos de $H(z)$ se encuentran en el disco unitario abierto del plano complejo. Podemos determinar las características de la respuesta en frecuencia del sistema si analizamos la respuesta a una entrada sinusoidal. En particular, sea que la entrada del sistema, $x[n]$, esté dada por

$$x[n] = C\cos(\Omega_0 n), n = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.117}$$

donde $C$ y $\Omega_0$ son números reales. De la tabla 7.3, vemos que la transformada $z$ de la entrada sinusoidal (7.117) es

$$X(z) = \frac{C[z^2 - (\cos \Omega_0)z]}{z^2 - (2\cos \Omega_0)z + 1}$$

Si las condiciones iniciales son cero, la transformada $z$ de la respuesta de salida resultante es

$$Y(z) = \frac{CB(z)[z^2 - (\cos \Omega_0)z]}{A(z)[z^2 - (2\cos \Omega_0)z + 1]}$$

Ahora,

$$z^2 - (2\cos \Omega_0)z + 1 = (z - \cos \Omega_0 - j \operatorname{sen} \Omega_0)(z - \cos \Omega_0 + j \operatorname{sen} \Omega_0)$$

$$= (z - e^{j\Omega_0})(z - e^{-j\Omega_0})$$

y por lo tanto,

$$Y(z) = \frac{CB(z)[z^2 - (\cos \Omega_0)z]}{A(z)(z - e^{j\Omega_0})(z - e^{-j\Omega_0})}$$

Al dividir $Y(z)$ entre $z$ obtenemos

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{CB(z)(z - \cos \Omega_0)}{A(z)(z - e^{j\Omega_0})(z - e^{-j\Omega_0})}$$

Al eliminar los términos $z - e^{j\Omega_0}$ y $z - e^{-j\Omega_0}$ tenemos

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{\eta(z)}{A(z)} + \frac{c}{z - e^{j\Omega_0}} + \frac{\overline{c}}{z - e^{-j\Omega_0}}$$

donde $\eta(z)$ es un polinomio en $z$, con el grado de $\eta(z)$ menor que $N$. La constante $c$ está dada por

$$\begin{aligned} c &= \left[ (z - e^{j\Omega_0}) \frac{Y(z)}{z} \right]_{z=e^{j\Omega_0}} \\ &= \left[ \frac{CB(z)(z - \cos \Omega_0)}{A(z)(z - e^{-j\Omega_0})} \right]_{z=e^{j\Omega_0}} \\ &= \frac{CB(e^{j\Omega_0})(e^{j\Omega_0} - \cos \Omega_0)}{A(e^{j\Omega_0})(e^{j\Omega_0} - e^{-j\Omega_0})} \\ &= \frac{CB(e^{j\Omega_0})(j \operatorname{sen} \Omega_0)}{A(e^{j\Omega_0})(j2 \operatorname{sen} \Omega_0)} \\ &= \frac{CB(e^{j\Omega_0})}{2A(e^{j\Omega_0})} = \frac{C}{2} H(e^{j\Omega_0}) \end{aligned}$$

Al multiplicar la expresión $Y(z)/z$ por $z$ tenemos

$$Y(z) = \frac{z\eta(z)}{A(z)} + \frac{(C/2)H(e^{j\Omega_0})z}{z - e^{j\Omega_0}} + \frac{(C/2)\overline{H(e^{j\Omega_0})}z}{z - e^{-j\Omega_0}} \tag{7.118}$$

Sea $y_{\text{tr}}[n]$ quien denote la transformada $z$ inversa de $z\eta(z)/A(z)$. Debido a que el sistema es estable, las raíces de $A(z) = 0$ se encuentran dentro del disco unitario abierto del plano complejo, y por lo tanto $y_{\text{tr}}[n]$ converge en cero cuando $n \to \infty$. Así, $y_{\text{tr}}[n]$ es la *parte transitoria* de la respuesta de salida resultante a la entrada sinusoidal $x[n] = C \cos(\Omega_0 n)$.

Ahora, sea $y_{\text{ss}}[n]$ quien denote la transformada $z$ inversa del segundo y tercer términos del lado derecho de (7.118). Si utilizamos la identidad trigonométrica (7.68), podemos escribir $y_{ss}[n]$ de la forma

$$y_{\text{ss}}[n] = C|H(e^{j\Omega_0})| \cos[\Omega_0 n + \angle H(e^{j\Omega_0})], \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.119}$$

Es claro que la respuesta $y_{\text{ss}}[n]$ no converge en cero cuando $n \to \infty$, y por lo tanto es la *parte en estado estable* de la respuesta de salida resultante a la entrada $x[n] = C \cos(\Omega_0 n)$.

Observe que la respuesta en estado estable a una entrada sinusoidal también es una sinusoide con la misma frecuencia, pero su amplitud está escalada por la cantidad $|H(e^{j\Omega_0})|$ y desplazada en fase por la cantidad $\angle H(e^{j\Omega_0})$. Este resultado corresponde al desarrollo dado en el capítulo 5 en términos de la transformada de Fourier de tiempo discreto (DTFT). De modo más preciso, de la formulación de la sección 5.5 se desprende directamente que la respuesta de salida $y[n]$ resultante de la entrada

$$x[n] = C \cos(\Omega_0 n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

está dada por

$$y[n] = C|H(\Omega_0)| \cos[\Omega_0 n + \angle H(\Omega_0)], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{7.120}$$

donde $H(\Omega_0)$ es el valor en $\Omega = \Omega_0$ de la DTFT $H(\Omega)$ de la respuesta al pulso unitario $h[n]$; es decir,

$$H(\Omega_0) = H(e^{j\Omega_0}) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] e^{-j\Omega_0 n}$$

Ahora, debido a que el sistema es estable, la respuesta al pulso unitario $h[n]$ es completamente sumable, y por lo tanto la DTFT de $h[n]$ es igual a la función de transferencia $H(z)$ evaluada en $z = e^{j\Omega}$; es decir,

$$H(\Omega) = H(z)|_{z=e^{j\Omega}} \tag{7.121}$$

Entonces, se desprende que las expresiones (7.119) y (7.120) para la respuesta de salida $y[n]$ son idénticas para $n \geq 0$ y, por lo tanto, el análisis de la función de transferencia anterior corresponde directamente al análisis de Fourier del capítulo 5.

Como definimos primero en la sección 5.5, la DTFT $H(\Omega)$ de $h[n]$ es la función de respuesta en frecuencia del sistema, y las gráficas de $|H(\Omega)|$ y $\angle H(\Omega)$ contra $\Omega$ son las gráficas de la magnitud y la fase del sistema. Debido a que

$$|H(e^{j\Omega_0})| = |H(\Omega)|_{\Omega=\Omega_0} \quad \text{y} \quad \angle H(e^{j\Omega_0}) = \angle H(\Omega)|_{\Omega=\Omega_0}$$

de (7.119) vemos que la respuesta en estado estable resultante a la entrada sinusoidal $x[n] = C\cos(\Omega_0 n)$ puede ser determinada directamente de las gráficas de magnitud y fase.

### 7.5.2 Cálculo de las curvas de respuesta en frecuencia a partir de la función de transferencia

Podemos utilizar MATLAB para calcular la función de respuesta en frecuencia $H(\Omega)$ directamente de la función de transferencia $H(z)$, dada por (7.116) con $M \leq N$. $H(z)$ puede definirse en MATLAB como una función de $z$, donde $z = e^{j\Omega}$, y $\Omega$ es un vector en el intervalo de $\Omega = 0$ a $\Omega = \pi$. La $H(z)$ resultante es un vector que contiene los valores de la función de respuesta en frecuencia, cuya magnitud y ángulo pueden graficarse contra $\Omega$. En la siguiente aplicación ilustramos el uso de MATLAB.

### 7.5.3 Filtrado de señales con ruido

De nuevo, considere una señal $x[n]$ dada por la forma aditiva $x[n] = s[n] + e[n]$, donde $s[n]$ es la parte lenta de $x[n]$, y $e[n]$ es la parte ruidosa de $x[n]$. El objetivo es filtrar $x[n]$ de tal manera que $e[n]$ se reduzca en magnitud lo más posible, y $s[n]$ pase con tan poca distorsión o retraso como sea posible. Como explicamos en la sección 5.6, esto puede lograrse mediante un filtro digital pasa bajas. Los filtros PM, PMPE y PMP de $N$ puntos, considerados en las secciones 2.1 y 5.6 son ejemplos de filtros digitales causales pasa bajas, cuya respuesta al pulso unitario $h[n]$ es de duración finita en el tiempo. En el procesamiento de señales digitales (DSP), tales filtros se conocen como filtros digitales FIR, donde FIR significa "respuesta finita al impulso" (en el DSP, la respuesta al pulso unitario $h[n]$ se conoce como respuesta al impulso). En un filtro digital FIR, la salida $y[n]$ en el tiempo $n$ depende sólo de

la entrada $x[i]$ en los tiempos $i = n, n-1, n-2, \ldots n-N+1$, para algún entero positivo $N$. Como vimos en la sección 2.3, se dice que tales filtros son no recursivos.

Un filtro digital recursivo (vea la sección 2.3) tiene una respuesta al impulso (o respuesta al pulso unitario) $h[n]$ de duración infinita en el tiempo. En DSP, estos filtros se conocen como filtros digitales IIR (respuesta infinito al impulso). Es evidente que podemos extender el filtro PMPE de $N$ puntos a un filtro IIR si tomamos $N = \infty$. Por lo tanto, la respuesta al impulso $h[n]$ del filtro IIR PMPE está dada por

$$h[n] = ab^n, n = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.122}$$

donde $0 < b < 1$, y la constante $a$ se elige de tal manera que el valor de la función de respuesta en frecuencia $H(\Omega)$ en $\Omega = 0$ sea igual a 1. Al tomar la transformada $z$ de ambos lados de (7.122) resulta en la siguiente función de transferencia para el filtro IIR PMPE:

$$H(z) = \frac{az}{z-b} \tag{7.123}$$

Entonces, si utilizamos (7.121) y establecemos $z = 1$ en el lado derecho de (7.123) obtenemos $H(0) = a/(1-b) = 1$, y por lo tanto, $a = 1 - b$.

De (7.123) con $a = 1 - b$, se desprende que el filtro IIR PMPE está dado por la siguiente recursividad:

$$y[n+1] - by[n] = (1-b)x[n+1] \tag{7.124}$$

Al reacomodar los términos en (7.124) y al sustituir $-by[n]$ por $(1-b)y[n] - y[n]$ obtenemos

$$y[n+1] = y[n] + (1-b)(x[n+1] - y[n]) \tag{7.125}$$

De (7.125) vemos que el siguiente valor $y[n+1]$ de la salida es igual a los valores previos de la salida $y[n]$, más un *término de actualización* igual a $(1-b)(x[n+1] - y[n])$.

Al establecer $b = 0$ en (7.125) resulta en la relación de entrada y salida $y[n+1] = x[n+1]$, y por lo tanto en este caso no existe filtrado. Conforme $b$ se incrementa desde cero, el filtro proporciona una marcada disminución en la magnitud de la función de respuesta en frecuencia, conforme $\Omega$ se incrementa de 0 a $\pi$. Para revelar esto, la función magnitud del filtro aparece en la figura 7.9a para los dos casos $b = 0.7$ y $b = 0.8$. La curva punteada en la figura 7.9a es el caso $b = 0.8$. En ambos casos, la función fase aparece en la figura 7.9b, donde, de nuevo, el caso $b = 0.8$ se grafica con puntos. Las funciones magnitud y fase, cuando $b = 0.8$ se generaron con los comandos de MATLAB

```
W = 0:.01:1;
OMEGA = W*pi;
z = exp(j*OMEGA);
Hz = 0.2*z./(z-0.8);
magH = abs(Hz);
angH = 180/pi*unwrap(angle(Hz));
```

Debemos destacar que el objetivo del comando `unwrap` es suavizar la gráfica de fase, ya que el comando `angle` puede dar como resultado saltos de $\pm 2\pi$. Además, se utiliza el operador elemento por elemento ".", ya que `z` es un vector.

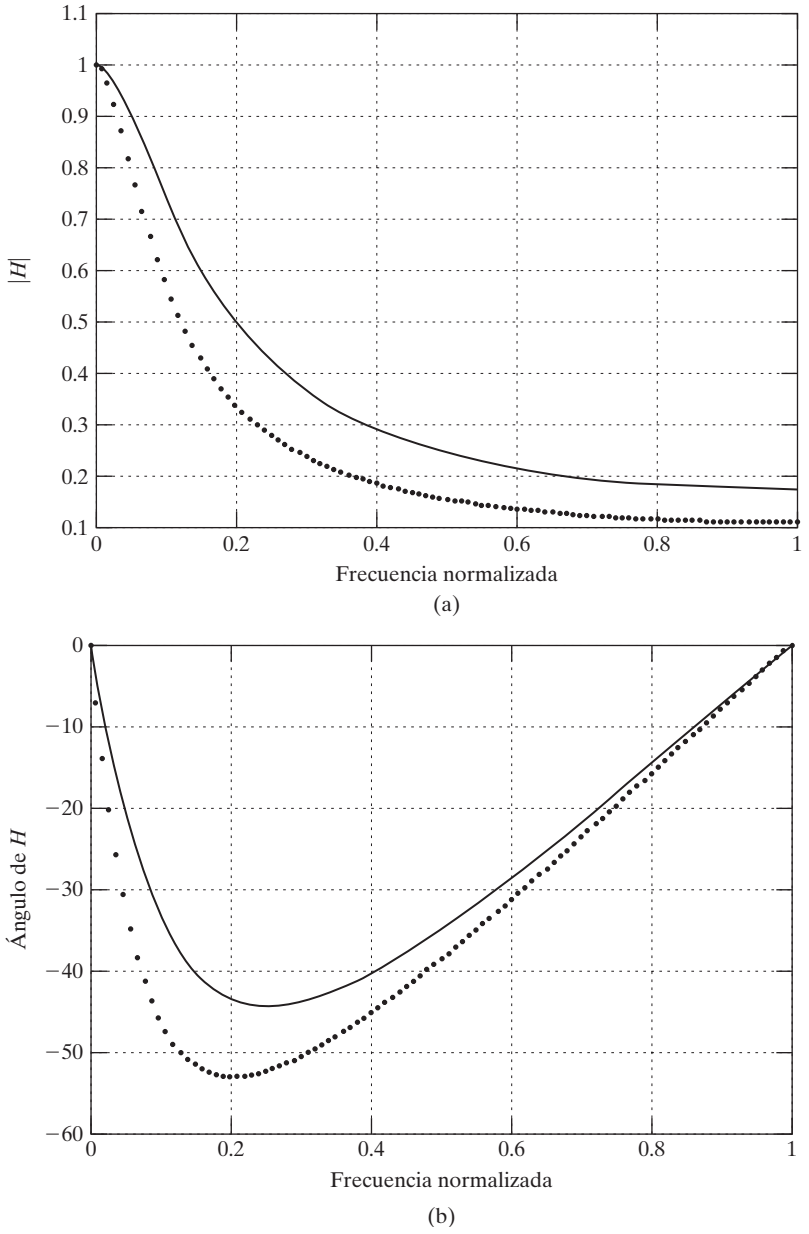



**FIGURA 7.9**
(a) Magnitud y (b) fase del filtro IIR PMPE, con $b = 0.7$ y $b = 0.8$ (línea punteada).

De la figura 7.9a vemos que la función magnitud del filtro IIR PMPE decae muy rápido cuando $\Omega$ se incrementa desde cero, y por lo tanto el filtro (con $b = 0.7$ o 0.8) tiene una excelente característica de pasa bajas. Sin embargo, las funciones fase que aparecen en la figura 7.9b, muestran que el filtro introduce un retraso importante para las componentes de baja frecuencia (las componentes de la parte lenta $s[n]$) de la entrada del filtro, $x[n]$. Para ser precisos, en el caso $b = 0.8$, la fase es aproximadamente igual a $-45^\circ = -0.25\pi$ radianes, cuando $\Omega = 0.1\pi$. Entonces, la pendiente de la curva de fase es aproximadamente igual a $-0.25\pi/0.1\pi = -2.5$, cuando $\Omega$ varía de $\Omega = 0$ a $\Omega = 0.1\pi$. Esto significa que el filtro IIR PMPE en el caso $b = 0.8$ retrasa 2.5 unidades de tiempo a las componentes de baja frecuencia de la entrada. Por lo tanto, al filtrar la información sobre precios de acciones, el filtro retrasa 2 días y medio la parte lenta de la información de precios. Para verificar esto, aplicamos el filtro al precio de cierre de QQQQ para el periodo de 50 días hábiles, del 1 de marzo de 2004 al 10 de mayo de 2004. La salida $y[n]$ del filtro y el precio de cierre $c[n]$ de QQQQ aparecen graficados para $n \geq 2$ en la figura 7.10. En dicha figura, los valores de $c[n]$ aparecen con 'o' y los valores de $y[n]$ con '*'. Observe que la respuesta del filtro que aparece en la figura 7.10 es casi tan suave como la respuesta del filtro PM en el día 11 que consideramos en la sección 1.4, la cual tiene un retraso de 5 días. Los comandos de MATLAB para generar las gráficas de la figura 7.10 son los siguientes:

```
c=csvread('QQQQdata2.csv',1,4,[1 4 50 4]);
y(1)=c(1);
for i=2:50,
   y(i)=y(i-1)+.2*(c(i)-y(i-1));
end
n=2:50;
plot(n,c(n),n,c(n),'o',n,y(n),n,y(n),'*')
```

El ciclo `for` del código implementa la recursividad, la cual también puede ser realizada por el comando `recur`, que generamos en el capítulo 2.

**Aplicación al mercado de acciones.** En la aplicación al mercado de acciones, el filtro IIR PMPE se conoce como filtro PME, donde PME significa "promedio móvil exponencial". El "filtro PME de $N$ días" que se utiliza en el mercado de acciones es el mismo que el filtro IIR PMPE definido previamente, con $b = (N - 1)/(N + 1)$. Este filtro no debe confundirse con el filtro PMPE de $N$ puntos, que definimos en la sección 2.1. Recuerde que el filtro PMPE de $N$ puntos es un filtro FIR, mientras que el filtro PME de $N$ días es un filtro recursivo dado por la ecuación en diferencias (7.125), con $b = (N-1)/(N + 1)$. En la estrategia de operaciones que daremos a continuación, mencionaremos al filtro definido por (7.125) como filtro PME. Este método particular para el mercado de acciones se conoce como método MACD, donde MACD significa "convergencia divergencia del promedio móvil". La información sobre el método MACD está disponible en el sitio Web; sólo escriba "MACD" en una máquina de búsqueda.

Dados dos valores de $b$, $b1$ y $b2$, con $b1 < b2$, sea $y1[n]$ quien denote la salida del filtro PME con $b = b1$, y sea $y2[n]$ quien denote la salida del filtro PME con $b = b2$. La entrada a los filtros es el precio de cierre de una acción como QQQQ. Observe que, debido a que $b1 < b2$, la salida $y1[n]$ del filtro PME con $b = b1$ será más "rápida" que la salida $y2[n]$ del filtro PME con $b = b2$. Entonces, cuando $y1[n]$ cruza sobre $y2[n]$ es una indicación de que "va al alza", lo que significa que la tendencia va en ascenso y que la acción debe comprarse.

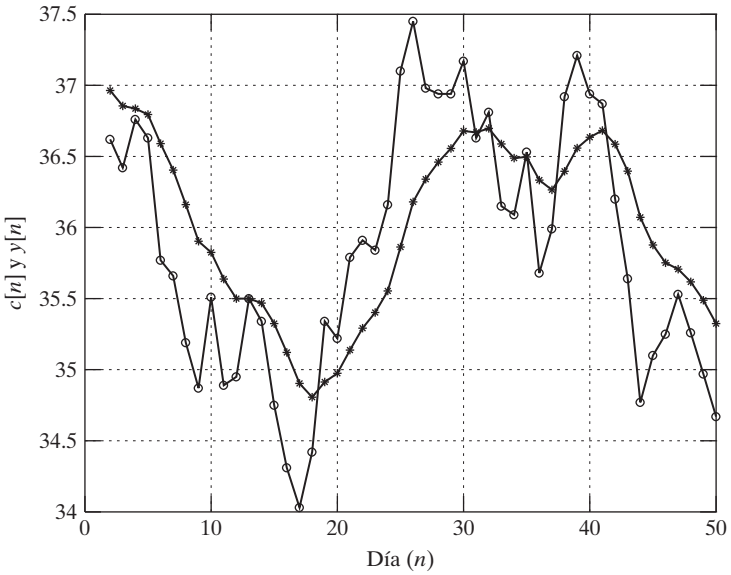



**FIGURA 7.10**
Gráfica de $c[n]$ y de la salida $y[n]$ del filtro IIR PMPE, con $b = 0.8$.

Por otra parte, cuando $y1[n]$ cae por debajo de $y2[n]$, es una indicación de que "va a la baja", lo que significa que la tendencia va en descenso y la acción debe venderse.

El grado en que este esquema funciona (en términos de producción de beneficios) depende de la elección de los valores de $b1$ y $b2$. Para una acción dada, los valores óptimos de $b1$ y $b2$ (en términos de incrementar al máximo los beneficios) cambiarán de periodo a periodo, de acuerdo con el patrón y la razón de cambio en la información de precios. No hay una ciencia exacta para seleccionar los valores para $b1$ y $b2$. Practicar la selección de $b1$ y $b2$ con información histórica es una buena manera de ganar experiencia para conseguir operaciones rentables.

Para ilustrar este método, aplicaremos a los filtros PME, con $b = 0.8$ y $b = 0.9$, el precio de cierre de QQQQ para el periodo de 149 días hábiles, que va del 1 de julio de 2004 al 1 de febrero de 2005. La "señal MACD" que es la diferencia $D[n] = y1[n] - y2[n]$ entre las salidas de los dos filtros, aparece en la figura 7.11a, para $n = 2$ a 149, y en la figura 7.11b aparece una gráfica del precio de cierre $c[n]$, dado para $n = 2$ a 149. La salida del filtro PME con $b = 0.8$ cruza sobre la salida del filtro PME con $b = 0.9$, cuando $D[n]$ se vuelve positiva, y la salida del filtro PME con $b = 0.8$ cae por debajo de la salida del filtro PME con $b = 0.9$, cuando $D[n]$ se vuelve negativa. En la figura 7.11a podemos ver (aunque los valores de $D[n]$ deben verificarse para estar seguros) que $D[n]$ se vuelve positiva en el día 40, y después se vuelve negativa en el día 130. Entonces, QQQQ debió comprarse al cierre del día 40 y después venderse al cierre del día 130. Esto habría dado una ganancia de $c[130] - c[40] = 38.78 - 34.40 = 4.38$ dólares por acción (sin incluir las comisiones). El porcentaje de ganancia es $(4.38/34.40)(100) = 12.7\%$.

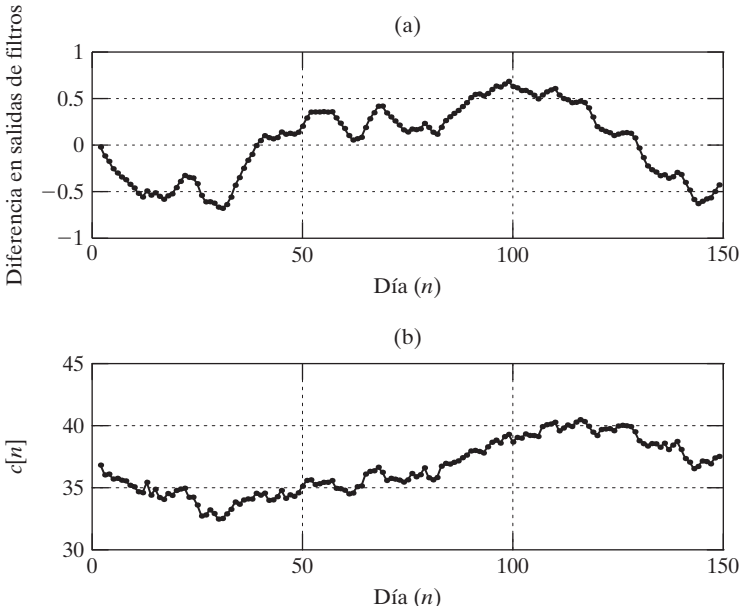



**FIGURA 7.11**
Gráficas de (a) diferencia en salidas de filtros y (b) precio de cierre $c[n]$.

El método MACD con $b = 0.8$ y 0.9 funciona bien (en términos de producir un buen rendimiento) para el intervalo de precios de cierre de QQQQ que aparece en la figura 7.11b, ya que el patrón de precios es una rampa (con ruido) que corre aproximadamente del día 30 al 120. Sin embargo, este método con $b = 0.8$ y 0.9 producirá una pérdida, en general, si los precios de cierre de QQQQ son cíclicos; es decir, los precios se mueven hacia arriba y hacia abajo con una diferencia importante de precios entre los picos y valles, y con 100 o menos días entre los picos. Por ejemplo, considere los precios de cierre de QQQQ que aparecen en la figura 7.12, los cuales cubren los 100 días hábiles del periodo del 1 de marzo de 2004 al 22 de julio de 2004. Si el enfoque MACD con $b = 0.8$ y 0.9 se aplica a los precios de cierre que aparecen en la figura 7.12, habría resultado en una pérdida (invitamos al lector a verificar esto). El método no funciona en este caso, ya que los precios de cierre de QQQQ son cíclicos con un periodo aproximado de 60 días. Los filtros PME con $b = 0.8$ y 0.9 son simplemente muy lentos, dada la variación de precios.

Para lograr una respuesta más rápida, pueden utilizarse los filtros PME con $b = 0.6$ y 0.8, lo que resulta en la señal MACD $D[n]$ que aparece en la figura 7.13, donde $D[n]$ es ahora la diferencia entre la salida del filtro PME con $b = 0.6$ y la salida del filtro PME con $b = 0.8$. Aplicar la estrategia de operaciones con la señal MACD que aparece en la figura 7.13 aún no da un buen resultado (en términos de lograr un buen rendimiento). Sin embargo, el método de operaciones puede modificarse de la siguiente forma para obtener un buen resultado: compre la acción el día de cierre $n$, si $D[n] > -\varepsilon$ y $D[n-1] < -\varepsilon$, donde $\varepsilon$ es un pequeño umbral positivo. Entonces, conserve las acciones hasta el día $n$, cuando $D[n] < D[n-1]$, en cuyo caso, venda las acciones al cierre de ese día. Después de vender las

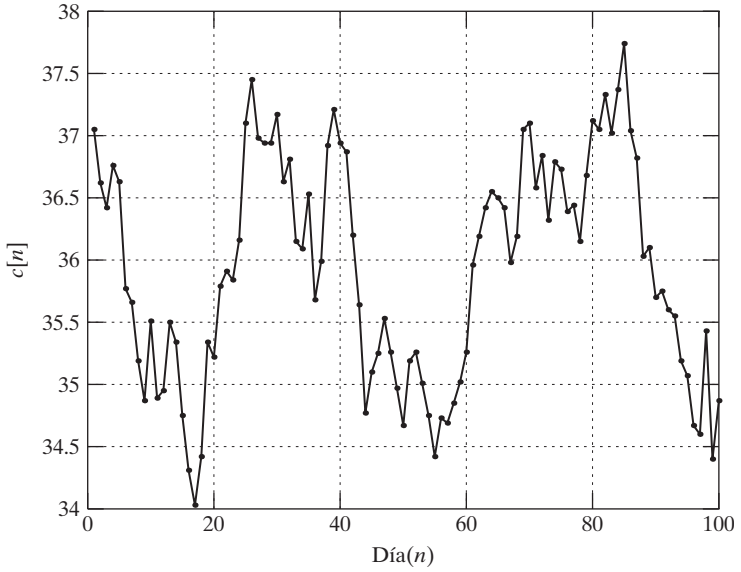



**FIGURA 7.12**
Precio de cierre de QQQQ del 1/3/04 al 22/7/04.

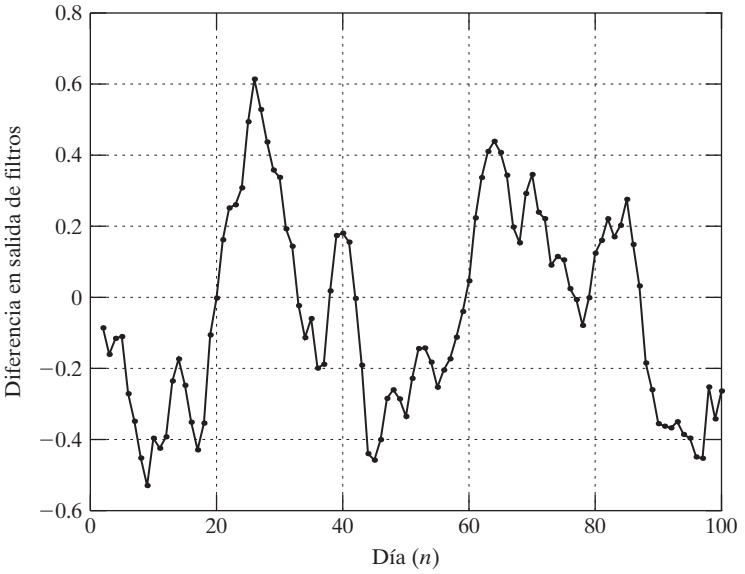



**FIGURA 7.13**
Gráfica de la diferencia en salida de filtros con $b = 0.6$ y 0.8 para la información que aparece en la figura 7.12.

acciones, espere hasta el día $n$, cuando $D[n] > -\varepsilon$ y $D[n-1] < -\varepsilon$, y entonces compre al cierre de ese día. Este proceso se repite una y otra vez.

Si este esquema con $\varepsilon = 0.05$ se aplica a la señal $D[n]$ que aparece en la figura 7.13, hay compras los días 20, 38, 59 y 79; y hay ventas los días 27, 41, 65 y 83. Esto resulta en un rendimiento neto de 3.53 dólares por acción, sin incluir las comisiones. Invitamos al lector a verificar esto.

Debemos resaltar que el método MACD modificado para negociar que mencionamos antes no siempre produce un beneficio y, por lo tanto, cualquiera que utilice esta estrategia para realmente negociar debe ser consciente del riesgo. Los autores y editores no son responsables por las pérdidas que puedan ocurrir como resultado de este método de negociación, o de cualquier otra estrategia comercial explicada en este libro.

Vale la pena mencionar que el método MACD para negociar puede modificarse mediante el uso de diferentes filtros en lugar de un filtro PME, tal como los filtros digitales IIR de dos polos que construimos en la sección 10.2.

## 7.6 RESUMEN DEL CAPÍTULO

La transformada $z$ es una herramienta muy útil para resolver ecuaciones en diferencias, encontrar la respuesta de un sistema de tiempo discreto, y analizar el comportamiento de un sistema de tiempo discreto. La transformada $z$ bilateral se define como

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Obtenemos la transformada $z$ unilateral iniciando la suma en $n = 0$. Las dos formas son iguales cuando $x[n] = 0$, para $n < 0$. Existen pares comunes de transformadas para funciones básicas, como el pulso unitario, escalón, rampa, exponencial con la forma $a^n u[n]$, y sinusoides. Las propiedades de la transformada $z$ incluyen la linealidad, los desplazamientos por la izquierda y por la derecha, la convolución y el teorema del valor final. La transformada $z$ inversa se determina con mayor facilidad mediante la expansión en fracciones parciales. Sin embargo, dicha expansión requiere que la expresión para $X(z)$ sea estrictamente propia; es decir, el grado del numerador debe ser menor que el del denominador. Debido a que $X(z)$ en general no es estrictamente propia, la expansión en fracciones parciales se realiza sobre $X(z)/z$, y después los términos resultantes se multiplican por $z$ para volver a formar una expresión para $X(z)$, que es una suma de términos encontrados en una tabla de pares de transformadas comunes.

La función de transferencia de un sistema de tiempo discreto se define como $H(z) = Y(z)/X(z)$, donde $X(z)$ es la transformada $z$ de la entrada y $Y(z)$ es la transformada $z$ de la salida, con condiciones iniciales iguales a cero. La propiedad de convolución de la transformada $z$ se utiliza para relacionar esta relación de entrada y salida con la relación en el dominio de tiempo, definida por la representación de convolución dada en el capítulo 2, donde $H(z)$ es la transformada $z$ de la respuesta al pulso unitario $h[n]$. Las interconexiones de sistemas pueden representarse por diagramas de bloques, donde cada bloque contiene una función de transferencia. Los diagramas de bloque comunes incluyen conexiones en paralelo, en serie y de retroalimentación. Cada uno de estos tipos de conexiones puede reducirse a un solo bloque que contenga la función de transferencia del sistema combinado. Un diagrama de bloques más complejo puede reducirse de manera similar a un bloque mediante la reducción sucesiva de cualquier conexión en serie, paralelo o de retroalimentación, en el diagrama de bloques.

Una función de transferencia caracteriza la respuesta transitoria de un sistema. En particular, los polos de la función de transferencia aparecen en la representación del dominio de tiempo de la respuesta del sistema. Por ejemplo, un polo en $p$ resulta en un término en la respuesta de $p^n$. Es claro que, si el polo tiene una magnitud mayor que 1, la respuesta crecerá con el tiempo. Un sistema es estable si todos sus polos se encuentran dentro del círculo unitario, es decir, tienen magnitud menor que 1. Un sistema es inestable si al menos uno de los polos se encuentra fuera del círculo unitario, y un sistema es marginalmente estable si no es inestable y si tiene al menos un polo sobre el círculo unitario.

La función de transferencia de un sistema, $H(z)$, está relacionada con la respuesta en frecuencia del sistema, $H(\Omega)$, mediante la relación $z = e^{j\Omega}$. En el capítulo 5 vimos que la respuesta en frecuencia se utiliza para determinar la respuesta de un sistema a señales de diferentes frecuencias. Además, la forma de la respuesta en frecuencia determina el tipo de filtrado presente en el sistema, es decir, qué intervalos de frecuencia están atenuados. En este capítulo presentamos un ejemplo del filtro pasa bajas, IIR PMPE.

## PROBLEMAS

**7.1.** Considere la señal de tiempo discreto $x[n]$, donde

$$x[n] = \begin{cases} b^n, & \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \\ 0, & \text{para cualquier otra } N \end{cases}$$

Aquí, $b$ es un número real cualquiera y $N$ es un entero positivo.

**(a)** ¿Para qué valores reales de $b$, $x[n]$ posee una transformada $z$?

**(b)** Para los valores de $b$ determinados en el inciso (a), encuentre la transformada $z$ de $x[n]$. Exprese su respuesta como una razón de polinomios.

**7.2.** Una señal de tiempo discreto $x[n]$ tiene la transformada z

$$X(z) = \frac{z}{8z^2 - 2z - 1}$$

Determine la transformada $z$, $V(z)$, de las siguientes señales:

**(a)** $v[n] = x[n-4]u[n-4]$

**(b)** $v[n] = x[n+2]u[n+2]$

**(c)** $v[n] = \cos(2n)x[n]$

**(d)** $v[n] = e^{3n}x[n]$

**(e)** $v[n] = n^2x[n]$

**(f)** $v[n] = x[n] * x[n]$

**(g)** $v[n] = x[0] + x[1] + x[2] + \cdots + x[n]$

**7.3.** Calcule la transformada $z$ de las señales de tiempo discreto (a)-(i). Exprese su respuesta como una razón de polinomios en $z$, siempre que sea posible. Verifique su respuesta, mediante el comando `ztrans` de Symbolic Math Toolbox.

**(a)** $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1]$

**(b)** $x[n] = 1$ para $n = 0, 1$ y $x[n] = 2$ para toda $n \geq 2$ (i.e., $n = 2, 3, \ldots$)

**(c)** $x[n] = e^{0.5n}u[n] + u[n-2]$

**(d)** $x[n] = e^{0.5n}$ para $n = 0, 1$, y $x[n] = 1$ para toda $n \geq 2$

**(e)** $x[n] = \text{sen}(\pi n/2)u[n-2]$

**(f)** $x[n] = (0.5)^n nu[n]$

**(g)** $x[n] = u[n] - nu[n-1] + (1/3)^n u[n-2]$

**(h)** $x[n] = n$ para $n = 0, 1, 2$ y $x[n] = -n$ para toda $n \geq 3$
**(i)** $x[n] = (n - 1)u[n] - nu[n - 3]$
**(j)** $x[n] = (0.25)^{-n}u[n - 2]$

**7.4.** Mediante los pares de transformadas de la tabla 7.3 y las propiedades de la transformada $z$ de la tabla 7.2, determine la transformada $z$ de las siguientes señales de tiempo discreto:
**(a)** $x[n] = (\cos^2 \omega n)u[n]$
**(b)** $x[n] = (\text{sen}^2 \omega n)u[n]$
**(c)** $x[n] = n(\cos \omega n)u[n]$
**(d)** $x[n] = n(\text{sen } \omega n)u[n]$
**(e)** $x[n] = ne^{-bn}(\cos \omega n)u[n]$
**(f)** $x[n] = ne^{-bn}(\text{sen } \omega n)u[n]$
**(g)** $x[n] = e^{-bn}(\cos^2 \omega n)u[n]$
**(h)** $x[n] = e^{-bn}(\text{sen}^2 \omega n)u[n]$

**7.5.** Sea $x[n]$ una señal de tiempo discreto con $x[n] = 0$ para $n = -1, -2, \ldots$. Se dice que la señal $x[n]$ puede sumarse si

$$\sum_{n=0}^{\infty} x[n] < \infty$$

Si $x[n]$ puede sumarse, la suma $x_{\text{sum}}$ de $x[n]$ está definida por

$$x_{\text{sum}} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]$$

Ahora suponga que la transformada $X(z)$ de $x[n]$ puede expresarse de la forma

$$X(z) = \frac{B(z)}{a_N(z - p_1)(z - p_2)\cdots(z - p_N)}$$

donde $B(z)$ es un polinomio en $z$. Por medio del teorema del valor final, muestre que si $|p_i| < 1$ para $i = 1, 2, \ldots, N$, $x[n]$ puede sumarse, y

$$x_{\text{sum}} = \lim_{z \to 1} X(z)$$

**7.6.** Utilizando los resultados del problema 7.5, calcule $x_{\text{sum}}$ para las señales (a)-(d). En cada caso, suponga que $x[n] = 0$, para toda $n < 0$.
**(a)** $x[n] = a^n$, $|a| < 1$
**(b)** $x[n] = n(a^n)$, $|a| < 1$
**(c)** $x[n] = a^n \cos \pi n$, $|a| < 1$
**(d)** $x[n] = a^n \text{ sen}(\pi n/2)$, $|a| < 1$

**7.7.** Sean $p$ y $c$ números complejos definidos en coordenadas polares como $p = \sigma e^{j\Omega}$ y $c = |c|e^{j\angle c}$. Demuestre la siguiente relación:

$$cp^n + \bar{c}\,\bar{p}^n = 2|c|\sigma^n \cos(\Omega n + \angle c)$$

**7.8.** Una señal de tiempo discreto $x[n]$ tiene transformada $z$

$$X(z) = \frac{z + 1}{z(z - 1)}$$

Calcule $x[0]$, $x[1]$, y $x[10{,}000]$.

**7.9.** Calcule la transformada $z$ inversa $x[n]$ de las transformadas (a)-(h). Determine $x[n]$ para todos los enteros $n \geq 0$. Verifique su respuesta mediante el comando `iztrans` de Symbolic Math Toolbox.

**(a)** $X(z) = \dfrac{z}{z^2 + 1}$

**(b)** $X(z) = \dfrac{z^2}{z^2 + 1}$

**(c)** $X(z) = \dfrac{1}{z^2 + 1} + \dfrac{1}{z^2 - 1}$

**(d)** $X(z) = \dfrac{z^2}{z^2 + 1} + \dfrac{z}{z^2 - 1}$

**(e)** $X(z) = \dfrac{z^2 - 1}{z^2 + 1}$

**(f)** $X(z) = \dfrac{z + 2}{(z - 1)(z^2 + 1)}$

**(g)** $X(z) = \dfrac{z^2 + 2}{(z - 1)(z^2 + 1)}$

**(h)** $X(z) = \ln\left(\dfrac{2z - 1}{2z}\right)$

**7.10.** Para las transformadas dadas en el problema 7.9 (a)-(g), calcule en forma numérica la transformada $z$ inversa mediante el comando `filter`. Compare estos resultados con las respuestas obtenidas en forma analítica para $n = 0$ a $n = 5$.

**7.11.** Encuentre la transformada $z$ inversa $x[n]$ de las siguientes transformadas. Determine $x[n]$ para toda $n$.

**(a)** $X(z) = \dfrac{z + 0.3}{z^2 + 0.75z + 0.125}$

**(b)** $X(z) = \dfrac{5z + 1}{4z^2 + 4z + 1}$

**(c)** $X(z) = \dfrac{4z + 1}{z^2 - z + 0.5}$

**(d)** $X(z) = \dfrac{z}{16z^2 + 1}$

**(e)** $X(z) = \dfrac{2z + 1}{z(10z^2 - z - 2)}$

**(f)** $X(z) = \dfrac{z + 1}{(z - 0.5)(z^2 - 0.5z + 0.25)}$

**(g)** $X(z) = \dfrac{z^3 + 1}{(z - 0.5)(z^2 - 0.5z + 0.25)}$

**(h)** $X(z) = \dfrac{z + 1}{z(z - 0.5)(z^2 - 0.5z + 0.25)}$

**7.12.** Para cada una de las transformadas dadas en el problema 7.11, calcule numéricamente la transformada $z$ inversa mediante el comando `filter`. Compare estos resultados con las respuestas obtenidas en forma analítica.

**7.13.** Utilizando la transformada $z$, calcule la convolución $x[n]*v[n]$ para toda $n \geq 0$, donde

**(a)** $x[n] = u[n] + 3\delta[n - 1]$, $v[n] = u[n - 2]$

**(b)** $x[n] = u[n]$, $v[n] = nu[n]$

**(c)** $x[n] = \text{sen}(\pi n/2)u[n]$, $v[n] = e^{-n}u[n - 2]$

**(d)** $x[n] = u[n - 1] + \delta[n]$, $v[n] = e^{-n}u[n] - 2e^{-2n}u[n - 2]$

**7.14.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo discreto tiene la respuesta al pulso unitario

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{para } n = 1, 2, 3 \\ n - 2, & \text{para } n = 4, 5 \\ 0, & \text{para cualquier otra } n \end{cases}$$

Calcule la función de transferencia $H(z)$.

**7.15.** La entrada $x[n] = (-1)^n u[n]$ se aplica a un sistema lineal e invariante en el tiempo discreto. La respuesta de salida resultante $y[n]$, con condiciones iniciales iguales a cero, está dada por

$$y[n] = \begin{cases} 0, & \text{para } n < 0 \\ n + 1, & \text{para } n = 0, 1, 2, 3 \\ 0, & \text{para } n \geq 4 \end{cases}$$

Determine la función de transferencia $H(z)$ del sistema.

**7.16.** Para el sistema definido en el problema 7.15, calcule la respuesta de salida, $y[n]$, resultante de la entrada $x[n] = (1/n)(u[n - 1] - u[n - 3])$ con condiciones iniciales iguales a cero.

**7.17.** Un sistema es descrito por la ecuación en diferencias

$$y[n] + 0.7y[n - 1] = u[n]; \quad y[-1] = 1$$

**(a)** Encuentre una expresión analítica para $y[n]$.
**(b)** Verifique su resultado simulando el sistema con MATLAB.

**7.18.** Repita el problema 7.17 para el sistema descrito por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y[n] - 0.2y[n - 1] - 0.8y[n - 2] = 0; \quad y[-1] = 1, y[-2] = 1$$

**7.19.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo discreto es descrito por la ecuación en diferencias de entrada y salida

$$y[n + 2] + y[n] = 2x[n + 1] - x[n]$$

**(a)** Calcule la respuesta al pulso unitario, $h[n]$.
**(b)** Calcule la respuesta al escalón, $y[n]$.
**(c)** Calcule $y[n]$ para toda $n \geq 0$, cuando $x[n] = 2^n u[n]$ con $y[-1] = 3$ y $y[-2] = 2$.
**(d)** Una entrada $x[n]$ con $x[-2] = x[-1] = 0$ produce la respuesta de salida $y[n] = (\text{sen } \pi n)u[n]$ con condiciones iniciales iguales a cero. Determine $x[n]$.
**(e)** Una entrada $x[n]$ con $x[-2] = x[-1] = 0$ produce la respuesta de salida $y[n] = \delta[n - 1]$. Calcule $x[n]$.
**(f)** Verifique los resultados de los incisos (a)-(e) mediante simulación por computadora.

**7.20.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo discreto está dado por la ecuación en diferencias de entrada y salida

$$y[n] + y[n - 1] - 2y[n - 2] = 2x[n] - x[n - 1]$$

Encuentre una entrada $x[n]$ con $x[n] = 0$, para $n < 0$, que arroje la respuesta de salida $y[n] = 2(u[n] - u[n - 3])$ con condiciones iniciales $y[-2] = 2, y[-1] = 0$.

**7.21.** La entrada $x[n] = u[n] - 2u[n - 2] + u[n - 4]$ se aplica a un sistema lineal e invariante en el tiempo discreto. La respuesta resultante, con condiciones iniciales iguales a cero, es $y[n] = nu[n] - nu[n - 4]$. Calcule la función de transferencia $H(z)$.

**7.22.** Un sistema tiene la función de transferencia

$$H(z) = \frac{-0.4z^{-1} - 0.5z^{-2}}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.8z^{-1})}$$

**(a)** Calcule una expresión analítica para la respuesta al escalón.
**(b)** Verifique su resultado simulando la respuesta al escalón con MATLAB.

**7.23.** Repita el problema 7.22 para el sistema con la función de transferencia

$$H(z) = \frac{z^2 - 0.1}{z^2 - 0.6484z + 0.36}$$

**7.24.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo discreto tiene la función de transferencia

$$H(z) = \frac{z^2 - z - 2}{z^2 + 1.5z - 1}$$

**(a)** Calcule la respuesta al pulso unitario, $h[n]$, para toda $n \geq 0$.
**(b)** Calcule la respuesta al escalón, $y[n]$, para toda $n \geq 0$.
**(c)** Calcule los valores de salida $y[0], y[1], y[2]$, resultantes a la entrada $x[n] = 2^n \operatorname{sen}(\pi n/4) + \tan(\pi n/3), n = 0, 1, 2, \ldots$, con condiciones iniciales iguales a cero.
**(d)** Si es posible, encuentre una entrada $x[n]$ con $x[n] = 0$ para toda $n < 0$, tal que la respuesta de salida $y[n]$, resultante de $x[n]$ esté dada por $y[0] = 2, y[1] = -3$, y $y[n] = 0$ para toda $n \geq 2$. Suponga que las condiciones iniciales son iguales a cero.
**(e)** Verifique los resultados de los incisos (a)-(d) mediante simulación por computadora.

**7.25.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo discreto tiene la función de transferencia

$$H(z) = \frac{z}{(z - 0.5)^2(z^2 + 0.25)}$$

**(a)** Encuentre la respuesta al pulso unitario $h[n]$ para toda $n \geq 0$.
**(b)** Simule la respuesta al pulso unitario con MATLAB, y compare este resultado con el obtenido en forma analítica para $h[n]$ en el inciso (a).

**7.26.** La entrada $x[n] = (0.5)^n u[n]$ se aplica a un sistema lineal e invariante en el tiempo discreto, con las condiciones iniciales $y[-1] = 8$ y $y[-2] = 4$. La respuesta de salida resultante es

$$y[n] = 4(0.5)^n u[n] - n(0.5)^n u[n] - (-0.5)^n u[n]$$

Encuentre la función de transferencia $H(z)$.

**7.27.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo discreto tiene la función de transferencia

$$H(z) = \frac{3z}{(z + 0.5)(z - 0.5)}$$

La respuesta de salida resultante a la entrada $x[n] = u[n]$, y condiciones iniciales $y[-1]$ y $y[-2]$ es

$$y[n] = [(0.5)^n - 3(-0.5)^n + 4]u[n]$$

Determine las condiciones iniciales $y[-1], y[-2]$, y la parte de la respuesta de salida debida a las condiciones iniciales.

**7.28.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo discreto tiene la respuesta al pulso unitario $h[n]$ igual a la secuencia de Fibonacci; es decir, $h[0] = 0, h[1] = 1$, y $h[n] = h[n-2] + h[n-1]$ para $n \geq 2$. Muestre que la función de transferencia del sistema $H(z)$ es racional en $z$. Exprese $H(z)$ como una razón de polinomios, en potencias positivas de $z$.

**7.29.** Considere cada una de las siguientes funciones de transferencia:

**(i)** $H(z) = z/(z - 0.5)$
**(ii)** $H(z) = z/(z + 0.5)$
**(iii)** $H(z) = z/(z - 1)$
**(iv)** $H(z) = z/(z + 1)$
**(v)** $H(z) = z/(z - 2)$
**(vi)** $H(z) = z/(z + 2)$

- **(a)** Calcule el polo del sistema. A partir de la posición del polo, describa el tipo de comportamiento que esperaría en la respuesta transitoria.
- **(b)** Verifique su predicción en el inciso (a) determinando una expresión analítica para la respuesta al pulso unitario.
- **(c)** Simule la respuesta al pulso unitario, y compárela con la respuesta obtenida en forma analítica en el inciso (b).

**7.30.** Considere las siguientes funciones de transferencia:

**(i)** $H(z) = (z^2 - 0.75z)/(z^2 - 1.5z + 2.25)$
**(ii)** $H(z) = (z^2 - 0.5z)/(z^2 - z + 1)$
**(iii)** $H(z) = (z^2 - 0.25z)/(z^2 - 0.5z + 0.25)$

- **(a)** Calcule las posiciones de los polos. A partir de las posiciones de los polos, describa el tipo de comportamiento que esperaría en la respuesta transitoria.
- **(b)** Sin calcular la respuesta real, proporcione una expresión general para la respuesta al escalón.
- **(c)** Verifique su predicción simulando el sistema para una entrada escalón.

**7.31.** Mediante la representación del dominio $z$, determine las funciones de transferencia de los sistemas de tiempo discreto que aparecen en la figura P7.31.

**7.32.** Considere el sistema de tiempo discreto que aparece en la figura 7.32.

- **(a)** Determine la función de transferencia $H(z)$ del sistema.
- **(b)** Determine la ecuación en diferencias de entrada y salida del sistema.
- **(c)** Calcule la respuesta de salida $y[n]$, cuando $x[n] = 4u[n]$, con condiciones iniciales iguales a cero.

**7.33.** Considere la conexión en cascada que aparece en la figura P7.33. Determine la respuesta al pulso unitario $h_2[n]$ del sistema con función de transferencia $H_2(z)$, de tal manera que, cuando $x[n] = \delta[n]$ con condiciones iniciales iguales a cero, la respuesta $y[n]$ sea igual a $\delta[n]$.

**7.34.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo discreto está dado por la conexión con retroalimentación que aparece en la figura P7.34. En esta figura, $X(z)$ es la transformada $z$ de la entrada del sistema $x[n]$; $Y(z)$ es la transformada $z$ de la salida del sistema $y[n]$; y $H_1(z)$, $H_2(z)$ son las funciones de transferencia de los subsistemas dados por

$$H_1(z) = \frac{z}{z + 1}, \qquad H_2(z) = \frac{9}{z - 8}$$

- **(a)** Determine la respuesta al pulso unitario de todo el sistema.
- **(b)** Calcule la respuesta al escalón de todo el sistema.
- **(c)** Calcule $y[n]$ cuando $x[n] = (0.5)^n u[n]$ con $y[-1] = -3, y[-2] = 4$.
- **(d)** Calcule $y[n]$ cuando $x[n] = (0.5)^n u[n]$ con $y[-2] = 1, w[-1] = 2$, donde $w[n]$ es la salida del sistema con retroalimentación de la figura P7.34.
- **(e)** Verifique los resultados de los incisos (a)-(d) mediante simulación por computadora.

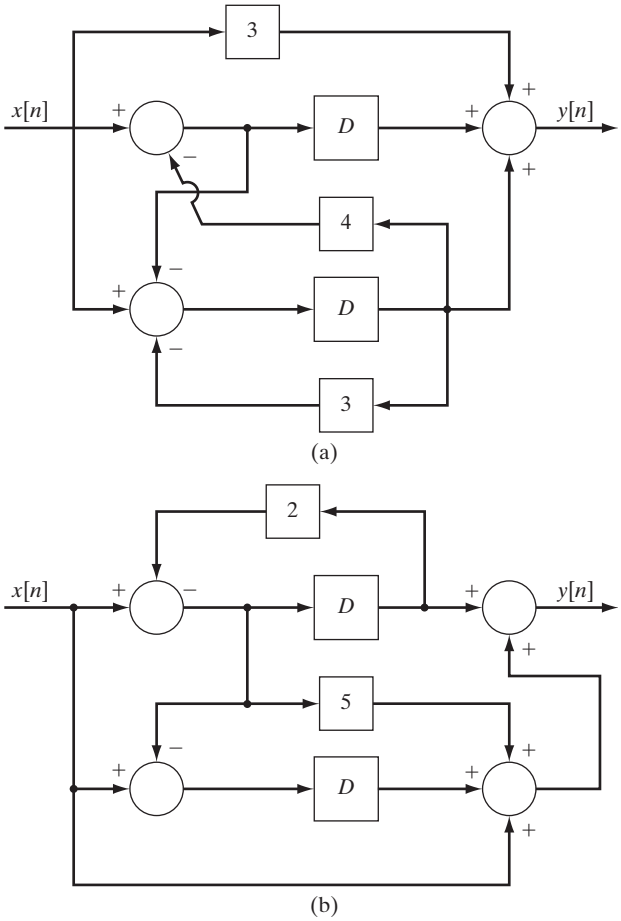



**FIGURA P7.31**

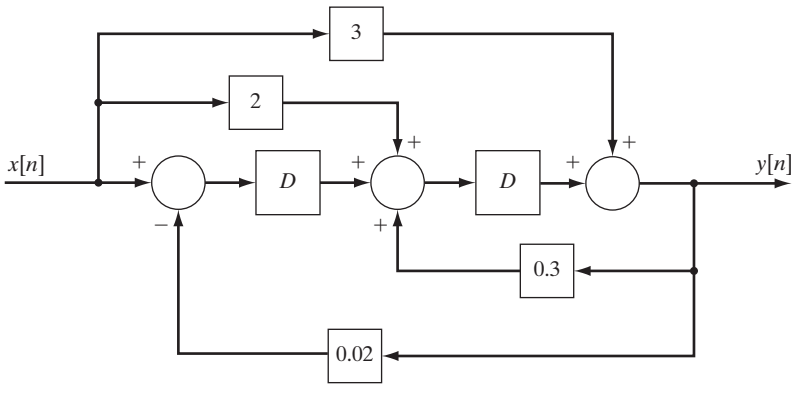



**FIGURA P7.32**

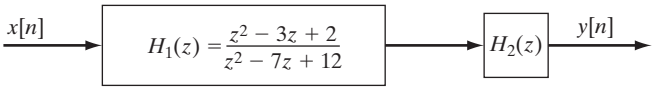



FIGURA P7.33

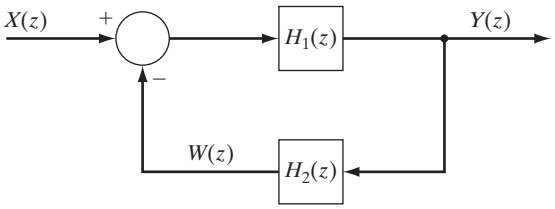



FIGURA P7.34

**7.35.** Un modelo para la generación de ecos aparece en la figura P7.35. Como se muestra, cada eco sucesivo es representado por una versión retrasada y escalada de la salida, la cual es retroalimentada hacia la entrada.

**(a)** Determine la función de transferencia $H(z)$ del sistema de ecos.

**(b)** Suponga que quisiéramos recuperar la señal original $x[n]$ a partir de la salida $y[n]$, mediante un sistema con función de transferencia $W(z)$ [y con entrada $y[n]$ y salida $x[n]$]. Determine $W(z)$.

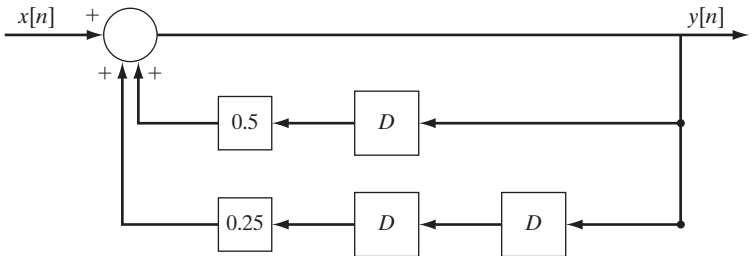



FIGURA P7.35

**7.36.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo discreto está dado por la conexión en cascada que aparece en la figura P7.36.

**(a)** Calcule la respuesta al pulso unitario de todo el sistema.

**(b)** Calcule la ecuación en diferencias de entrada y salida de todo el sistema.

**(c)** Calcule la respuesta al escalón de todo el sistema.

**(d)** Calcule $y[n]$ cuando $x[n] = u[n]$ con $y[-1] = 3, q[-1] = 2$.

**(e)** Calcule $y[n]$ cuando $x[n] = (0.5)^n u[n]$ con $y[-2] = 2, q[-2] = 3$.

**(f)** Verifique los resultados de los incisos (a) y (c) a (e) mediante simulación por computadora.

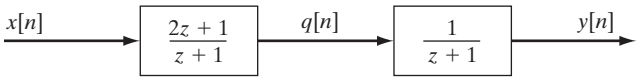



FIGURA P7.36

**7.37.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo discreto es excitado con la entrada $x[n] = \delta[n] + 2u[n-1]$. La respuesta de salida resultante con condiciones iniciales iguales a cero es $y[n] = (0.5)^n u[n]$. Determine si el sistema es estable, marginalmente estable, o inestable. Justifique su respuesta.

**7.38.** Determine si el sistema del problema 7.32 es estable, marginalmente estable, o inestable. Justifique su respuesta.

**7.39.** Un sistema de tiempo discreto está dado por la ecuación en diferencias de entrada y salida

$$y[n+2] - y[n+1] + y[n] = x[n+2] - x[n+1]$$

¿El sistema es estable, marginalmente estable, o inestable? Justifique su respuesta.

**7.40.** Para los siguientes sistemas lineales e invariantes en el tiempo discreto, con respuesta al pulso unitario $h[n]$, determine si el sistema es estable BIBO.

**(a)** $h[n] = \text{sen}(\pi n/6)(u[n] - u[n-10])$
**(b)** $h[n] = (1/n)u[n-1]$
**(c)** $h[n] = (1/n^2)u[n-1]$
**(d)** $h[n] = e^{-n}\,\text{sen}(\pi n/6)u[n]$

**7.41.** Determine si los siguientes sistemas lineales e invariantes en el tiempo discreto son estables:

**(a)** $H(z) = \dfrac{z-4}{z^2 + 1.5z + 0.5}$

**(b)** $H(z) = \dfrac{z^2 - 3z + 1}{z^3 + z^2 - 0.5z + 0.5}$

**(c)** $H(z) = \dfrac{1}{z^3 + 0.5z + 0.1}$

**7.42.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo discreto tiene la función de transferencia

$$H(z) = \frac{z}{z + 0.5}$$

**(a)** Encuentre la respuesta transitoria y la respuesta en estado estable que resultan de la entrada $x[n] = 5\cos 3n, n = 0, 1, 2, \ldots$, con condiciones iniciales iguales a cero.
**(b)** Esquematice las curvas de la respuesta en frecuencia.
**(c)** Grafique las curvas de la respuesta en frecuencia real, utilizando MATLAB..

**7.43.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo discreto tiene la función de transferencia

$$H(z) = \frac{-az + 1}{z - a}$$

donde $-1 < a < 1$.

**(a)** Calcule la respuesta transitoria y la respuesta en estado estable cuando la entrada $x[n] = \cos(\pi n/2)u[n]$, con condiciones iniciales iguales a cero.
**(b)** Cuando $a = 0.5$, esquematice las curvas de la respuesta en frecuencia.
**(c)** Muestre que $|H(\Omega)| = C$ para $0 \leq \Omega \leq 2\pi$, donde $C$ es una constante. Deduzca una expresión para $C$, en términos de $a$. Debido a que $|H(\Omega)|$ es constante, el sistema se conoce como *filtro pasa todo*.

**7.44.** Considere el sistema de tiempo discreto que aparece en la figura P7.44. Calcule la respuesta de salida en estado estable $y_{ss}[n]$, y la respuesta transitoria de salida $y_{tr}[n]$, cuando $y[-1] = x[-1] = 0$ y $x[n] = 2\cos(\pi n/2)u[n]$.

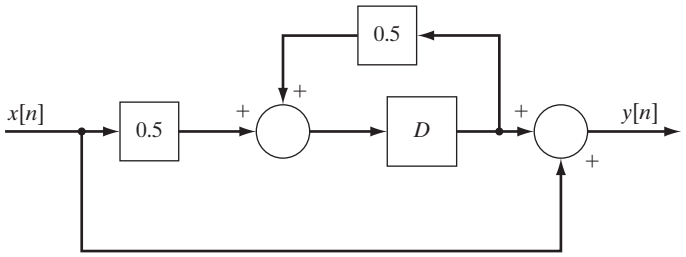



FIGURA P7.44

**7.45.** Un sistema de tiempo discreto está dado por la ecuación en diferencias de entrada y salida

$$y[n + 2] + 0.3y[n + 1] + 0.02y[n] = x[n + 1] + 3x[n]$$

**(a)** Calcule las respuestas transitoria y en estado estable, cuando $x[n] = (\cos \pi n)u[n]$, con condiciones iniciales iguales a cero.

**(b)** Utilice MATLAB para graficar las curvas de respuesta en frecuencia del sistema.

**7.46.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo discreto tiene la función de transferencia

$$H(z) = \frac{z}{(z^2 + 0.25)(z - 0.5)^2}$$

**(a)** Suponiendo que las condiciones iniciales son cero, encuentre las respuestas transitoria y en estado estable para $x[n] = 12\cos(\pi n/2)u[n]$.

**(b)** Utilice MATLAB para graficar las curvas de respuesta en frecuencia del sistema.

**7.47.** El *diferenciador* es el sistema en tiempo discreto con la ecuación en diferencias de entrada y salida

$$y[n] = x[n] - x[n - 1]$$

Utilice MATLAB para graficar las curvas de respuesta en frecuencia del diferenciador.

**7.48.** Como explicamos en la sección 7.5, el filtro IIR PMPE está dado por la función de transferencia $H(z) = (1 - b)z/(z - b)$, donde $0 < b < 1$. Observe que el polo del filtro se encuentra en $z = b$, y debido a que $b$ es positivo, el polo se encuentra en el eje real positivo del plano complejo.

**(a)** Considere el filtro IIR con la función de transferencia $H(z) = (1 - b)z/(z + b)$, donde $0 < b < 1$. Observe que el polo de este sistema se encuentra en el eje real negativo del plano complejo. Utilice MATLAB para graficar las curvas de respuesta en frecuencia del sistema, cuando $b = 0.8$. ¿Qué tipo de filtro es éste? Explique.

**(b)** Ahora considere la conexión en serie del filtro IIR PMPE y el filtro del inciso (b). La función de transferencia del filtro es

$$H(z) = \frac{(1 - b)^2 z^2}{(z - b)(z + b)}$$

Utilice MATLAB para graficar las curvas de respuesta en frecuencia del sistema, cuando $b = 0.8$. ¿Qué tipo de filtro es éste? Explique.

**7.49.** Para diversos valores de $b$ en el filtro PME, aplique la estrategia de operaciones MACD y la estrategia MACD modificada al precio de cierre de QQQQ para el periodo del 1 de febrero de 2005 al 1 de septiembre de 2005. Para los valores usados de $b$, ¿cuál es la ganancia o pérdida neta en este periodo?

CAPÍTULO

8

# Análisis de los sistemas de tiempo continuo mediante la representación de la función de transferencia

En la sección 7.5 del capítulo anterior utilizamos la representación de la función de transferencia para analizar el comportamiento de los sistemas de tiempo discreto. En este capítulo aplicaremos la función de transferencia para analizar los sistemas causales, lineales e invariantes en el tiempo continuo. Nuestra explicación comienza en las secciones 8.1 y 8.2 con el estudio de la estabilidad de un sistema de tiempo continuo. Luego, en la sección 8.3 utilizaremos la representación de la función de transferencia para estudiar las características básicas de la respuesta de salida resultante a una entrada, con especial atención en el caso de una entrada escalón. Mostraremos que los polos de un sistema determinan las características básicas de la respuesta transitoria que resulta de una entrada escalón. En la sección 8.4 utilizaremos la representación de la función de transferencia para estudiar la respuesta en estado estable que resulta de una entrada sinusoidal. Esto nos llevará al concepto de la función de respuesta en frecuencia de un sistema, la cual mencionamos en el capítulo 5. En la sección 8.5 desarrollaremos con detalle la función de respuesta en frecuencia; esto incluye la descripción de los datos de la respuesta en frecuencia en términos de diagramas de Bode. En la sección 8.6 aplicaremos el análisis de la función en frecuencia al estudio de los filtros causales, y en la sección 8.7 veremos un resumen del capítulo.

## 8.1 ESTABILIDAD Y LA RESPUESTA AL IMPULSO

Considere un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo, con una entrada $x(t)$ y salida $y(t)$. Supondremos a lo largo del capítulo que el sistema es dimensionalmente finito, y por lo tanto la función de transferencia del sistema $H(s)$ es racional en $s$; es decir,

$$H(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1}s^{M-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^N + a_{N-1}s^{N-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{8.1}$$

En el siguiente desarrollo supondremos que el orden $N$ del sistema es mayor o igual que $M$, y que la función de transferencia $H(s)$ no tiene polos y ceros comunes. Si existen ceros y polos comunes, deben cancelarse.

Como vimos primero en la sección 6.5, la función de transferencia $H(s)$ es la transformada de Laplace de la respuesta al impulso del sistema $h(t)$. Es decir, si la entrada $x(t)$ aplicada al sistema es el impulso $\delta(t)$, la transformada que resulta de la respuesta de salida es $H(s)$ (suponemos condiciones iniciales iguales a cero). Dado que $H(s)$ es la transformada de Laplace de la respuesta al impulso $h(t)$, podemos ver de los resultados de la sección 6.3 que la forma de la respuesta al impulso se determina de manera directa mediante los polos del sistema [es decir, los polos de $H(s)$]. En particular, si $H(s)$ tiene un polo real $p$, entonces $h(t)$ contiene un término de la forma $ce^{pt}$; y si $H(s)$ contiene un par complejo de polos

$\sigma \pm j\omega$, entonces $2(t)$ contiene un término de la forma $ce^{\sigma t}\cos(\omega t + \theta)$. Si $H(s)$ contiene polos repetidos, $h(t)$ contendrá términos de la forma $ct^i e^{pt}$ y/o $ct^i e^{\sigma t}\cos(\omega t + \theta)$.

A partir de la relación entre la forma $h(t)$ y los polos de $H(s)$ se desprende que la respuesta al impulso $h(t)$ tiende a cero cuando $t \to \infty$ si y sólo si

$$\text{Re}(p_i) < 0 \text{ para } i = 1, 2, \ldots, N \tag{8.2}$$

donde $p_1, p_2, \ldots, p_N$ son los polos de $H(s)$. La condición (8.2) equivale a requerir que todos los polos del sistema se encuentren ubicados en el semiplano izquierdo abierto; el semiplano izquierdo abierto es la región del plano complejo que consiste en todos los puntos a la izquierda del eje $j\omega$, sin incluir al eje $j\omega$. La figura 8.1 muestra el semiplano izquierdo abierto mediante la región tramada.

Se dice que un sistema con una función de transferencia $H(s)$ dada por (8.1) es *estable* si su respuesta al impulso $h(t)$ tiende a cero cuando $t \to \infty$. Así, un sistema es estable si y sólo si todos los polos se localizan en el semiplano izquierdo abierto.

Se dice que un sistema con una función de transferencia $H(s)$ es *marginalmente estable* si su respuesta al impulso $h(t)$ está limitada; es decir, si existe una constante positiva $c$ tal que

$$|h(t)| \leq c \quad \text{para toda } t \tag{8.3}$$

De nuevo, a partir de la relación entre la forma de $h(t)$ y de los polos de $H(s)$, podemos decir que un sistema es marginalmente estable si y sólo si $\text{Re}(p_i) \leq 0$ para todos los polos únicos (no repetidos) de $H(s)$, y $\text{Re}(p_i) < 0$ para todos los polos repetidos. Por lo tanto, un sistema es marginalmente estable si y sólo si todos los polos se encuentran en el semiplano izquierdo abierto, excepto que también pueden existir polos únicos sobre el eje $j\omega$.

Por último, un sistema es *inestable* si la respuesta al impulso $h(t)$ crece sin límites cuando $t \to \infty$. En términos matemáticos, el sistema es inestable si y sólo si

$$|h(t)| \to \infty \qquad \text{cuando } t \to \infty \tag{8.4}$$

La relación entre la forma de $h(t)$ y la de los polos revela que el sistema es inestable si y sólo si existe al menos un polo $p_i$ con $\text{Re}(p_i) > 0$, o si existe al menos un polo repetido $p_i$ con

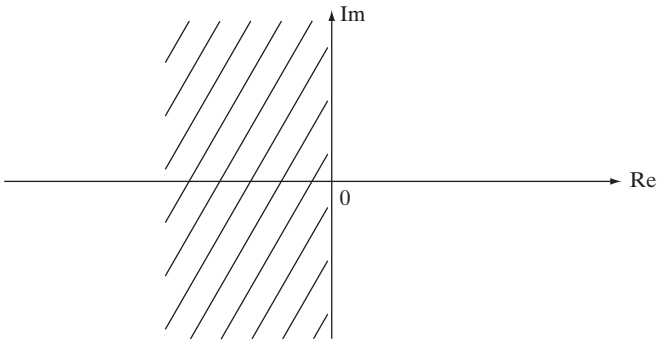



**FIGURA 8.1**
Semiplano izquierdo abierto.

$\text{Re}(p_i) = 0$. Así, un sistema es inestable si y sólo si existen uno o más polos en el semiplano derecho abierto (la región a la derecha del eje $j\omega$), o existen polos repetidos en el eje $j\omega$.

---

### Ejemplo 8.1 Circuito *RLC* en serie

Considere el circuito *RLC* que estudiamos en el ejemplo 6.37. En la figura 8.2 lo volvimos a dibujar. En el siguiente análisis suponemos que $R > 0, L > 0$, y $C > 0$. Como calculamos en el ejemplo 6.37, la función de transferencia $H(s)$ del circuito es

$$H(s) = \frac{1/LC}{s^2 + (R/L)s + 1/LC}$$

De la función cuadrática, los polos del sistema son

$$p_1, p_2 = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{b}$$

donde

$$b = \left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}$$

Ahora, si $b < 0$, ambos polos son complejos con parte real igual a $-R/2L$, y por lo tanto en este caso el circuito es estable. Si $b \geq 0$, ambos polos son reales. En este caso,

$$-\frac{R}{2L} - \sqrt{b} < 0$$

Además, $b \geq 0$ implica que

$$b < \left(\frac{R}{2L}\right)^2$$

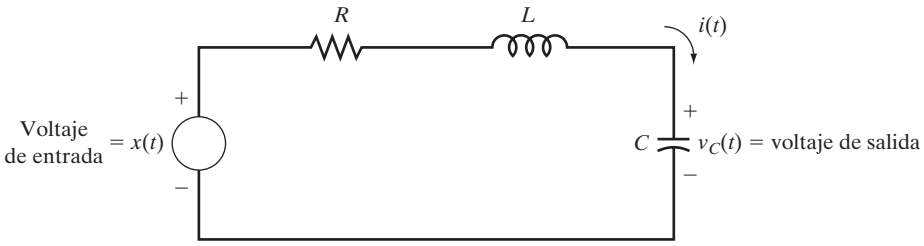



**FIGURA 8.2**
Circuito *RLC* en serie del ejemplo 8.1

y así,

$$\sqrt{b} < \frac{R}{2L}$$

Por lo tanto,

$$-\frac{R}{2L} + \sqrt{b} < 0$$

y de este modo el circuito sigue siendo estable. Es decir, el circuito es estable para cualquier valor de $R, L, C > 0$. Esto significa que si aplicamos una entrada impulso de voltaje $x(t)$ al circuito, con condiciones iniciales iguales a cero, el voltaje $v_c(t)$ a lo largo del capacitor tiende a cero cuando $t \to \infty$.

### 8.1.1 Caracterizaciones alternativas de la estabilidad

De nuevo considere el sistema con la función racional de transferencia $H(s)$ dada por 8.1. Podemos resaltar que la respuesta al impulso del sistema $h(t)$ convergerá a cero cuando $t \to \infty$ si y sólo $h(t)$ es totalmente integrable; es decir,

$$\int_0^\infty |h(t)|\, dt < \infty \tag{8.5}$$

De este modo, la estabilidad del sistema equivale a la integración total de la respuesta al impulso del sistema.

Ahora, sea $y(t)$ quien denote la respuesta de salida del sistema que resulta de la entrada $x(t)$ aplicada para $t \geq 0$, con condiciones iniciales iguales a cero. Se dice que el sistema tiene *estabilidad de entrada limitada, salida limitada* (*BIBO*) si $y(t)$ está limitada cuando la entrada $x(t)$ está limitada. En términos matemáticos, esto significa que si $|x(t)| \leq c_1$ para toda $t$, donde $c_1$ es una constante finita positiva, entonces el resultado de salida (con condiciones iniciales iguales a cero) satisface la condición

$$|y(t)| \leq c_2 \qquad \text{para toda } t$$

donde $c_2$ es una constante finita positiva [que, por lo general, depende de $x(t)$]. Podemos ver que la estabilidad BIBO es equivalente a la condición de integración (8.5). Entonces, dado que (8.5) equivale a la condición de que $h(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, vemos que la estabilidad BIBO equivale a la estabilidad que definimos previamente. Debemos enfatizar que la validez de este resultado se basa en que suponemos que $H(s)$ es una función racional de $s$ y que no contiene polos ni ceros comunes.

## 8.2 PRUEBA DE ESTABILIDAD DE ROUTH-HURWITZ

Por los resultados de la sección 8.1, podemos verificar la estabilidad de un sistema mediante la función racional de transferencia $H(s) = B(s)/A(s)$, si primero determinamos los polos de $H(s)$, los cuales son las raíces para $A(s) = 0$. Podemos calcular los polos de $H(s)$ mediante el comando `roots` de MATLAB. En el capítulo 6 explicamos ya el uso de este comando.

Resulta que existen procedimientos que no requieren calcular los polos para evaluar la estabilidad de un sistema. Uno de esos procedimientos es la prueba de estabilidad de Routh-Hurwitz, la cual se basa en cálculos sencillos que involucran los coeficientes del polinomio $A(s)$. Los detalles son los siguientes.

Suponga que

$$A(s) = a_N s^N + a_{N-1}s^{N-1} + \cdots + a_1 s + a_0, a_N > 0 \tag{8.6}$$

Observe que el primer coeficiente $a_N$ de $A(s)$ puede ser cualquier número positivo diferente de cero. De acuerdo con los resultados de la sección 8.1, el sistema es estable si y sólo si todos los ceros de $A(s)$ están en el semiplano izquierdo abierto (OLHP). Una condición necesaria (pero no suficiente) para que éste sea el caso es que todos los coeficientes de $A(s)$ deben ser estrictamente positivos; esto es,

$$a_i > 0 \text{ para } i = 0, 1, 2, \ldots, N - 1 \tag{8.7}$$

Así, si $A(s)$ contiene uno o más coeficientes iguales a cero, o negativos, existe al menos un polo que no se encuentra en el OLHP, y el sistema no es estable. Aquí, la expresión "polo que no se encuentra en el OLHP" significa un polo localizado en el eje $j\omega$ o localizado en el semiplano derecho abierto (ORHP).

Debemos resaltar que, por lo general, la condición (8.7) no es suficiente para definir la estabilidad. En otras palabras, existen sistemas inestables para los cuales se satisface (8.7).

Ahora plantearemos la prueba de estabilidad de Routh-Hurwitz, la cual establece las condiciones suficientes y necesarias para la estabilidad. Dado el polinomio $A(s)$ definido por (8.6), el primer paso es construir el arreglo de Routh que aparece en la tabla 8.1.

Como podemos ver en la tabla 8.1, el arreglo de Routh contiene $N + 1$ filas, con las filas indexadas por las potencias de $s$. El número de columnas del arreglo es $(N/2) + 1$, si $N$ es par, o $(N + 1)/2$, si $N$ es impar. Las dos primeras columnas del arreglo de Routh se llenan con los coeficientes de $A(s)$, comenzando con el primer coeficiente de $a_N$. Los elementos de la tercera fila están dados por

$$b_{N-2} = \frac{a_{N-1}a_{N-2} - a_N a_{N-3}}{a_{N-1}} = a_{N-2} - \frac{a_N a_{N-3}}{a_{N-1}}$$

$$b_{N-4} = \frac{a_{N-1}a_{N-4} - a_N a_{N-5}}{a_{N-1}} = a_{N-4} - \frac{a_N a_{N-5}}{a_{N-1}}$$

$$\vdots$$

**TABLA 8.1** Arreglo de Routh

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $s^N$ | $a_N$ | $a_{N-2}$ | $a_{N-4}$ | $\ldots$ |
| $s^{N-1}$ | $a_{N-1}$ | $a_{N-3}$ | $a_{N-5}$ | $\ldots$ |
| $s^{N-2}$ | $b_{N-2}$ | $b_{N-4}$ | $b_{N-6}$ | $\ldots$ |
| $s^{N-3}$ | $c_{N-3}$ | $c_{N-5}$ | $c_{N-7}$ | $\ldots$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | |
| $s^2$ | $d_2$ | $d_0$ | 0 | $\ldots$ |
| $s^1$ | $e_1$ | 0 | 0 | $\ldots$ |
| $s^0$ | $f_0$ | 0 | 0 | $\ldots$ |

Los elementos en la cuarta fila están dados por

$$c_{N-3} = \frac{b_{N-2}a_{N-3} - a_{N-1}b_{N-4}}{b_{N-2}} = a_{N-3} - \frac{a_{N-1}b_{N-4}}{b_{N-2}}$$

$$c_{N-5} = \frac{b_{N-2}a_{N-5} - a_{N-1}b_{N-6}}{b_{N-2}} = a_{N-5} - \frac{a_{N-1}b_{N-6}}{b_{N-2}}$$

$$\vdots$$

Las otras filas (si existen) las calculamos de manera similar. Para verificar los cálculos, se debe cumplir que el último elemento diferente de cero en cada columna del arreglo sea igual al coeficiente $a_0$ de $A(s)$.

La prueba de estabilidad de Routh-Hurwitz establece que el sistema es estable (todos los polos en el OLHP) si y sólo si todos los elementos en la primera columna del arreglo de Routh son estrictamente positivos ($>0$). Además, el número de polos en el ORHP es igual al número de cambios de signo en la primera columna.

Podría suceder que al calcular el arreglo de Routh, un elemento de la primera columna fuese igual a cero, en cuyo caso no es posible realizar la división para calcular los elementos de la fila subsiguiente. A partir de la prueba de estabilidad de Routh-Hurwitz resulta claro que el sistema no es estable. Con el objeto de determinar si el sistema es marginalmente estable o inestable, debemos completar el arreglo. Para lograr esto, reemplace el elemento igual a cero con $\varepsilon$ (un entero positivo muy pequeño), y luego continúe (observe que si sustituimos cualquier elemento igual a cero por números positivos muy pequeños, el último elemento diferente de cero en las columnas del arreglo de Routh no será igual a $a_0$). El número de cambios de signo en la primera columna del arreglo es igual al número de polos en el ORHP y, por lo tanto, la inexistencia de cambios de signo indicará polos sobre el eje $j\omega$.

En los siguientes ejemplos mostraremos la aplicación de la prueba de estabilidad de Routh-Hurwitz. La validación de la prueba de estabilidad de Routh-Hurwitz está más allá del alcance de este libro. Como veremos en los siguientes ejemplos, cuando el grado $N$ de $A(s)$ es menor o igual a 3, se puede utilizar la prueba de Routh-Hurwitz para derivar condiciones sencillas para la estabilidad, dadas de manera directa en términos de los coeficientes de $A(s)$.

### Ejemplo 8.2 Caso de segundo orden

Sea $N = 2$ y $a_2 = 1$, de modo que

$$A(s) = s^2 + a_1 s + a_0$$

El arreglo de Routh para este caso aparece en la tabla 8.2. Los elementos en la primera columna del arreglo de Routh son 1, $a_1$ y $a_0$; entonces los polos se encuentran en el OLHP si y sólo si los

**TABLA 8.2** Arreglo de Routh en el caso $N = 2$

| | | |
|---|---|---|
| $s^2$ | 1 | $a_0$ |
| $s^1$ | $a_1$ | 0 |
| $s^0$ | $\frac{a_1 a_0 - (1)(0)}{a_1} = a_0$ | 0 |

coeficientes $a_1$ y $a_0$ son positivos. En este caso, la condición de coeficientes positivos (8.7) es necesaria y suficiente para la estabilidad. Ahora, suponga que, $a_1 > 0$ y $a_0 < 0$, entonces existe un cambio de signo en la primera columna del arreglo de Routh, lo que significa que un polo se encuentra en el ORHP. Si $a_1 < 0$ y $a_0 < 0$, aún existe un cambio de signo, y por lo tanto un polo se encuentra en el ORHP. Si $a_1 < 0$ y $a_0 > 0$, entonces hay dos cambios de signo en la primera columna, y por lo tanto ambos polos se encuentran en el ORHP.

### Ejemplo 8.3 Caso de tercer orden

Considere el caso de tercer orden

$$A(s) = s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

La tabla 8.3 muestra el arreglo de Routh. Debido a que

$$a_1 - \frac{a_0}{a_2} > 0$$

si y sólo si

$$a_1 > \frac{a_0}{a_2}$$

entonces los tres polos se encuentran en el OLHP si y sólo si

$$a_2 > 0, \quad a_1 > \frac{a_0}{a_2}, \quad a_0 > 0$$

Este resultado muestra que cuando $N = 3$, no es verdad que el hecho de que $a_2$, $a_1$ y $a_0$ sean positivos implica que el sistema sea estable. Observe que si $a_2 < 0$ y $a_0 > 0$, existen dos cambios de signo en la primera columna del arreglo de Routh, y por lo tanto existen dos polos en el ORHP. Si $a_2 < 0$, $a_1 > a_0/a_2$, y $a_0 < 0$, existen tres cambios de signo, y por lo tanto todos los polos están en el ORHP. Si $a_2 < 0$, $a_1 < a_0/a_2$, y $a_0 < 0$, existe un cambio de signo, lo que significa que existe un polo en el ORHP.

**TABLA 8.3** El caso $N = 3$

| | | |
|---|---|---|
| $s^3$ | 1 | $a_1$ |
| $s^2$ | $a_2$ | $a_0$ |
| $s^1$ | $\dfrac{a_2 a_1 - (1)a_0}{a_2} = a_1 - \dfrac{a_0}{a_2}$ | 0 |
| $s^0$ | $a_0$ | 0 |

Conforme incrementamos $N$ por encima del valor $N = 3$, las condiciones para la estabilidad en términos de los coeficientes de $A(s)$ se vuelven aún más complicadas. Para $N \geq 4$, aún podemos aplicar la prueba de Routh-Hurwitz para un estudio de caso por caso.

### Ejemplo 8.4 Caso de un orden más alto

Suponga que $H(s) = B(s)/A(s)$, donde

$$A(s) = 6s^5 + 5s^4 + 4s^3 + 3s^2 + 2s + 1$$

Entonces, $N = 5$ y

$$a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4, a_4 = 5, a_5 = 6$$

En la tabla 8.4 podemos ver el arreglo de Routh para este ejemplo. Existen dos cambios de signo en la primera columna del arreglo de Routh, y entonces dos de los cinco polos se ubican en el semiplano derecho abierto. Por lo tanto, el sistema no es estable.

**TABLA 8.4** Arreglo de Routh para el ejemplo 8.4

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^5$ | $a_5 = 6$ | $a_3 = 4$ | $a_1 = 2$ |
| $s^4$ | $a_4 = 5$ | $a_2 = 3$ | $a_0 = 1$ |
| $s^3$ | $\dfrac{(5)(4) - (6)(3)}{5} = 0.4$ | $\dfrac{(5)(2) - (6)(1)}{5} = 0.8$ | 0 |
| $s^2$ | $\dfrac{(0.4)(3) - (5)(0.8)}{0.4} = -7$ | $a_0 = 1$ | 0 |
| $s^1$ | $\dfrac{(-7)(0.8) - (0.4)(1)}{-7} = 6/7$ | 0 | 0 |
| $s^0$ | $a_0 = 1$ | 0 | 0 |

También podemos utilizar la prueba Routh-Hurwitz para determinar los valores de los polos complejos ubicados sobre el eje $j\omega$: dada una función de transferencia racional $H(s) = B(s)/A(s)$, existe un par de polos sobre el eje $j\omega$ con todos los polos restantes en el semiplano izquierdo abierto si y sólo si todas las entradas de la primera columna del arreglo de Routh son estrictamente positivas, excepto para la entrada en la fila cuyo índice es $s^1$, el cual es igual a cero. Si éste es el caso, existe un par de polos en $\pm j\sqrt{a_0/\gamma_2}$, donde $\gamma_2$ es la entrada en la primera fila del arreglo de Routh, cuyo índice es $s^2$ y $a_0$ es el término constante de $A(s)$.

### Ejemplo 8.5 Caso de cuarto orden

Suponga que

$$A(s) = s^4 + s^3 + 3s^2 + 2s + 2$$

En la tabla 8.5 podemos ver el arreglo de Routh para este ejemplo. Observe que todas las entradas de la primera columna del arreglo son estrictamente positivas, excepto por la entrada en la fila cuyo índice es $s^1$, la cual es igual a cero. Como resultado, dos de los polos se encuentran en el semiplano izquierdo abierto, y los otros dos polos sobre el eje $j\omega$, localizados en $\pm j\sqrt{2/1} = \pm j\sqrt{2}$.

**TABLA 8.5** Arreglo de Routh para el ejemplo 8.5

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^4$ | 1 | 3 | 2 |
| $s^3$ | 1 | 2 | 0 |
| $s^2$ | $\frac{3-2}{1} = 1$ | 2 | 0 |
| $s^1$ | $\frac{2-2}{1} \approx \varepsilon$ | 0 | 0 |
| $s^0$ | $\frac{2\varepsilon - 0}{\varepsilon} = 2$ | 0 | 0 |

## 8.3 ANÁLISIS DE LA RESPUESTA AL ESCALÓN

Considere de nuevo el sistema con la función racional de transferencia $H(s) = B(s)/A(s)$, donde el grado de $B(s)$ es menor o igual que el grado de $A(s)$. Si aplicamos al sistema una entrada $x(t)$ para $t \geq 0$, con condiciones iniciales iguales a cero, entonces podemos ver a partir de los resultados de la sección 6.5 que la transformada $Y(s)$ de la respuesta de salida está dada por:

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} X(s) \tag{8.8}$$

Ahora suponga que $x(t)$ es la función escalón unitario $u(t)$, de manera que $X(s) = 1/s$. Entonces, al sustituir $X(s) = 1/s$ en el resultado (8.8) de la transformada de la respuesta al escalón

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)s} \tag{8.9}$$

Entonces, si $A(0) \neq 0$, "al sacar" el término $1/s$ de $Y(s)$ y utilizar la fórmula del residuo (6.67) obtenemos

$$Y(s) = \frac{E(s)}{A(s)} + \frac{c}{s} \tag{8.10}$$

donde $E(s)$ es un polinomio en $s$, y $c$ es la constante dada por

$$c = [sY(s)]_{s=0} = H(0)$$

Entonces, si tomamos la transformada inversa de Laplace de $Y(s)$, resulta en la respuesta al escalón

$$y(t) = y_1(t) + H(0), t \geq 0 \tag{8.11}$$

donde $y_1(t)$ es la transformada inversa de Laplace de $E(s)/A(s)$.

Observe que si el sistema es estable, es decir, que todas las raíces de $A(s) = 0$ están en el semiplano izquierdo abierto, el término $y_1(t)$ en (8.11) converge en cero mientras $t \to \infty$, en cuyo caso $y_1(t)$ es la *parte transitoria de la respuesta*. De modo que si el sistema es estable, la respuesta al escalón contiene un transitorio que decae hacia cero, y contiene una constante con valor $H(0)$. La constante $H(0)$ es el valor en *estado estable* de la respuesta al escalón.

Es muy importante observar que, dado que la transformada del término $y_1(t)$ en (8.11) es igual a $E(s)/A(s)$, la forma de $y_1(t)$ depende de los polos del sistema [los polos de $H(s)$]. Esto lo analizaremos con detalle a continuación, comenzando con los sistemas de primer orden.

### 8.3.1 Sistemas de primer orden

Considere el sistema dado por la función de transferencia de primer orden

$$H(s) = \frac{k}{s - p} \tag{8.12}$$

donde $k$ es una constante real y $p$ es el polo (el cual es real). Entonces con $x(t) = u(t)$, la transformada de $y(t)$ es igual a $H(s)/s$, y la expansión en fracciones parciales para $Y(s)$ es

$$Y(s) = \frac{-k/p}{s} + \frac{k/p}{s - p}$$

Si tomamos la transformada inversa de Laplace de $Y(s)$, obtendremos la siguiente respuesta al escalón:

$$y(t) = -\frac{k}{p}(1 - e^{pt}), \qquad t \geq 0 \tag{8.13}$$

En este caso, podemos expresar la respuesta al escalón $y(t)$ mediante la forma (8.11) con

$$y_1(t) = \frac{k}{p}e^{pt}, \quad t \geq 0$$

$$H(0) = -\frac{k}{p}$$

Observe que el comportamiento en el tiempo del término $y_1(t) = (k/p)\exp(pt)$ depende directamente de la ubicación del polo $p$ en el plano complejo. En particular, si $p$ se encuentra en el lado del semiplano derecho, el sistema será inestable, y $y_1(t)$ crecerá sin límite. Además, cuanto más a la derecha se encuentre el polo en el semiplano derecho, más rápida será la razón de crecimiento de $y_1(t)$. Por otra parte, si el sistema es estable, de manera que $p$ se ubique en el semiplano izquierdo abierto, entonces $y_1(t)$ decae a cero y así $y_1(t)$ es la parte transitoria de la respuesta. Observe que la razón a la cual el transitorio decae a cero depende de qué tan a la izquierda se encuentre el polo en el semiplano izquierdo. Además, dado que la respuesta al escalón es igual a $y_1(t) - k/p$, la razón a la cual la respuesta al escalón converge en la constante $-k/p$ es igual a la razón a la cual el transitorio decae a cero. En el siguiente ejemplo podemos verificar estas propiedades de la respuesta al escalón, mediante MATLAB. Existen varios métodos para calcular y graficar una respuesta al escalón en MATLAB: mediante Symbolic Math Toolbox, Simulink, y el comando `step`, disponible en el Control System Toolbox. Todos estos métodos los explicamos en los ejemplos 6.34-6.36.

### Ejemplo 8.6 Sistema de primer orden

Posiciones de los polos y la respuesta al escalón

Considere el sistema de primer orden dado por la función de transferencia (8.12), con $k = 1$. Dado cualquier valor específico para $p$, los comandos de MATLAB para generar la respuesta al escalón son:

```
num = 1; den = [1 -p];
t = 0:0.05:10;
y = step(num,den,t);
```

En la figura 8.3 desplegamos la respuesta al escalón para $p = 1, 2$, y 3. Observe que en los tres casos la respuesta al escalón crece sin límite alguno, lo cual muestra el comportamiento inestable. Observe también que la respuesta para $p = 3$ crece con mayor rapidez, dado que el polo $p = 3$ se encuentra más hacia la derecha en el semiplano derecho (en comparación con $p = 1$ o $p = 2$).

Si el polo $p$ es negativo, entonces el sistema es estable y $y_1(t) = (k/p)\exp(pt)$ es la parte transitoria de la respuesta al escalón. En este caso, la respuesta al escalón convergirá hacia el valor constante $H(0) = -k/p$. Para $k = -p$ [lo cual arroja $H(0) = 1$] y $p = -1, -2, -5$, en la figura 8.4 podemos ver la gráfica de la respuesta al escalón. Como vimos en la figura, la respuesta al escalón se aproxima al valor en estado estable de 1, con mayor rapidez cuando $p$ se hace más negativa, es decir, mientras el polo se aleja hacia la izquierda en el semiplano izquierdo abierto. Esto también coincide con el hecho de que la razón de decaimiento a cero del transitorio es más grande para el caso de $p = -5$.

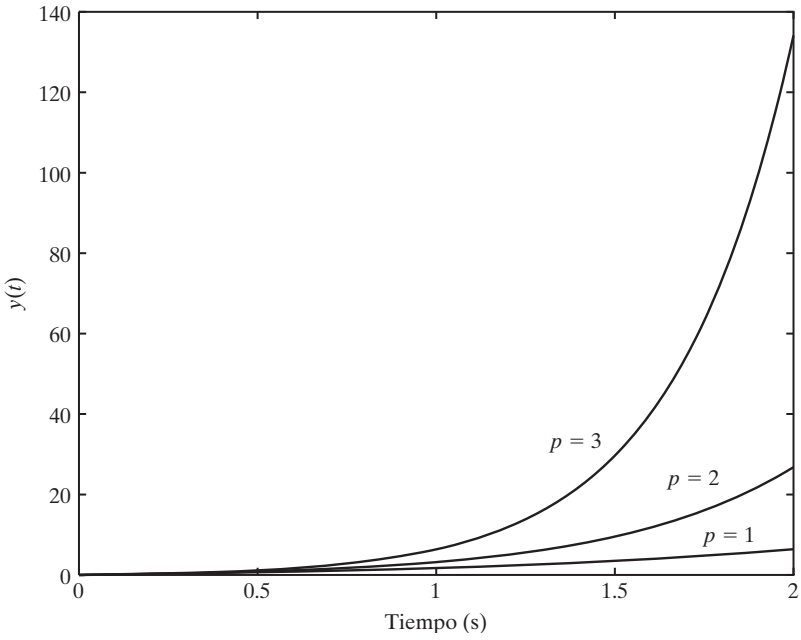



**FIGURA 8.3**
Respuesta al escalón cuando $p = 1, 2, 3$.

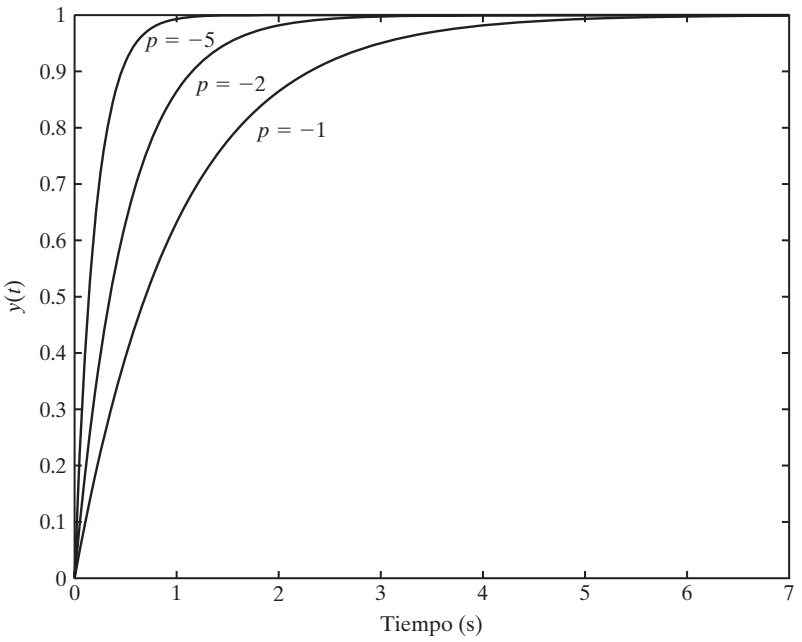



**FIGURA 8.4**
Respuesta al escalón cuando $p = -1, -2, -5$.

A continuación explicamos los comandos de MATLAB para utilizar el comando `step`, seguido por los comandos utilizados con Symbolic Math Toolbox para el caso $k = -p$ y $p = -2$. El método modelo Simulink aparece después del procedimiento descrito en el ejemplo 6.36.

```
num = 2; den = [1 2];
H = tf(num,den);  % forma un objeto función de transferencia
step(H);  % calcula y grafica la respuesta al escalón
syms X H y s
X = 1/s;  H = 2/(s+2);
y = ilaplace(H*X);
ezplot(y,[0 1])  % grafica y de t = 0 a 1
axis([0 7 0 1])  % redefine los ejes
```

El método con Symbolic Math arroja como resultado la expresión `y = 2*exp(-t)*sinh(t)`, donde `sinh` es el seno hiperbólico definido como `sinh(t)=0.5(e^t-e^-t)`. Esta expresión es igual a la solución que encontramos de manera analítica en (8.13).

---

Una cifra importante que caracteriza la razón de decaimiento a cero de la parte transitoria de una respuesta es la *constante de tiempo* $\tau$, la cual definimos como el tiempo que le toma al transitorio caer a $1/e$ ($\approx 37\%$) de su valor inicial. Dado que el transitorio para el sistema de primer orden (8.12) es igual a $(k/p)\exp(pt)$, vemos que la constante de tiempo $\tau$ es

igual a $-1/p$, suponiendo que $p < 0$. Para verificar que $\tau$ es igual a $-1/p$, sea $y_{\text{tr}}(t)$ quien denote al transitorio, tal que $y_{\text{tr}}(t) = (k/p)\exp(pt)$. Entonces, si establecemos $t = \tau = -1/p$ en $y_{\text{tr}}(t)$ obtenemos

$$y_{\text{tr}}(\tau) = \frac{k}{p}e^{p(-1/p)} = \frac{k}{p}e^{-1} = \frac{1}{e}y_{\text{tr}}(0)$$

En el ejemplo 8.6 las constantes de tiempo para $p = -1, -2$, y $-5$ son $\tau = 1, 0.5$, y $0.2$ segundos, respectivamente. Observe que entre más pequeño sea el valor de $\tau$, la razón de decaimiento será más grande.

### Ejemplo 8.7 Cómo determinar la ubicación de los polos de la respuesta al escalón

Considere el sistema de primer orden $H(s) = k/(s - p)$ con la respuesta al escalón que mostramos en la figura 8.5. A partir de la gráfica, es posible determinar tanto $k$ como la posición del polo (es decir, el valor de $p$). Primero, el sistema debe ser estable, dado que la respuesta al escalón que desplegamos en la figura 8.5 está limitada, y además $p$ debe ser negativa. A partir de la gráfica, vemos que el valor en estado estable para la respuesta al escalón es igual a 2. Por lo tanto, $H(0) = -k/p = 2$, y de (8.13) la respuesta al escalón es:

$$y(t) = 2(1 - e^{pt}) \tag{8.14}$$

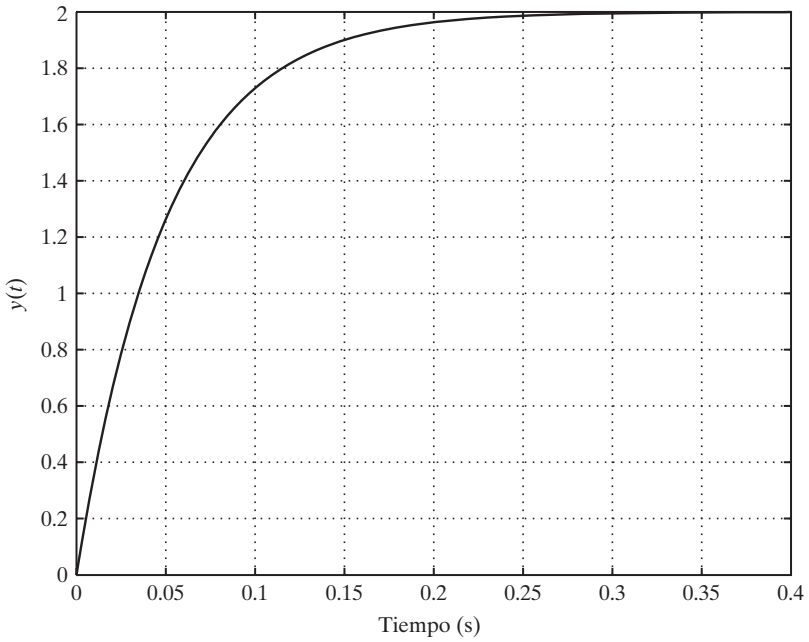



**FIGURA 8.5**
Respuesta al escalón del ejemplo 8.7

Ahora, a partir de la gráfica de la figura 8.5, vemos que $y(0.1) = 1.73$, y así, si evaluamos ambos lados de (8.14) en $t = 0.1$ obtenemos

$$y(0.1) = 1.73 = 2[1 - e^{p(0.1)}] \tag{8.15}$$

Al resolver (8.15) para $p$ obtenemos $p = -20$.

### 8.3.2 Sistemas de segundo orden

Considere ahora el sistema de segundo orden dado por la función de transferencia

$$H(s) = \frac{k}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{8.16}$$

Al parámetro real $\zeta$ en (8.16) se le conoce como *factor de amortiguamiento,* y al parámetro real $\omega_n$ se le llama *frecuencia natural*. El porqué de esta terminología será evidente cuando veamos los siguientes resultados. En el próximo desarrollo supondremos que $\zeta > 0$ y $\omega_n > 0$ y, por lo tanto, mediante el criterio de Routh-Hurwitz, el sistema es estable.

El uso de la ecuación cuadrática muestra que los polos de $H(s)$ son

$$p_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{8.17}$$

$$p_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{8.18}$$

De (8.17) y (8.18) podemos ver que ambos polos son reales cuando $\zeta > 1$, los polos son reales y repetidos cuando $\zeta = 1$, y los polos son un par de complejos conjugados con $0 < \zeta < 1$. A continuación, consideraremos la respuesta al escalón para estos tres casos.

***Caso cuando ambos polos son reales.*** Cuando $\zeta > 1$, los polos $p_1$ y $p_2$ dados por (8.17) y (8.18) son reales y no repetidos, en cuyo caso $H(s)$ puede expresarse de la forma factorizada

$$H(s) = \frac{k}{(s - p_1)(s - p_2)} \tag{8.19}$$

La transformada $Y(s)$ de la respuesta al escalón está entonces dada por

$$Y(s) = \frac{k}{(s - p_1)(s - p_2)s}$$

Si desarrollamos una expansión en fracciones parciales sobre $Y(s)$, obtendremos la respuesta al escalón

$$y(t) = \frac{k}{p_1 p_2}(k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t} + 1), \quad t \geq 0 \tag{8.20}$$

donde $k_1$ y $k_2$ son constantes reales cuyos valores dependen de los polos $p_1$ y $p_2$. Así, en este caso la parte transitoria $y_{\text{tr}}(t)$ de la respuesta al escalón es una suma de dos exponenciales dada por

$$y_{\text{tr}}(t) = \frac{k}{p_1 p_2}(k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t}), \quad t \geq 0$$

y el valor en estado estable de la respuesta al escalón es

$$H(0) = \frac{k}{\omega_n^2} = \frac{k}{p_1 p_2}$$

Por lo general, uno de los términos exponenciales en (8.20) domina al otro término exponencial; es decir, la magnitud de uno de los términos exponenciales es con frecuencia mucho más grande que la del otro. En este caso el polo que corresponde al término exponencial dominante se le conoce como *polo dominante*. Por lo general, el polo dominante es el más cercano al eje imaginario, dado que contiene a la constante de tiempo más grande (igual a $-1/p$, donde $p$ es el polo dominante). Si uno de los polos es dominante, la parte transitoria de la respuesta al escalón (8.20) es similar a la parte transitoria de la respuesta al escalón del caso de primer orden que explicamos anteriormente.

---

### Ejemplo 8.8 Caso cuando ambos polos son reales

Posiciones de los polos y la respuesta al escalón

En (8.19), sea $k = 2, p_1 = -1$, y $p_2 = -2$. Entonces, al expandir $H(s)/s$ mediante fracciones parciales obtenemos

$$Y(s) = \frac{-2}{s+1} + \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s}$$

Así, la respuesta al escalón es

$$y(t) = -2e^{-t} + e^{-2t} + 1, \qquad t \geq 0$$

y la respuesta transitoria es

$$y_{\text{tr}}(t) = -2e^{-t} + e^{-2t}, \qquad t \geq 0$$

En la figura 8.6 podemos ver la respuesta al escalón que obtenemos mediante MATLAB. En este ejemplo resulta claro que la respuesta transitoria es dominada por $p_1$, dado que el término en la respuesta transitoria debido a $p_2$ decae con más rapidez. La respuesta que mostramos en la figura 8.6 es similar a la respuesta del sistema de primer orden, con $p = -1$, tal como aparece en la figura 8.4.

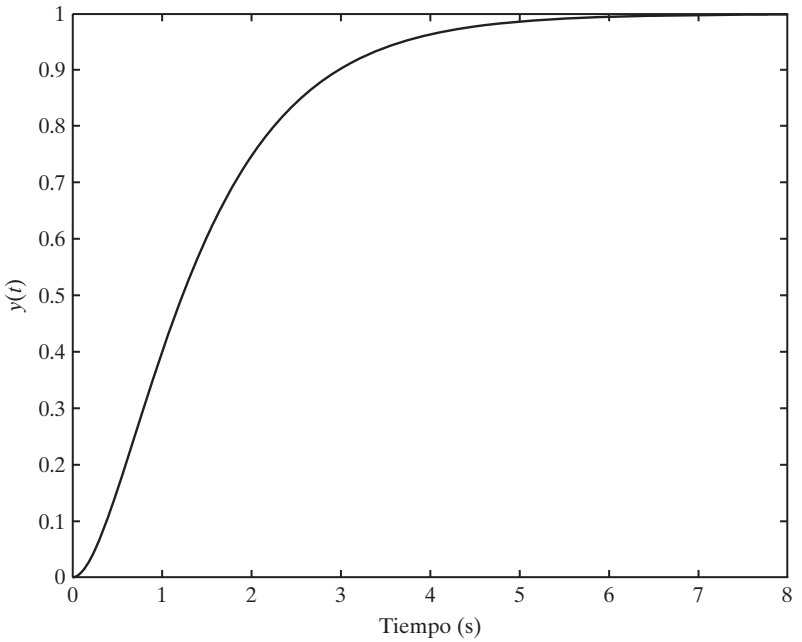



**FIGURA 8.6**
Respuesta al escalón del sistema en el ejemplo 8.8.

**Caso cuando los polos son reales y repetidos.** Cuando $\zeta = 1$, los polos $p_1$ y $p_2$ dados por (8.17) y (8.18) son reales y ambos son iguales a $-\omega_n$. En este caso, la función de transferencia $H(s)$ dada por (8.16) tiene la forma factorizada

$$H(s) = \frac{k}{(s + \omega_n)^2} \tag{8.21}$$

Entonces, al expandir $H(s)/s$ mediante fracciones parciales y al tomar la transformada inversa obtendremos la siguiente respuesta al escalón:

$$y(t) = \frac{k}{\omega_n^2}[1 - (1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t}], \quad t \geq 0 \tag{8.22}$$

Así, la respuesta transitoria para este caso es

$$y_{\text{tr}}(t) = -\frac{k}{\omega_n^2}(1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t}, \quad t \geq 0$$

### Ejemplo 8.9 Ambos polos reales y repetidos

Posiciones de los polos y la respuesta al escalón

En (8.21), sea $k = 4$ y $\omega_n = 2$. Entonces, ambos polos son iguales a $-2$, y de (8.22) la respuesta al escalón es

$$y(t) = 1 - (1 + 2t)e^{-2t}, t \geq 0$$

En la figura 8.7 mostramos una gráfica de la respuesta al escalón obtenida con MATLAB.

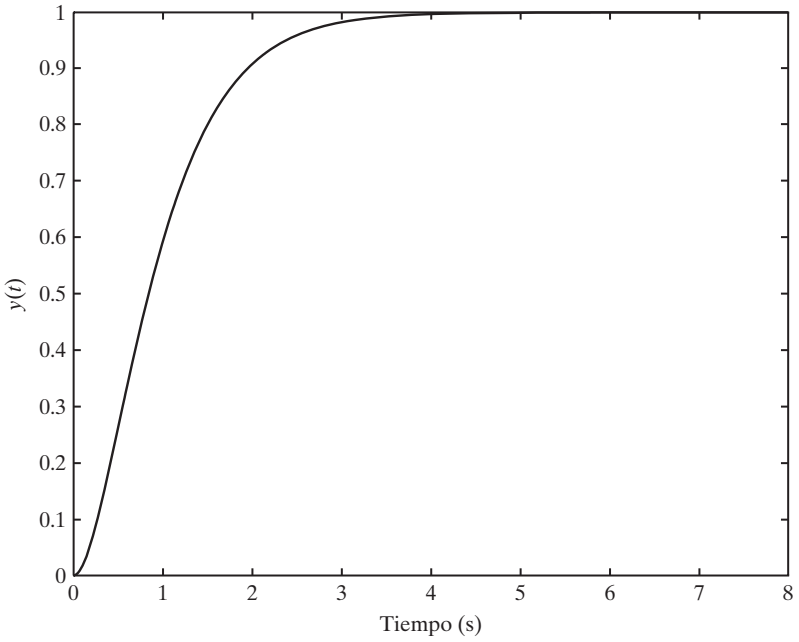



**FIGURA 8.7**
Respuesta al escalón del ejemplo 8.9.

**Caso cuando los polos son un par de complejos.** Ahora, suponga que $0 < \zeta < 1$, de manera que los polos $p_1$ y $p_2$ son números complejos. Con $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$, los polos son $p_1, p_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d$. Observe que la parte real de los polos es igual a $-\zeta\omega_n$, y que la parte imaginaria de los polos es igual a $\pm\omega_d$.

Entonces, dada la función de transferencia (8.16), al completar el cuadrado en el denominador de $H(s)$ obtenemos

$$H(s) = \frac{k}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \tag{8.23}$$

Al expandir $Y(s) = H(s)/s$ obtenemos

$$Y(s) = \frac{-(k/\omega_n^2)s - 2k\zeta/\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} + \frac{k/\omega_n^2}{s}$$

$$= \frac{-(k/\omega_n^2)(s + \zeta\omega_n)}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{(k\zeta/\omega_n)}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} + \frac{k/\omega_n^2}{s}$$

Así, de la tabla 6.2 vemos que la respuesta al escalón es

$$y(t) = -\frac{k}{\omega_n^2}e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega_d t - \frac{k\zeta}{\omega_n\omega_d}e^{-\zeta\omega_n t}\operatorname{sen}\omega_d t + \frac{k}{\omega_n^2}, \quad t \geq 0$$

Por último, si utilizamos la identidad trigonométrica,

$$C\cos\beta + D\operatorname{sen}\beta = \sqrt{C^2 + D^2}\operatorname{sen}(\beta + \theta),$$

$$\text{donde } \theta = \begin{cases} \tan^{-1}(C/D), & C \geq 0 \\ \pi + \tan^{-1}(C/D), & C < 0 \end{cases}$$

obtenemos como resultado la siguiente forma para la respuesta al escalón

$$y(t) = \frac{k}{\omega_n^2}\left[1 - \frac{\omega_n}{\omega_d}e^{-\zeta\omega_n t}\operatorname{sen}(\omega_d t + \phi)\right], \quad t \geq 0 \tag{8.24}$$

Aquí, $\phi = \tan^{-1}(\omega_d/\zeta\omega_n)$. Observe que el valor en estado estable es igual a $k/\omega_n^2$, y la respuesta transitoria es una sinusoide que decae exponencialmente y cuya frecuencia es $\omega_d$ rad/s. Por lo tanto, los sistemas de segundo orden con polos complejos tienen una respuesta al escalón oscilatoria con una frecuencia de oscilación igual a $\omega_d$.

---

### Ejemplo 8.10 Los polos son un par de complejos

Posiciones de los polos y la respuesta al escalón

Considere el sistema de segundo orden dado por la función de transferencia

$$H(s) = \frac{17}{s^2 + 2s + 17}$$

Al escribir $H(s)$ en la forma (8.23), se revela que $k = 17, \zeta = 0.242$, y $\omega_n = \sqrt{17}$. Además, $\omega_d = 4$, y los polos del sistema son $-1 \pm j4$. Encontramos la respuesta al escalón con (8.24) para expresarla como

$$y(t) = 1 - \frac{\sqrt{17}}{4}e^{-t}\operatorname{sen}(4t + 1.326)$$

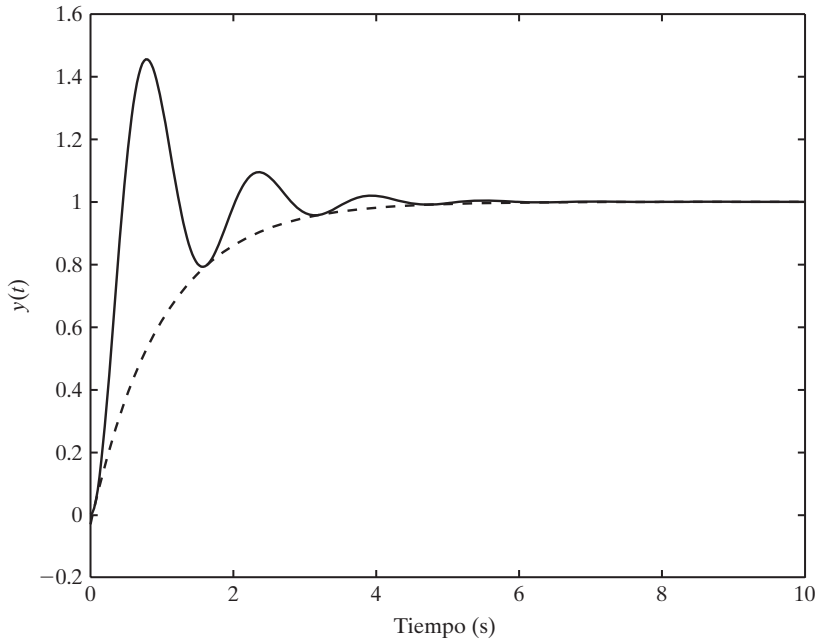



**FIGURA 8.8**
Respuesta al escalón del ejemplo 8.10.

Podemos obtener de manera numérica la respuesta al escalón mediante MATLAB, a través de los siguientes comandos del Control System Toolbox:

```
num = 17; den = [1 2 17];
H = tf(num,den);
step(H);
```

Los comandos del Symbolic Math Toolbox son

```
syms Y s y
Y = 17/(s^3+2*s^2+17*s);
y = ilaplace(Y);
ezplot(y,[0, 10])
axis([0 10 0 2])
```

La figura 8.8 muestra la respuesta al escalón. Observe que la respuesta al escalón oscila con frecuencia $\omega_d = 4$ rad/s, y que las oscilaciones decaen de manera exponencial. En la figura 8.8 podemos ver, como una línea punteada, una envolvente que corresponde al decaimiento de la parte transitoria de la respuesta al escalón. Como vimos en (8.24), la razón de decaimiento del transitorio está determinada por la parte real de los polos, $\zeta\omega_n = -1$. La constante de tiempo que corresponde a los polos es igual a $1/\zeta\omega_n = 1$ s.

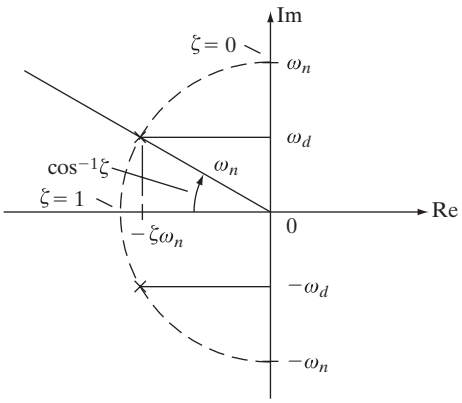



**FIGURA 8.9**
Ubicación de los polos en el plano complejo.

Como vimos, cuando $0 < \zeta < 1$, los polos están dados por el par complejo $-\zeta\omega_n \pm j\omega_d$, donde $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$. En la figura 8.9 podemos ver la ubicación de los polos en el plano complejo. Como aparece en la figura, $\omega_n$ es igual a la distancia desde el origen hacia los polos, y $\zeta$ es igual al coseno del ángulo formado desde el eje real negativo. Si $\omega_n$ se mantiene constante (en algún punto estrictamente positivo) y $\zeta$ varía de uno a cero, las posiciones de los polos trazan un arco circular en el semiplano izquierdo que comienza en el eje real negativo (cuando $\zeta = 1$), y termina en el eje imaginario (cuando $\zeta = 0$). Esto lo podemos apreciar mediante una línea punteada en la figura 8.9. Como regla general, mientras más cerca se encuentren los polos al eje $j\omega$, más oscilatoria será la respuesta. Por lo tanto, mientras $\zeta$ disminuye de 1 a 0 (con $\omega_n$ como constante), la respuesta al escalón se hace más oscilatoria. Esto lo verificamos mediante el siguiente ejemplo.

### Ejemplo 8.11 Efecto del factor de amortiguamiento sobre la respuesta al escalón

Considere la función de transferencia (8.23) con $\omega_n = 1$ y $k = 1$. En la figura 8.10 mostramos la respuesta al escalón para $\zeta = 0.1$, $\zeta = 0.25$, y $\zeta = 0.7$. Observe que mientras más pequeño es el valor de $\zeta$, más pronunciada es la oscilación.

De nuevo considere la respuesta al escalón dada por (8.24). Además del parámetro $\zeta$, el valor de la frecuencia natural $\omega_n$ tiene un efecto importante sobre la respuesta. Para ver esto, suponga que $\zeta$ es una constante y $\omega_n$ es variable. Dado que $\zeta$ determina el ángulo del polo en coordenadas polares (vea la figura 8.9), al mantener $\zeta$ constante, el ángulo se mantendrá también constante, y por lo tanto al graficar los polos, el incremento del valor de $\omega_n$ generará una línea radial que comienza desde el origen y continúa hacia afuera del lado izquierdo del plano (vea la figura 8.9). Por consiguiente, la respuesta transitoria deberá decaer más rápido y la frecuencia de oscilación debe incrementarse al incrementarse $\omega_n$. Esto lo estudiaremos en el siguiente ejemplo.

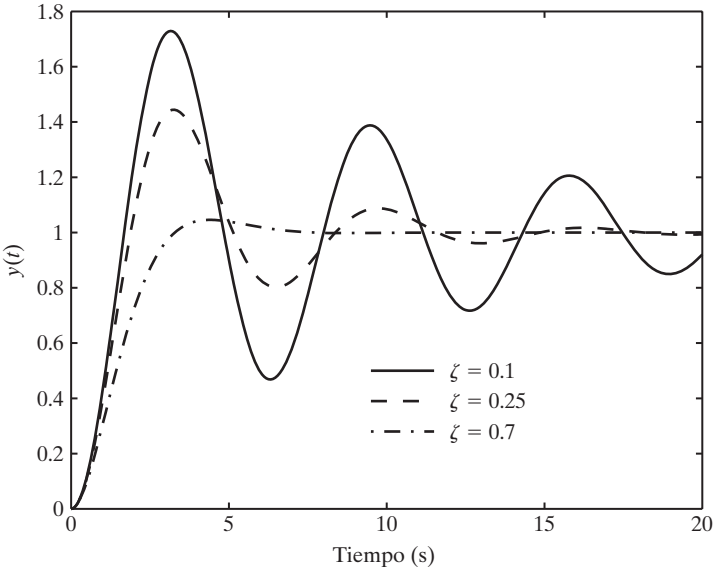



**FIGURA 8.10**
Respuesta al escalón del ejemplo 8.11.

### Ejemplo 8.12 Efecto de $\omega_n$ sobre la respuesta al escalón

Considere la función de transferencia (8.23) con $\zeta = 0.4$ y $k = \omega_n^2$ (de modo que el valor en estado estable sea igual a 1). En la figura 8.11 mostramos las respuestas al escalón para $\omega_n = 0.5, 1,$ y 2 rad/s. Observe que mientras más grande sea el valor de $\omega_n$, más pequeña será la constante de tiempo y más grande la frecuencia de oscilación. Observe también que, dado que $\zeta$ se mantiene constante, los valores pico de las oscilaciones son los mismos para cada valor de $\omega_n$.

**Comparación de los casos**. De nuevo, considere el sistema con la función de transferencia

$$H(s) = \frac{k}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{8.25}$$

De los casos anteriores, podemos ver que cuando $0 < \zeta < 1$, la parte transitoria de la respuesta al escalón es oscilatoria con "frecuencia natural de amortiguamiento" igual a $\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$, y la oscilación es más pronunciada mientras $\zeta$ disminuye a 0. Para $\zeta \geq 1$, no existe oscilación en el transitorio. La existencia de la oscilación implica una falta de "amortiguamiento" en el sistema, y por lo tanto $\zeta$ arroja una medida del grado de amortiguamiento en el sistema. Cuando $0 < \zeta < 1$, decimos que el sistema está *subamortiguado*, dado que en este caso el factor de amortiguamiento $\zeta$ no es lo suficientemente grande para evitar una oscilación en el transitorio que resulta a una entrada escalón. Cuando $\zeta > 1$, decimos que el sistema está

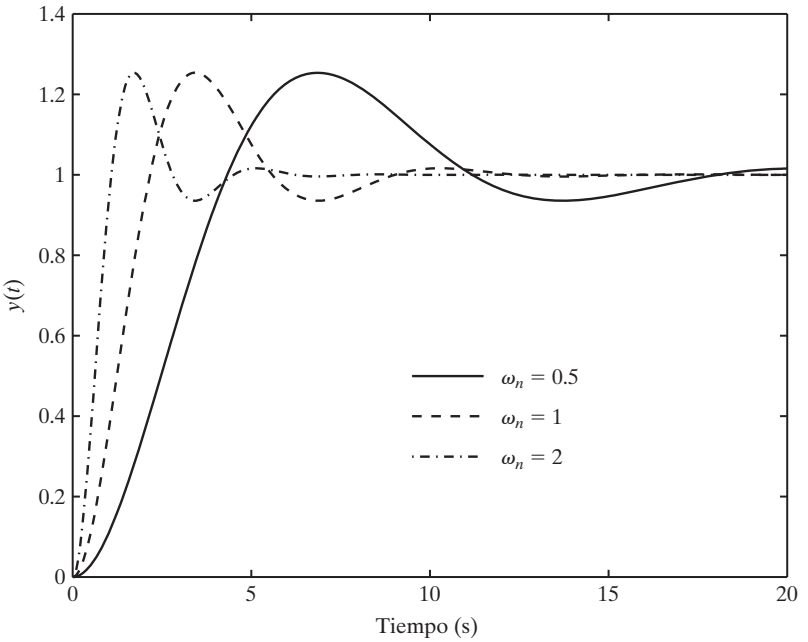



**FIGURA 8.11**
Respuesta al escalón del ejemplo 8.12.

*sobreamortiguado*, dado que en este caso $\zeta$ es más grande que lo necesario para evitar una oscilación en el transitorio. Cuando $\zeta = 1$, decimos que el sistema está *críticamente amortiguado*, dado que éste es el valor más pequeño de $\zeta$ para el cual no existe oscilación en la respuesta transitoria a una entrada escalón.

### Ejemplo 8.13 Comparación de casos

Considere la función de transferencia (8.25) con $k = 4$ y $\omega_n = 2$. Para comparar los casos subamortiguado, críticamente amortiguado y sobreamortiguado, calcularemos la respuesta al escalón del sistema para $\zeta = 0.5, 1,$ y $1.5$. En la figura 8.12 mostramos los resultados. Observe que, si el sobretiro es tolerable, la respuesta más rápida desplegada en la figura 8.12 es aquélla para la cual $\zeta = 0.5$. Aquí, "la más rápida" se refiere a la respuesta al escalón que alcanza el valor en estado estable (aquí igual a 1) en el tiempo más rápido de las tres respuestas que mostramos en la figura 8.12.

Si regresamos al sistema con la función de transferencia $H(s)$ dada por (8.25), es importante destacar que si $\zeta < 0$ y $\omega_n > 0$, ambos polos se encuentran en el semiplano derecho abierto, y por lo tanto el sistema es inestable. En este caso la "parte transitoria" de la respuesta al escalón crecerá sin límite cuando $t \to \infty$. Por lo tanto, el transitorio no es en realidad un transitorio, dado que no decae a cero cuando $t \to \infty$. El transitorio decae a cero si y sólo si el sistema es estable. Esto resulta directamente del análisis de estabilidad que explicamos en la sección 8.1.

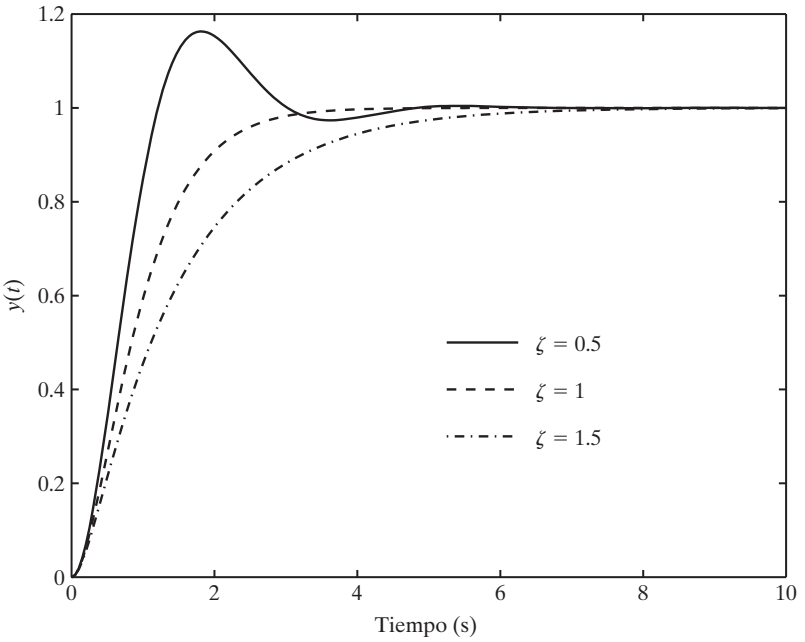



**FIGURA 8.12**
Respuesta al escalón del ejemplo 8.13.

## Ejemplo 8.14 Sistema masa-resorte-amortiguador

Sistema masa-resorte-amortiguador

Considere el sistema masa-resorte-amortiguador (ejemplo 6.32) con la ecuación diferencial de entrada y salida

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2} + D\frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = x(t)$$

donde $M$ es la masa, $D$ es la constante de amortiguamiento, $K$ es la constante de rigidez, $x(t)$ es la fuerza aplicada a la masa, y $y(t)$ es el desplazamiento relativo de la masa a la posición de equilibrio. Suponemos que $M$, $D$, y $K$ son números reales estrictamente positivos (mayores que 0), lo cual es la condición para la estabilidad del sistema. La función de transferencia del sistema está dada por

$$H(s) = \frac{1}{Ms^2 + Ds + K} = \frac{1/M}{s^2 + (D/M)s + (K/M)} \tag{8.26}$$

Al igualar los coeficientes de los polinomios en los denominadores de (8.25) y (8.26) obtenemos como resultado las relaciones

$$2\zeta\omega_n = \frac{D}{M} \text{ y } \omega_n^2 = \frac{K}{M}$$

Al resolver para el factor de amortiguamiento $\zeta$ y la frecuencia natural $\omega_n$ obtenemos

$$\zeta = \frac{D}{2\sqrt{MK}}, \omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

Observe que el factor de amortiguamiento $\zeta$ es directamente proporcional a la constante de amortiguamiento $D$, y por lo tanto el amortiguamiento en el sistema es un resultado del término $Ddy(t)/dt$ en la ecuación diferencial de entrada y salida. En particular, no existe amortiguamiento en el sistema si $D = 0$. El sistema está subamortiguado cuando

$$0 < \frac{D}{2\sqrt{MK}} < 1$$

lo cual equivale a la siguiente condición en la constante de amortiguamiento $D$:

$$0 < D < 2\sqrt{MK}$$

El sistema está críticamente amortiguado cuando $D = 2\sqrt{MK}$, y el sistema está sobreamortiguado cuando $D > 2\sqrt{MK}$. Invitamos al lector a verificar las animaciones de la respuesta al escalón para estos tres casos mediante el demo en línea de la página Web. Para generar los tres casos, los valores de $M$, $D$, y $K$ necesitan seleccionarse sobre la base de los intervalos para $D$, dados con anterioridad.

### 8.3.3 Sistemas de orden más alto

En ocasiones, los sistemas de orden más alto pueden ser aproximaciones de los sistemas de primero o segundo orden, dado que por lo general uno o dos de los polos son más dominantes que los otros polos, y por lo tanto estos otros polos tan sólo se pueden ignorar. Un caso donde un polo domina sobre otro ocurre en el ejemplo 8.8. En este ejemplo, el sistema de dos polos se comporta de manera similar al sistema de un polo con el polo dominante, y por lo tanto podemos aproximar al sistema mediante el polo dominante.

Existen dos situaciones en las que debemos tener cuidado al llevar a cabo la aproximación basada en el concepto de polos dominantes. Primero, si los polos dominantes no son tan diferentes de los demás polos, la aproximación basada en ignorar los polos más rápidos (es decir, los polos con constantes de tiempo más pequeñas) podría no ser muy acertada. Segundo, un cero cerca del polo provoca que el residuo del polo sea pequeño, lo que hace que la magnitud del término correspondiente en la respuesta transitoria sea pequeño. Así, aunque dicho polo podría parecer dominante, en realidad no lo es. Explicaremos esto en el siguiente ejemplo.

#### Ejemplo 8.15 Sistema de tercer orden

Considere el sistema de tercer orden con la siguiente función de transferencia:

$$H(s) = \frac{25}{(s^2 + 7s + 25)(s + 1)} \tag{8.27}$$

La gráfica de los polos aparece en la figura 8.13. De la gráfica, podemos ver que el polo en $s = -1$ es el más dominante, dado que es el más cercano al eje imaginario. Así, podría ser posible ignorar

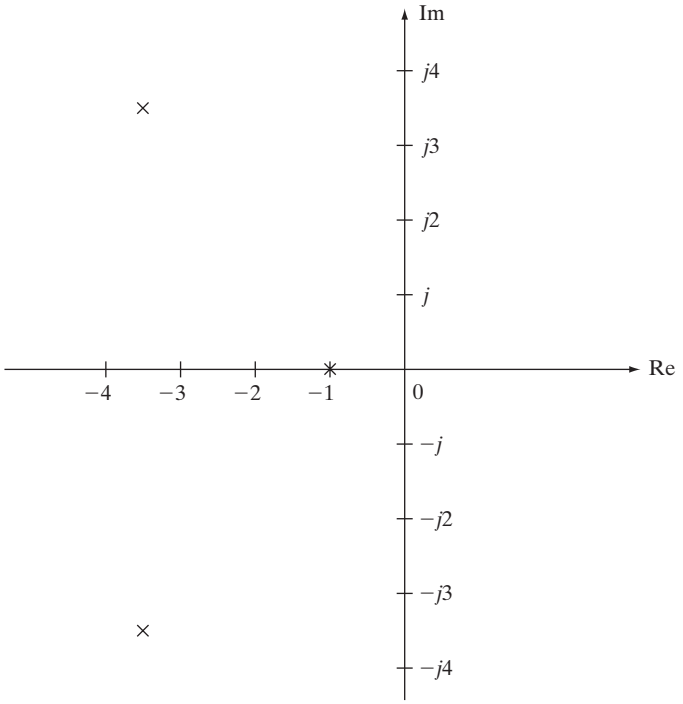



**FIGURA 8.13**
Ubicación de los polos del ejemplo 8.15.

los otros dos polos complejos. Para verificar que podamos hacer esto, calcularemos la respuesta al escalón del sistema al expandir primero $Y(s) = H(s)/s$ mediante la expansión en fracciones parciales:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - 1.316\frac{1}{s+1} + 0.05263\frac{6s+17}{s^2+7s+25}$$

Si tomamos la transformada inversa obtenemos la siguiente respuesta al escalón:

$$y(t) = 1 - 1.316e^{-t} + 0.321e^{-3.5t}\,\text{sen}(3.57t + 1.754), \qquad t \geq 0 \tag{8.28}$$

Observe que el segundo término del lado derecho de (8.28) es más grande que el tercer término y decaerá de manera más lenta, lo que lo convierte en un término dominante. Así, esto corresponde con la observación que hicimos previamente respecto a que el polo en $s = -1$ es dominante. Para verificar esto más adelante, obtendremos la respuesta al escalón del Control System Toolbox en MATLAB mediante el uso de los comandos

```
num = 25;
den = conv([1 7 25],[1 1]); % esto multiplica los polinomios
H = tf(num,den);
t = 0:0.01:4;
step(H,t);
```

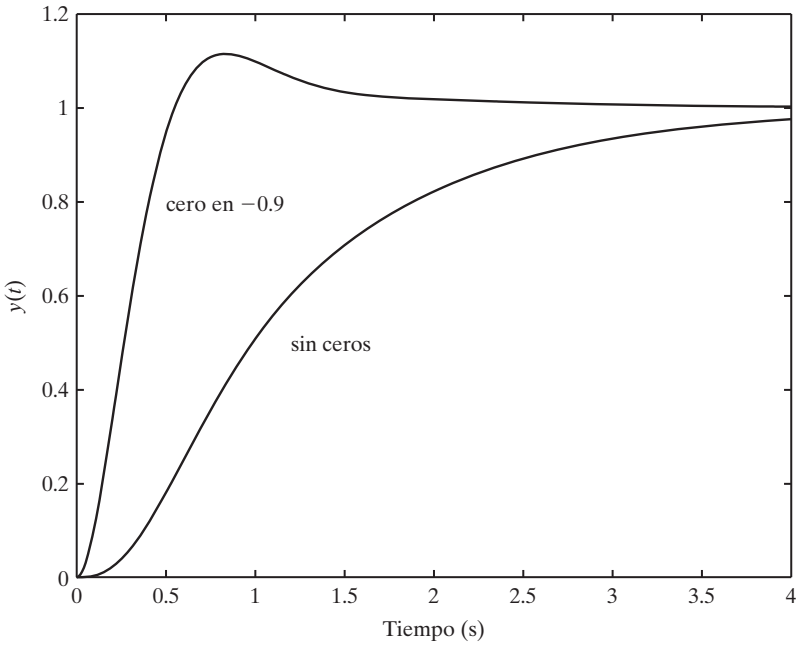



**FIGURA 8.14**
Respuesta al escalón del ejemplo 8.15.

La respuesta al escalón que resulta de la figura 8.14, es muy similar a una simple respuesta exponencial de primer orden cuyo polo es $s = -1$. Por lo tanto, de nuevo esto confirma la observación de que el polo en $s = -1$ es dominante, y así podemos ignorar los otros dos polos.

Ahora, suponga que agregamos un cero a la función de transferencia (8.27) en $s = -0.9$ y ajustamos la constante del numerador de manera que el valor en estado estable se mantenga en 1. La función de transferencia que resulta es

$$H(s) = \frac{(25/0.9)s + 25}{(s^2 + 7s + 25)(s + 1)}$$

Observe que el cero en $s = -0.9$ prácticamente cancela el polo en $s = -1$. Entonces, la expansión por fracciones parciales de $H(s)/s$ está dada por

$$Y(s) = \frac{1}{s} + 0.1462\frac{1}{s + 1} + \frac{-1.146s - 7.87}{s^2 + 7s + 25}$$

Observe que ahora el residuo que corresponde al polo $-1$ es muy pequeño. Esto es el resultado del cero que se encuentra cerca del polo. Si tomamos la transformada inversa de Laplace de $Y(s)$ obtenemos

$$y(t) = 1 + 0.1462e^{-t} + 1.575e^{-3.5t}\,\text{sen}(3.57t - 2.327),\ t \geq 0$$

Dado que el coeficiente que multiplica a $e^{-t}$ es mucho más pequeño en este caso, el polo en $s = -1$ es menos significativo que los otros dos polos, y por lo tanto ahora los polos dominantes son un par de complejos conjugados (en $s = -3.5 \pm 3.57j$), aun cuando están más lejos del eje imaginario

que del polo −1. En la figura 8.14 mostramos la respuesta al escalón resultante que obtuvimos mediante MATLAB. Le invitamos a comparar esta respuesta con un sistema de segundo orden con polos en $s = -3.5 \pm 3.57j$.

## 8.4 RESPUESTA A SINUSOIDES Y A OTRAS ENTRADAS

De nuevo considere el sistema con la función racional de transferencia $H(s) = B(s)/A(s)$ con el grado de $B(s)$ menor que el de $A(s)$. En la primera parte de esta sección, el objetivo es determinar la respuesta de salida del sistema cuando $x(t)$ es la sinusoide

$$x(t) = C \cos \omega_0 t, t \geq 0$$

donde la magnitud $C$ y la frecuencia $\omega_0$ (en rad/s) son constantes arbitrarias. De la tabla 6.2, vemos que la transformada de Laplace de la entrada es

$$X(s) = \frac{Cs}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{Cs}{(s + j\omega_0)(s - j\omega_0)}$$

Por lo tanto, en este caso la transformada $X(s)$ de la entrada contiene un cero en $s = 0$ y dos polos en $s = \pm j\omega_0$.

Si el sistema contiene condiciones iniciales iguales a cero, la transformada $Y(s)$ de la salida resultante está dada por

$$Y(s) = \frac{CsB(s)}{A(s)(s + j\omega_0)(s - j\omega_0)} \tag{8.29}$$

Llevaremos a cabo el cálculo de la respuesta de salida $y(t)$ de (8.29) de manera similar al cálculo de la sección 8.3 para el caso de una entrada escalón. Aquí, "obtendremos" los términos $s + j\omega_0$ y $s - j\omega_0$ en (8.29) mediante el uso de la expansión por fracciones parciales, suponiendo que $A(\pm j\omega_0) \neq 0$. Esto arroja

$$Y(s) = \frac{\gamma(s)}{A(s)} + \frac{c}{s - j\omega_0} + \frac{\bar{c}}{s + j\omega_0} \tag{8.30}$$

donde $\gamma(s)$ es un polinomio en $s$, $c$ es una constante compleja, y $\bar{c}$ es el complejo conjugado de $c$. De la fórmula del residuo (6.67), $c$ está dada por

$$c = [(s - j\omega_0)Y(s)]_{s=j\omega_0} = \left[\frac{CsB(s)}{A(s)(s + j\omega_0)}\right]_{s=j\omega_0}$$

$$= \frac{jC\omega_0 B(j\omega_0)}{A(j\omega_0)(j2\omega_0)} = \frac{C}{2}H(j\omega_0)$$

Entonces, al insertar los valores para $c$ y $\overline{c}$ dentro de (8.30) obtenemos

$$Y(s) = \frac{\gamma(s)}{A(s)} + \frac{(C/2)H(j\omega_0)}{s - j\omega_0} + \frac{(C/2)\overline{H(j\omega_0)}}{s + j\omega_0} \tag{8.31}$$

donde $\overline{H(j\omega_0)}$ es el complejo conjugado de $H(j\omega_0)$.

Ahora, sea $y_1(t)$ quien denote la transformada inversa de Laplace de $\gamma(s)/A(s)$. Entonces, si tomamos la transformada inversa de Laplace de ambos lados de (8.31) obtenemos

$$y(t) = y_1(t) + \frac{C}{2}[H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t} + \overline{H(j\omega_0)}e^{-j\omega_0 t}] \tag{8.32}$$

Por último, mediante el uso de la identidad (vea (6.71))

$$\beta e^{j\omega_0 t} + \overline{\beta}e^{-j\omega_0 t} = 2|\beta| \cos(\omega_0 t + \angle\beta)$$

podemos escribir la expresión (8.32) para $y(t)$ de la forma

$$y(t) = y_1(t) + C|H(j\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \angle H(j\omega_0)), \quad t \geq 0 \tag{8.33}$$

Cuando el sistema es estable [todos los polos de $H(s)$ se encuentran en el semiplano izquierdo abierto], el término $y_1(t)$ en (8.33) decae a cero cuando $t \to \infty$, y por lo tanto $y_1(t)$ es la parte transitoria de la respuesta. El término sinusoidal en la parte derecha de (8.33) es la parte estable de la respuesta, la cual se denota como $y_{ss}(t)$; esto es,

$$y_{ss}(t) = C|H(j\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \angle H(j\omega_0)), \quad t \geq 0 \tag{8.34}$$

De (8.34) vemos que la respuesta en estado estable $y_{ss}(t)$ a la entrada sinusoidal $x(t) = C\cos(\omega_0 t)$, $t \geq 0$, tiene la misma frecuencia que la entrada, pero es escalada en magnitud por la cantidad $|H(j\omega_0)|$, y su fase es intercambiada mediante la cantidad $\angle H(j\omega_0)$. Este resultado es similar al desarrollo de la sección 5.1, donde mostramos que la respuesta a la entrada

$$x(t) = C\cos\omega_0 t, -\infty < t < \infty$$

está dada por

$$y(t) = C|H(\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \angle H(\omega_0)), \quad -\infty < t < \infty \tag{8.35}$$

donde $H(\omega_0)$ es la transformada de Fourier $H(\omega)$ de la respuesta al impulso $h(t)$ con $H(\omega)$ evaluada en $\omega = \omega_0$. Observe que en la expresión (8.35) para la salida, no existe transitorio, dado que primero aplicamos la entrada en el tiempo $t = -\infty$. Una respuesta transitoria se genera sólo cuando aplicamos la entrada en algún valor finito de tiempo (no $t = -\infty$).

Si el sistema dado es causal y estable, existe una correspondencia directa entre la derivación de $y_{ss}(t)$ que vimos anteriormente y el resultado dado en (8.35). Para ver esto, recuerde la sección 8.1 en la cual la estabilidad implica la condición de integración

$$\int_0^\infty |h(t)|\, dt < \infty$$

A partir de la explicación en la sección 6.1, podemos decir que la transformada de Fourier $H(\omega)$ de $h(t)$ es igual a la transformada de Laplace $H(s)$ evaluada en $s = j\omega$, es decir,

$$H(\omega) = H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega} \tag{8.36}$$

Observe que a $H(j\omega)$ la denotamos como $H(\omega)$. De aquí en adelante seguiremos esta notación.

Como una consecuencia de (8.36), las expresiones (8.34) y (8.35) son idénticas para $t \geq 0$, y por lo tanto existe una correspondencia directa entre los dos resultados. Además, por (8.36) la función de respuesta en frecuencia del sistema [la cual definimos primero en la sección 5.1 como la transformada de Fourier $H(\omega)$ de $h(t)$] es igual a la función de transferencia $H(s)$ evaluada en $s = j\omega$. Por lo tanto, podemos determinar el comportamiento de la respuesta en frecuencia de un sistema estable directamente desde la función de transferencia $H(s)$. En particular, podemos generar tanto la magnitud de la función $|H(\omega)|$ y la función de fase $\angle H(\omega)$ a partir de la función de transferencia $H(s)$.

---

### Ejemplo 8.16 Sistemas de primer orden

Considere el sistema de primer orden con la función de transferencia

$$H(s) = \frac{k}{s - p} \tag{8.37}$$

Suponemos que $k > 0$ y $p < 0$, de manera que el sistema es estable. Con $k = -p = 1/RC$, el sistema con la función de transferencia (8.37) podría ser el circuito $RC$ que mostramos en la figura 8.15.

Ahora, si establecemos $s = j\omega$ en $H(s)$, obtenemos

$$H(\omega) = \frac{k}{j\omega - p}$$

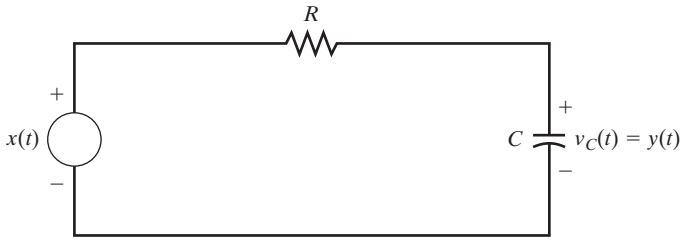



**FIGURA 8.15**
Circuito $RC$ con función de transferencia $H(s) = k/(s - p)$, donde $k = -p = 1/RC$.

y si tomamos la magnitud y el ángulo de $H(\omega)$ obtenemos

$$|H(\omega)| = \frac{|k|}{|j\omega - p|} = \frac{k}{\sqrt{\omega^2 + p^2}} \tag{8.38}$$

$$\angle H(\omega) = -\angle(j\omega - p) = -\tan^{-1}\frac{-\omega}{p} \tag{8.39}$$

Podemos calcular la respuesta de salida que resulta de la entrada sinusoidal $x(t) = C\cos\omega_0 t$, $t \geq 0$ (con condiciones iniciales iguales a cero) mediante el uso de (8.38) y (8.39) de la siguiente manera. Primero, la transformada de Laplace de la respuesta de salida está dada por

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{kCs}{(s - p)(s^2 + \omega_0^2)}$$

En este caso, la expansión por fracciones parciales (8.30) para $Y(s)$ se convierte en

$$Y(s) = \frac{\gamma}{s - p} + \frac{c}{s - j\omega_0} + \frac{\overline{c}}{s + j\omega_0}$$

donde

$$\gamma = [(s - p)Y(s)]|_{s=p} = \frac{kCp}{p^2 + \omega_0^2}$$

Entonces, la parte transitoria de la respuesta de salida está dada por

$$y_{\text{tr}}(t) = \gamma e^{pt} = \frac{kCp}{p^2 + \omega_0^2}e^{pt}, \quad t \geq 0$$

y a partir de (8.33), la respuesta completa de salida es

$$y(t) = \frac{kCp}{p^2 + \omega_0^2}e^{pt} + C|H(\omega_0)|\cos(\omega_0 t + \angle H(\omega_0)), \quad t \geq 0 \tag{8.40}$$

Por último, si insertamos (8.38) y (8.39) dentro de (8.40) obtenemos la respuesta de salida

$$y(t) = \frac{kCp}{p^2 + \omega_0^2}e^{pt} + \frac{Ck}{\sqrt{\omega_0^2 + p^2}}\cos\left[\omega_0 t - \tan^{-1}\left(-\frac{\omega_0}{p}\right)\right], \quad t \geq 0 \tag{8.41}$$

La ecuación (8.41) es la respuesta completa que resulta de la entrada $x(t) = C\cos\omega_0 t$ aplicada para $t \geq 0$. Observe que la parte transitoria de la respuesta es una exponencial que decae, dado que $p < 0$, donde la razón de decaimiento depende del valor del polo $p$.

Ahora suponga que $k = 1, p = -1$, y la entrada es $x(t) = 10\cos(1.5t), t \geq 0$, de modo que $C = 10$ y $\omega_0 = 1.5$ rad/s. Entonces,

$$\gamma = \frac{(1)(10)(-1)}{1 + (1.5)^2} = -3.08$$

$$|H(1.5)| = 5.55$$

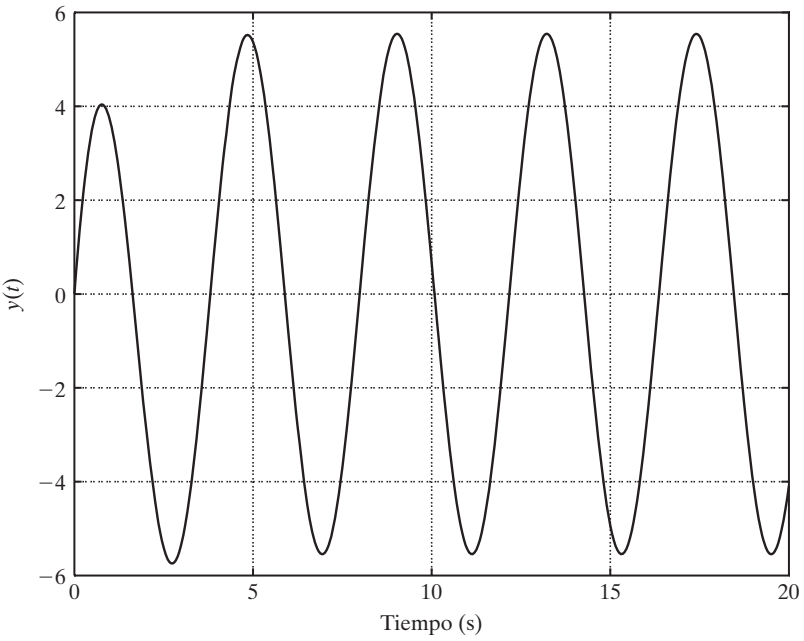



**FIGURA 8.16**
Respuesta de salida del ejemplo 8.16.

$$\angle H(1.5) = -56.31^\circ$$

y por lo tanto, de (8.41) vemos que la respuesta de salida es

$$y(t) = -3.08e^{-t} + 5.55\cos(1.5t - 56.31^\circ), t \geq 0 \tag{8.42}$$

Mostramos la respuesta en la figura 8.16. Observe que podemos ver la transitoria $-3.08e^{-t}$ para valores pequeños de $t$, pero luego desaparece. Dado que la constante de tiempo $\tau$ asociada con el polo en $-1$ es $\tau = 1$, el transitorio decae a $1/e = 37\%$ de su valor inicial en $t = 1$ segundo. Podemos observar también a partir de la gráfica en la figura 8.16 que la amplitud y la fase de la parte de la respuesta en estado estable coincide con los valores previamente obtenidos en forma analítica, vea (8.42). Debemos destacar que cuando el transitorio desaparece, la respuesta resultante (en estado estable) obtenida previamente es idéntica a la solución obtenida mediante el uso de la teoría de Fourier en el ejemplo 5.2 para el circuito $RC$ (con $RC = 1, A = C = 10, \omega_0 = 1.5$). Como remarcamos con anterioridad, la configuración de Fourier que consideramos en el capítulo 5 no cuenta con respuesta transitoria, dado que aplicamos la entrada en el tiempo $t = -\infty$. El lector puede verificar que las dos soluciones en realidad corresponden. La respuesta que mostramos en la figura 8.16 la obtuvimos mediante el uso de los siguientes comandos de MATLAB con el Control System Toolbox:

```
t = 0:0.05:20;
num = 1; den = [1 1];
H = tf(num,den);
x = 10*cos(1.5*t);
y = lsim(H,x,t);
```

Podemos utilizar también el Symbolic Math Toolbox para calcular la respuesta mediante los siguientes comandos:

```
syms X H y s
X = 10*s/(s^2+1.5^2);  H = 1/(s+1);
y = ilaplace(H*X);
ezplot(y,[0 20])
axis([0 20 -6 6])
```

Sistema masa-resorte-amortiguador

**Ejemplo 8.17 Sistema masa-resorte-amortiguador**

Para el ejemplo del sistema masa-resorte-amortiguador (vea el ejemplo 8.14), podemos generar una animación de la respuesta de salida que resulta de la entrada $x(t) = \cos \omega_0 t, t \geq 0$ si ejecutamos el demo en el sitio Web. Esto proporciona una buena visualización de la respuesta transitoria y la consiguiente convergencia de la respuesta de salida con el comportamiento en estado estable. Invitamos al lector a ejecutar el demo para distintos valores de $M$, $D$, y $K$, y comparar los resultados con el cálculo analítico de la respuesta de salida mediante el uso de la transformada de Laplace.

### 8.4.1 Respuesta a otras entradas

Podemos generalizar el análisis antes mencionado para una entrada sinusoidal, y el de la sección 8.3 para una entrada escalón, para que reciban otras entradas de la siguiente manera. Suponga que la transformada $X(s)$ de la entrada $x(t)$ es una función racional; es decir, $X(s) = C(s)/D(s)$, donde $C(s)$ y $D(s)$ son polinomios en $s$ con el grado de $C(s)$ menor que el grado de $D(s)$. En términos de la presente notación, los polos de $X(s)$ son las raíces de $D(s) = 0$.

Ahora, si aplicamos $x(t)$ a un sistema con la función de transferencia $H(s) = B(s)/A(s)$, la transformada de la respuesta resultante (con condiciones iniciales iguales a cero) es

$$Y(s) = \frac{B(s)C(s)}{A(s)D(s)}$$

Si no existen polos comunes entre $H(s)$ y $X(s)$, podemos expresar a $Y(s)$ de la forma

$$Y(s) = \frac{E(s)}{A(s)} + \frac{F(s)}{D(s)} \tag{8.43}$$

donde $E(s)$ y $F(s)$ son polinomios en $s$. Entonces, si tomamos la transformada inversa en ambos lados de (8.43) obtenemos

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) \tag{8.44}$$

donde $y_1(t)$ es la transformada inversa de $E(s)/A(s)$ y $y_2(t)$ es la transformada inversa de $F(s)/D(s)$.

Es muy importante observar que la forma de $y_1(t)$ depende de manera directa de los polos de $H(s)$ y la forma de $y_2(t)$ depende de manera directa de los polos de $X(s)$. Cuando

el sistema es estable, $y_1(t)$ converge en cero cuando $t \to \infty$, en cuyo caso identificamos a $y_1(t)$ como la parte transitoria de la respuesta [aunque pudieran existir términos en $y_2(t)$ que también convergen a cero]. Un punto clave aquí es que la forma de $y_1(t)$ (es decir, la transitoria) solamente depende de los polos del sistema, sin importar la forma en particular de la señal $x(t)$.

Si $X(s)$ contiene polos sobre el eje $j\omega$, estos polos aparecen en la transformada de $y_2(t)$, y así $y_2(t)$ no convergirá a cero. Por lo tanto, identificamos a $y_2(t)$ como la parte de la respuesta en estado estable. Debemos hacer énfasis en que la forma de $y_2(t)$ (es decir, la respuesta en estado estable) sólo depende de los polos de la transformada $X(s)$ de la entrada, sin importar cuál es la función de transferencia $H(s)$ del sistema.

---

**Ejemplo 8.18 Forma de la respuesta de salida**

Suponga que el sistema tiene una función de transferencia $H(s)$ con dos polos reales $a, b$ y un par complejo de polos $\sigma \pm jc$, donde $a < 0, b < 0$, y $\sigma < 0$, de modo que el sistema es estable. Sea $x(t)$ cualquier entrada cuya transformación $X(s)$ es racional en $s$ y cuyos polos son diferentes de aquéllos de $H(s)$. Entonces la forma de la respuesta transitoria es

$$y_{\text{tr}}(t) = k_1 e^{at} + k_2 e^{bt} + k_3 e^{\sigma t} \cos(ct + \theta), t \geq 0$$

donde $k_1, k_2, k_3$, y $\theta$ son todas las constantes que dependen en la entrada específica y los ceros del sistema.

Si $x(t)$ es la función escalón, la forma de la respuesta completa es

$$y(t) = k_1 e^{at} + k_2 e^{bt} + k_3 e^{\sigma t} \cos(ct + \theta) + A, t \geq 0$$

donde $A$ es una constante. Cuando $x(t)$ es la rampa $x(t) = tu(t)$, la forma de la respuesta completa es

$$y(t) = k_1 e^{at} + k_2 e^{bt} + k_3 e^{\sigma t} \cos(ct + \theta) + A + Bt, t \geq 0$$

donde $A$ y $B$ son constantes. Cuando $x(t)$ es una sinusoide con frecuencia $\omega_0$, la forma completa de la respuesta es

$$y(t) = k_1 e^{at} + k_2 e^{bt} + k_3 e^{\sigma t} \cos(ct + \theta) + B \cos(\omega_0 t + \phi), t \geq 0$$

para algunas constantes $B$ y $\phi$. Debemos notar que los valores de $k_i$ en las expresiones previas no son las mismas.

---

## 8.5 FUNCIÓN DE RESPUESTA EN FRECUENCIA

Dado un sistema estable con función racional de transferencia $H(s) = B(s)/A(s)$, en la sección 8.4 mostramos que la respuesta en estado estable a la sinusoide $x(t) = C \cos \omega_0 t, t \geq 0$, con condiciones iniciales iguales a cero está dada por

$$y_{\text{ss}}(t) = C|H(\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \angle H(\omega_0)), t \geq 0 \tag{8.45}$$

donde $H(\omega)$ es la respuesta en frecuencia [la cual es igual a $H(s)$ con $s = j\omega$]. Como resultado de la relación fundamental (8.45), podemos estudiar el comportamiento del sistema mientras se relaciona con la respuesta a entradas sinusoidales en términos de las curvas de la respuesta en frecuencia mediante las gráficas de la función de magnitud $|H(\omega)|$ y de la función de fase $\angle H(\omega)$.

En ocasiones, la función de magnitud $|H(\omega)|$ está dada en *decibeles*, denotada por $|H(\omega)|_{\text{dB}}$ y definida por

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |H(\omega)|$$

El término *decibel* (identificado como dB) fue definido primero como la unidad de potencia generada en un circuito electrónico. De manera específica, definimos la potencia generada a través de un circuito como 10 veces el logaritmo (de base 10) de la potencia de salida dividida entre la potencia de entrada. Dado que la potencia en un circuito eléctrico es proporcional al cuadrado del voltaje o de la corriente y para cualquier constante $K$,

$$10 \log_{10}(K^2) = 20 \log_{10} K$$

podemos ver la definición anterior de $|H(\omega)|_{\text{dB}}$ como una generalización del significado original del término *decibel*.

Observe que

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} < 0 \text{ dB} \quad \text{cuando } |H(\omega)| < 1$$

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = 0 \text{ dB} \quad \text{cuando } |H(\omega)| = 1$$

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} > 0 \text{ dB} \quad \text{cuando } |H(\omega)| > 1$$

De esta manera, podemos ver de (8.45) que cuando $|H(\omega_0)|_{\text{dB}} < 0$ dB, el sistema atenúa la entrada sinusoidal $x(t) = C \cos \omega_0 t$; cuando $|H(\omega_0)|_{\text{dB}} = 0$ dB, el sistema deja pasar a $x(t)$ sin atenuación alguna; y cuando $|H(\omega_0)|_{\text{dB}} > 0$ dB, el sistema amplifica a $x(t)$.

A las gráficas de $|H(\omega)|$ (o $|H(\omega_0)|_{\text{dB}}$) *versus* $\omega$ y $\angle H(\omega)$ *versus* $\omega$ con $\omega$ en una escala logarítmica, se les conoce como *diagramas de Bode* de un sistema. En el siguiente desarrollo explicaremos una técnica para generar diagramas de Bode mediante el uso de las asíntotas.

Podemos determinar de manera experimental las curvas de respuesta en frecuencia (o diagramas de Bode) midiendo la respuesta en estado estable resultante a una entrada sinusoidal $x(t) = C \cos \omega_0 t$. Al realizar este experimento para distintos valores de $\omega_0$ es posible extrapolar los resultados para obtener la magnitud de la función $|H(\omega)|$ y la función de fase $\angle H(\omega)$ para todos los valores de $\omega$ ($\omega \geq 0$). Entonces, esto determina la función de frecuencia $H(\omega)$, dado que

$$H(\omega) = |H(\omega)| \exp[j \angle H(\omega)]$$

Podemos generar las curvas de la respuesta en frecuencia de manera directa desde la función de transferencia $H(s)$ mediante el comando `bode` de MATLAB. Su uso se ilustra en los siguientes ejemplos. También mostraremos que si el número de polos y ceros del sistema

no es grande, podemos determinar la forma general de las curvas de la respuesta en frecuencia a partir de una representación vectorial en el plano complejo de los factores incluidos en $H(s)$. Comenzaremos el desarrollo con el caso de primer orden.

### 8.5.1 Caso de primer orden

Considere el sistema de primer orden dado por la función de transferencia

$$H(s) = \frac{k}{s + B} \tag{8.46}$$

donde $k > 0$ y $B > 0$. La función de respuesta en frecuencia es $H(\omega) = k/(j\omega + B)$, y las funciones de magnitud y de fase están dadas por:

$$|H(\omega)| = \frac{k}{\sqrt{\omega^2 + B^2}} \tag{8.47}$$

$$\angle H(\omega) = -\tan^{-1}\frac{\omega}{B} \tag{8.48}$$

Podemos generar las curvas de la respuesta en frecuencia mediante la evaluación de (8.47) y (8.48) para distintos valores de $\omega$. En lugar de hacer esto, mostraremos que podemos determinar la forma de las curvas de la respuesta en frecuencia a partir de la representación vectorial del factor $j\omega + B$ que forma parte de $H(\omega)$. En la figura 8.17 podemos ver la representación vectorial de $j\omega + B$.

Podemos calcular también la magnitud $|j\omega + B|$ y el ángulo $\angle(j\omega + B)$ a partir de la representación vectorial $j\omega + B$ de la figura 8.17. Aquí, la magnitud $|j\omega + B|$ representa la longitud del vector del polo $s = -B$ al punto $s = j\omega$ en el eje imaginario, y el ángulo $\angle(j\omega + B)$ es el ángulo entre este vector y el eje real en el plano complejo. De la figura 8.17, es claro que $|j\omega + B|$ se hace infinito cuando $\omega \to \infty$ y $\angle(j\omega + B)$ se aproxima a los 90° cuando $\omega \to \infty$. Entonces, de (8.47) y (8.48), podemos ver que la magnitud de la función $|H(\omega)|$ comienza con el valor de $k/B$ cuando $\omega = 0$ y se aproxima a cero cuando $\omega \to \infty$, mientras la fase $\angle H(\omega)$ comienza con el valor 0° cuando $\omega = 0$ y se aproxima a $-90°$ cuando $\omega \to \infty$. Esto proporciona una buena indicación acerca de la forma de las curvas de la respuesta en frecuencia.

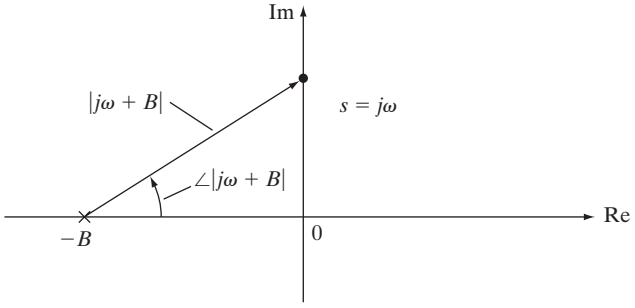



**FIGURA 8.17**
Representación del vector $j\omega + B$.

Para generar gráficas precisas, podemos utilizar MATLAB para calcular el vector complejo H para un intervalo de valores de frecuencia Por ejemplo, cuando $k = B = 2$, podemos generar las curvas mediante los siguientes comandos:

```
w = 0:.05:10; s = j*w;
H = 2./(s+2);
subplot(211),plot(w,abs(H));
subplot(212),plot(w,angle(H)*180/pi);
```

Desplegamos los resultados en la figura 8.18. La gráfica de la magnitud en la figura 8.18a revela que el sistema es un filtro pasa bajas, dado que pasa las sinusoides cuya frecuencia es menor que 2 rad/s, mientras que atenúa las sinusoides cuya frecuencia se encuentre arriba de 2 rad/s. Recuerde que la característica de la respuesta en frecuencia de un pasa bajas se vio por primera vez en el ejemplo 5.2, dado en términos del análisis de Fourier.

Para un valor cualquiera de $B > 0$, cuando $k = B$ el sistema cuya función de transferencia es $H(s) = k/(s + B)$ es un filtro pasa bajas, dado que la magnitud de la función $|H(\omega)|$ comienza con el valor $H(0) = k/B = 1$ y por lo tanto tiende a cero cuando $\omega \to \infty$. Al punto $\omega = B$ se le llama el punto de 3 dB del filtro, dado que éste es el valor de $\omega$ para el cual $|H(\omega)|_{\text{dB}}$ está 3 dB por debajo del valor pico de $|H(0)|_{\text{dB}} = 0$ dB. Decimos que este filtro pasa bajas tiene un *ancho de banda* de $B$ rad/s, debido a que pasa (con menos de 3 dB de atenuación) sinusoides cuya frecuencia es menor a $B$ rad/s. La *banda de paso* del filtro es el intervalo de frecuencia de 0 rad/s a $B$ rad/s. La *banda de rechazo* del filtro es el intervalo de frecuencia desde $B$ rad/s a $\infty$. Como vemos en la gráfica de magnitud en la figura 8.18a, para

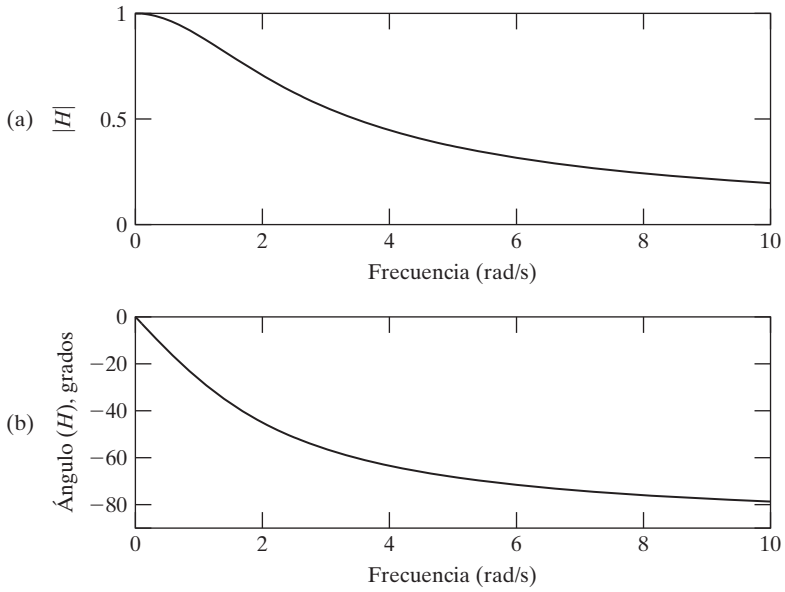



**FIGURA 8.18**
Curvas de respuesta en frecuencia para $H(s) = 2/(s + 2)$: (a) curva de magnitud; (b) curva de fase.

este filtro, el corte entre la banda de paso y la banda de rechazo no es muy preciso. En la siguiente sección mostraremos cómo obtener un corte más preciso al incrementar el número de polos del sistema.

**Sistema de un solo polo con un cero.** A partir de los resultados derivados previamente, descubrimos que un sistema con un solo polo y sin ceros es un filtro pasa bajas. Podemos modificar esta característica de la respuesta en frecuencia al agregar un cero al sistema. En particular, considere el sistema de un solo polo con la función de transferencia

$$H(s) = \frac{s + C}{s + B}$$

Suponemos que $B > 0$ y $C > 0$. Si hacemos $s = j\omega$ en $H(s)$ obtenemos

$$H(\omega) = \frac{j\omega + C}{j\omega + B}$$

Entonces, las funciones de fase y magnitud están dadas por

$$|H(\omega)| = \frac{|j\omega + C|}{|j\omega + B|} = \sqrt{\frac{\omega^2 + C^2}{\omega^2 + B^2}}$$

$$\angle H(\omega) = \angle(j\omega + C) - \angle(j\omega + B)$$

$$= \tan^{-1}\frac{\omega}{C} - \tan^{-1}\frac{\omega}{B}$$

Determinaremos las curvas de respuesta en frecuencia para el caso cuando $0 < C < B$. Primero, considere las representaciones vectoriales para $j\omega + B$ y $j\omega + C$ que mostramos en la figura 8.19. Como vimos en la figura, tanto $|j\omega + B|$ como $|j\omega + C|$ crecen cuando $\omega$ crece a partir de cero; sin embargo, el porcentaje de incremento en $|j\omega + C|$ es mayor. Por lo tanto,

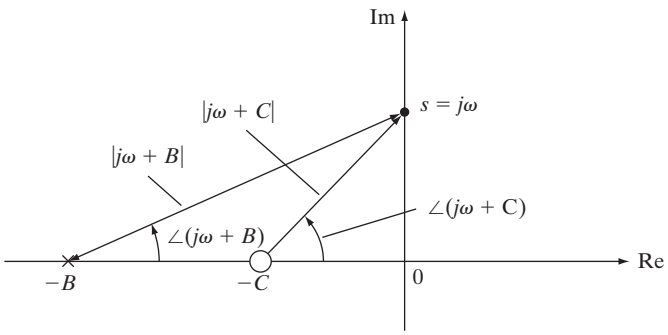



**FIGURA 8.19**
Representaciones vectoriales de $j\omega + B$ y $j\omega + C$ cuando $0 < C < B$.

$|H(\omega)|$ comienza con un valor $|H(0)| = C/B$, y luego $|H(\omega)|$ crece al crecer $\omega$ a partir de cero. Para valores grandes de $\omega$ la diferencia en $|j\omega + B|$ y $|j\omega + C|$ es muy pequeña, y entonces $|H(\omega)| \to 1$ cuando $\omega \to \infty$.

De la figura 8.19 vemos que los ángulos $\angle(j\omega + B)$ y $\angle(j\omega + C)$ crecen al crecer $\omega$ a partir de cero; sin embargo, en principio el incremento $\angle(j\omega + C)$ es mayor. De ahí, $\angle H(\omega)$ comienza con un valor $\angle H(0) = 0°$, y luego $\angle H(\omega)$ crece cuando $\omega$ crece a partir de cero. Para $\omega > B$ el porcentaje de incremento en $\angle(j\omega + B)$ es mayor que el de $\angle(j\omega + C)$, y entonces $\angle H(\omega)$ decrece cuando $\omega$ crece a partir de $\omega = B$. De ahí que, $\angle H(\omega)$ tendrá un valor máximo en algún punto de $\omega$ entre $\omega = C$ y $\omega = B$. Cuando $\omega \to \infty$, tanto el ángulo $\angle(j\omega + B)$ como $\angle(j\omega + C)$ se aproximan a 90°, y por lo tanto $\angle H(\omega) \to 0°$ cuando $\omega \to \infty$.

En el caso $C = 1$ y $B = 20$, calculamos con MATLAB las curvas de respuesta en frecuencia exactas mediante el comando `bode`. En la figura 8.20 podemos ver los resultados. En la figura 8.20a podemos ver que el sistema es un filtro *pasa altas,* dado que pasa todas las frecuencias arriba de $B = 20$ rad/s con una pequeña atenuación. Aunque los filtros pasa altas existen en la teoría, no existen en la práctica, dado que los sistemas actuales no pueden pasar sinusoides con frecuencias grandes arbitrarias. En otras palabras, ningún sistema real puede tener un ancho de banda infinito. Así, cualquier implementación de la función de transferencia $H(s) = (s + C)/(s + B)$ sería solamente una aproximación de un filtro pasa altas (en el caso $0 < C < B$).

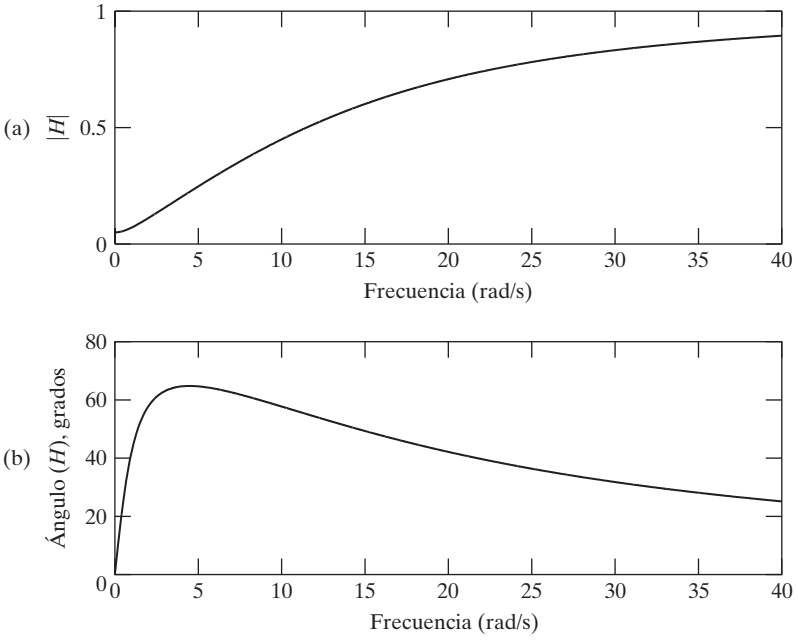



**FIGURA 8.20**
Curvas de respuesta en frecuencia para $H(s) = (s + 1)/(s + 20)$: (a) curva de magnitud; (b) curva de fase.

### 8.5.2 Sistemas de segundo orden

Considere ahora el sistema con la siguiente función de transferencia

$$H(s) = \frac{k}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

donde $k > 0$, $\zeta > 0$, y $\omega_n > 0$, de manera que el sistema es estable. Como explicamos en la sección 8.3, los polos del sistema son

$$p_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$
$$p_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Si expresamos $H(s)$ en términos $p_1$ y $p_2$ nos da

$$H(s) = \frac{k}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

y así, las funciones de magnitud y de fase están dadas por

$$|H(\omega)| = \frac{k}{|j\omega - p_1||j\omega - p_2|} \tag{8.49}$$

$$\angle H(\omega) = -\angle(j\omega - p_1) - \angle(j\omega - p_2) \tag{8.50}$$

Como vimos en la sección 8.3 los polos $p_1$ y $p_2$ son reales si y sólo si $\zeta \geq 1$. En este caso podemos determinar la forma de las curvas de la respuesta en frecuencia mediante la consideración de las representaciones vectoriales de $j\omega - p_1$ y $j\omega - p_2$, que aparecen en la figura 8.21. Aquí las magnitudes $|j\omega - p_1|$ y $|j\omega - p_2|$ se hacen infinitas cuando $\omega \to \infty$, y los ángulos $\angle(j\omega - p_1)$ y $\angle(j\omega - p_2)$ se aproximan a 90° cuando $\omega \to \infty$. Entonces, de (8.49) y (8.50), vemos que la magnitud $|H(\omega)|$ comienza con el valor $|k/p_1p_2| = k/\omega_n^2$ en $\omega = 0$ y se aproxima a cero cuando $\omega \to \infty$. La fase $\angle H(\omega)$ comienza en el valor 0° cuando $\omega = 0$ y se aproxima a −180°

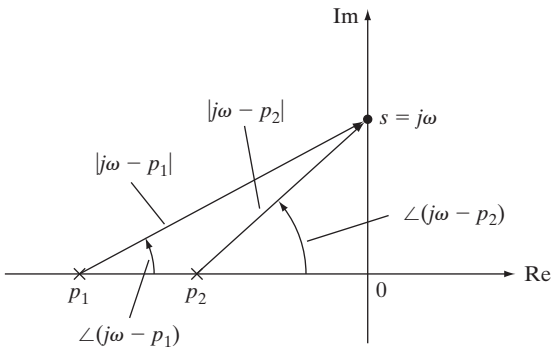



**FIGURA 8.21**
Representaciones vectoriales de $j\omega - p_1$ y $j\omega - p_2$, cuando $p_1$ y $p_2$ son reales.

cuando $\omega \rightarrow \infty$. Por lo tanto cuando $k = \omega_n^2$, $H(0) = k/\omega_n^2 = 1$ y el sistema es un filtro pasa bajas cuyo ancho de banda depende de los valores de $\zeta$ y $\omega_n$. Cuando $\zeta = 1$, el ancho de banda es igual a $\left(\sqrt{\sqrt{2} - 1}\right)\omega_n^2$. Podemos verificar lo anterior si consideramos las representaciones vectoriales en la figura 8.21. Los detalles los dejamos al lector.

Con $\zeta = 1$, $\omega_n = 3.1$ rad/s, y $k = \omega_n^2$, el ancho de banda del filtro pasa bajas es aproximadamente igual a 2 rad/s. Podemos calcular las curvas de respuesta en frecuencia mediante los siguientes comandos de MATLAB:

```
w = 0:.05:10; s = j*w;
zeta = 1; wn = 3.1;
H = wn^2./(s.^2+2*zeta*wn*s+wn^2);
subplot(211),plot(w,abs(H));
subplot(212),plot(w,angle(H)*180/pi);
```

En la figura 8.22 aparecen los resultados. Además, en esta figura desplegamos las curvas de respuesta en frecuencia para el filtro pasa bajas de un solo polo con la función de transferencia $H(s) = 2/(s + 2)$. Observe que el filtro de dos polos tiene un corte más preciso que el de un solo polo.

**Caso de polos complejos.** Ahora supondremos que $0 < \zeta < 1$, de manera que los polos $p_1$, y $p_2$ son complejos. Con $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$ (como definimos en la sección 8.3), los polos son $p_1, p_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d$. Entonces $H(\omega)$ se puede expresar de la forma

$$H(\omega) = \frac{k}{(j\omega + \zeta\omega_n + j\omega_d)(j\omega + \zeta\omega_n - j\omega_d)}$$

En la figura 8.23 podemos ver las representaciones vectoriales de $j\omega + \zeta\omega_n + j\omega_d$ y $j\omega + \zeta\omega_n - j\omega_d$. Observe que cuando $\omega$ se incrementa a partir $\omega = 0$, la magnitud $|j\omega + \zeta\omega_n - j\omega_d|$ decrece, mientras que la magnitud $|j\omega + \zeta\omega_n + j\omega_d|$ se incrementa. Para $\omega > \omega_d$, ambas magnitudes crecen hasta hacerse infinitas, y por lo tanto $|H(\omega)| \rightarrow 0$ cuando $\omega \rightarrow \infty$. Sin embargo, no es claro si $|H(\omega)|$ primero aumenta o disminuye cuando $\omega$ se incrementa a partir de $\omega = 0$. Resulta que cuando $\zeta < 1/\sqrt{2}$, la magnitud $|H(\omega)|$ aumenta cuando $\omega$ aumenta a partir de 0; y cuando $\zeta \geq 1/\sqrt{2}$, la magnitud $|H(\omega)|$ disminuye cuando $\omega$ aumenta a partir de 0. Podemos comprobar esto si tomamos la derivada de $|H(\omega)|$ respecto a $\omega$. Los detalles los dejamos en un problema de tarea (problema 8.23).

Dado que la magnitud de la función $|H(\omega)|$ tiene un pico cuando $\zeta < 1/\sqrt{2}$, decimos que la función tiene una *resonancia* cuando $\zeta < 1/\sqrt{2}$. Además, podemos mostrar que el pico ocurre cuando $\omega = \omega_r = \omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2}$, y por lo tanto a $\omega_r$ le llamamos *frecuencia de resonancia* del sistema. La magnitud de la resonancia (es decir, el valor pico de $|H(\omega)|$) aumenta cuando $\zeta \rightarrow 0$, que corresponde a los polos que se aproximan al eje $j\omega$ (vea la figura 8.23). Cuando $\zeta \geq 1/\sqrt{2}$, el sistema no contiene una resonancia, y no existe frecuencia de resonancia.

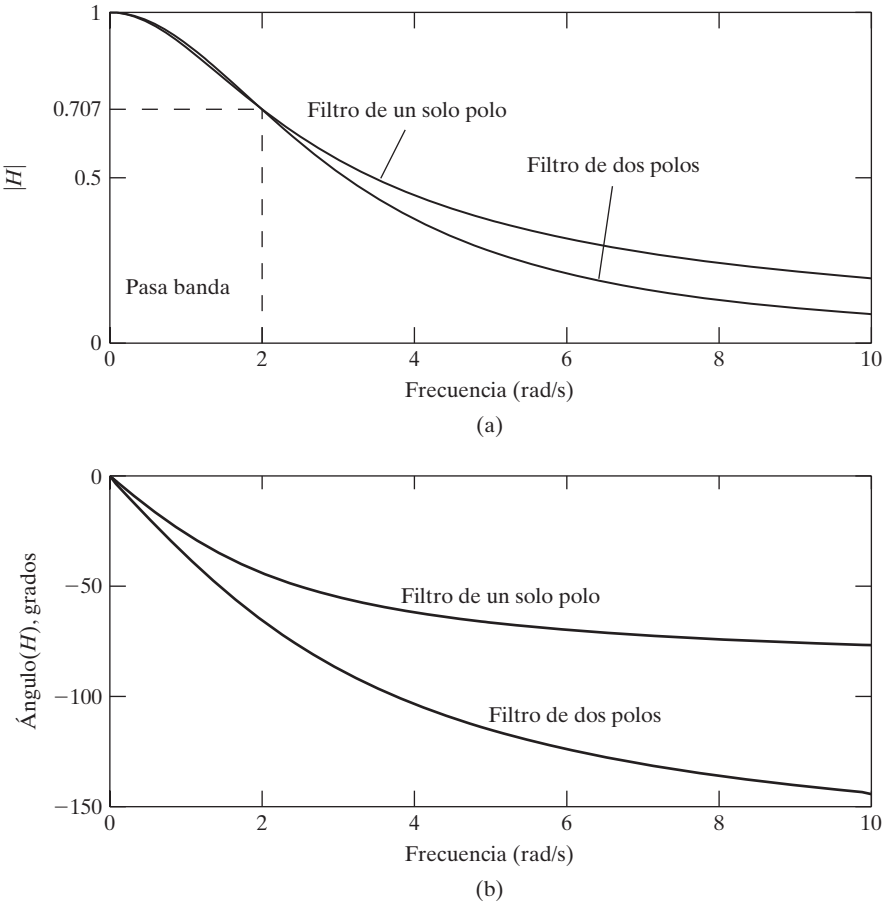



**FIGURA 8.22**
Curvas de respuesta en frecuencia del filtro pasa bajas de dos polos con $\zeta = 1$ y del filtro pasa bajas de un solo polo:(a) curva de magnitud; (b) curva de fase.

Cuando $\zeta < 1/\sqrt{2}$ y el valor pico $|H(\omega)|$ es igual a 1 (es decir $|H(\omega_r)| = 1$), el sistema se comporta como un filtro *pasa banda* dado que permite el paso de sinusoides de entrada cuyas frecuencias se encuentran en la vecindad de la frecuencia de resonancia $\omega_r$. La *frecuencia central* del filtro es igual a $\omega_r$. El ancho de banda del filtro está definido por todas las frecuencias de $\omega$ para las cuales la magnitud $|H(\omega)|$ es mayor que o igual a $M_p/\sqrt{2}$, donde $M_p = |H(\omega_r)|$ es el valor pico de $|H(\omega)|$. De las representaciones vectoriales en la figura 8.23 podemos ver que el ancho de banda es aproximadamente igual a $2\zeta\omega_n$. Esta característica de filtro pasa banda se ilustra en el siguiente ejemplo. En la sección 8.6 explicaremos el filtrado de manera más detallada.

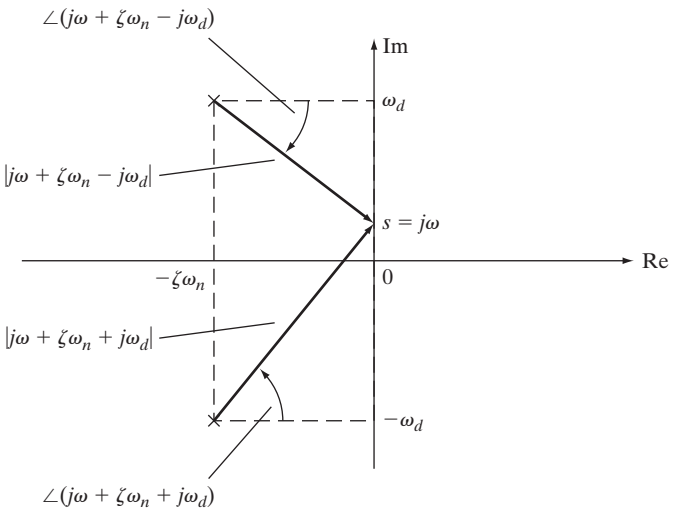



**FIGURA 8.23**
Representaciones vectoriales para el caso de polos complejos.

## Ejemplo 8.19 Filtro pasa banda de dos polos

Suponga que el objetivo es diseñar un filtro pasa banda de dos polos con una frecuencia central $\omega_r = 10$ rad/s, y un ancho de banda igual a 2 rad/s. Entonces,

$$10 = \omega_r = \omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

y

$$2 = 2\zeta\omega_n$$

Resolvemos la segunda ecuación para $\omega_n$ y sustituimos el resultado en la primera ecuación,

$$10 = \frac{\sqrt{1 - 2\zeta^2}}{\zeta}$$

y por lo tanto

$$\frac{1 - 2\zeta^2}{\zeta^2} = 100$$

Resolvemos para $\zeta$ y obtenemos

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{102}} \approx 0.099$$

Entonces,

$$\omega_n = \frac{1}{\zeta} = 10.1$$

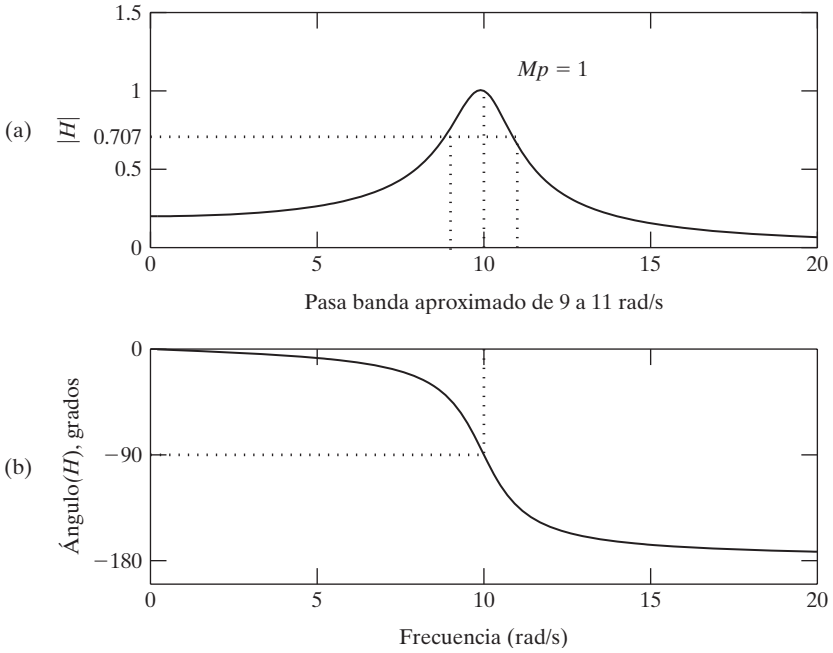



**FIGURA 8.24**
Curvas de respuesta en frecuencia del ejemplo 8.19: (a) curva de magnitud; (b) curva de fase.

y la función de transferencia del filtro deseado es

$$H(s) = \frac{k}{s^2 + 2s + 102}$$

Ahora, debemos elegir la constante $k$ de modo que el valor pico de $|H(\omega)|$ sea igual a 1. Dado que la frecuencia central $\omega_r$ del filtro es igual a 10 rad/s, el pico ocurre en $\omega = 10$, y por lo tanto debemos elegir $k$ de modo que $|H(10)| = 1$. Entonces, si hacemos $s = j10$ en $H(s)$ y tomamos la magnitud obtenemos

$$|H(10)| = \frac{k}{|-100 + j20 + 102|} = \frac{k}{20.1}$$

Así, $k = 20.1$. Mediante el uso de MATLAB obtenemos como resultado las curvas de respuesta en frecuencia que aparecen en la figura 8.24. A partir de la gráfica podemos ver que ya obtuvimos la frecuencia central y el ancho de banda deseados.

### Ejemplo 8.20 Sistema masa-resorte-amortiguador

Sistema masa-resorte-amortiguador

Para el sistema masa-resorte-amortiguador (vea el ejemplo 8.14), recuerde que el factor de amortiguamiento $\zeta$ y la frecuencia natural $\omega_n$ están dados por

$$\zeta = \frac{D}{2\sqrt{MK}}, \omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

Cuando $\zeta < 1/\sqrt{2}$, lo cual implica que $D < \sqrt{2MK}$, el sistema tiene una resonancia, con la frecuencia de resonancia dada por

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2} = \sqrt{\frac{K}{M}}\sqrt{1 - \frac{D^2}{2MK}} = \frac{\sqrt{2MK - D^2}}{\sqrt{2}M} \tag{8.51}$$

Para algunos valores positivos de $M, D$, y $K$ que satisfacen la condición $D < \sqrt{2MK}$, invitamos al lector a ejecutar el demo en línea, con la entrada igual al barrido del seno. Verifique que la frecuencia de resonancia observada en el demo sea la misma que el valor calculado mediante el uso de (8.51)

### 8.5.3 Construcción de gráficas de Bode mediante asíntotas

Dado un sistema con la función de transferencia $H(s)$, recuerde que los diagramas de Bode son las gráficas de la función de magnitud $|H(\omega)|_{\text{dB}} = 20\log|H(\omega)|$ y la función de fase $\angle H(\omega)$, donde la escala de la variable frecuencia $\omega$ es logarítmica. El uso de la función log de la magnitud $|H(\omega)|_{\text{dB}}$ y la escala logarítmica para $\omega$ permite a las gráficas de Bode aproximar mediante líneas rectas, llamadas *asíntotas*, las cuales podemos trazar con facilidad. Para ver esta construcción, consideremos primero el sistema con la siguiente función de transferencia

$$H(s) = \frac{A(s + C_1)(s + C_2)\cdots(s + C_M)}{s(s + B_1)(s + B_2)\cdots(s + B_{N-1})} \tag{8.52}$$

En (8.52), $A$ es una constante real, los ceros $-C_1, -C_2,\ldots,-C_M$ son números reales, y los polos $-B_1, -B_2,\ldots, -B_3,\ldots, -B_{N-1}$ son números reales (más adelante explicaremos el caso de números complejos y/o ceros). Entonces, al establecer $s = j\omega$ en (8.52) obtenemos

$$H(\omega) = \frac{A(j\omega + C_1)(j\omega + C_2)\cdots(j\omega + C_M)}{j\omega(j\omega + B_1)(j\omega + B_2)\cdots(j\omega + B_{N-1})}$$

Al dividir cada factor $j\omega + C_i$, en el numerador entre $C_i$ y dividir cada factor $j\omega + B_i$ en el denominador entre $B_i$ se obtiene

$$H(\omega) = \frac{K\left(j\frac{\omega}{C_1} + 1\right)\left(j\frac{\omega}{C_2} + 1\right)\cdots\left(j\frac{\omega}{C_M} + 1\right)}{j\omega\left(j\frac{\omega}{B_1} + 1\right)\left(j\frac{\omega}{B_2} + 1\right)\cdots\left(j\frac{\omega}{B_{N-1}} + 1\right)} \tag{8.53}$$

donde $K$ es una constante real dada por

$$K = \frac{AC_1C_2\cdots C_M}{B_1B_2\cdots B_{N-1}}$$

Ahora, dado que $\log(AB) = \log(A) + \log(B)$ y $\log(A/B) = \log(A) - \log(B)$, de (8.53) la magnitud en dB de $H(\omega)$ está dada por

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = 20\log|K| + 20\log\left|j\frac{\omega}{C_1} + 1\right| + \cdots + 20\log\left|j\frac{\omega}{C_M} + 1\right|$$
$$-20\log|j\omega| - 20\log\left|j\frac{\omega}{B_1} + 1\right| - \cdots - 20\log\left|j\frac{\omega}{B_{N-1}} + 1\right|$$

La fase de $H(\omega)$ está dada por

$$\angle H(\omega) = \angle K + \angle\left(j\frac{\omega}{C_1} + 1\right) + \cdots + \angle\left(j\frac{\omega}{C_M} + 1\right)$$
$$- \angle(j\omega) - \angle\left(j\frac{\omega}{B_1} + 1\right) - \cdots - \angle\left(j\frac{\omega}{B_{N-1}} + 1\right)$$

Por lo tanto, podemos descomponer las funciones de magnitud y de fase en una suma de factores individuales. Podemos calcular los diagramas de Bode para cada factor y después sumarlos en forma gráfica para obtener los diagramas de Bode para $H(\omega)$. Para llevar a cabo este procedimiento, es necesario primero determinar las gráficas de Bode para los tres tipos de factores en $H(\omega)$: una constante $K$, el factor $j\omega$ y los factores de la forma $j\omega T + 1$, donde $T$ es un número real. A continuación, derivamos junto a cada factor las aproximaciones hacia la gráfica de Bode mediante líneas rectas (asíntotas), y a partir de aquí podemos dibujar las curvas reales. En este desarrollo suponemos que $T > 0$ en el factor $j\omega T + 1$.

**Factores constantes.** La gráfica de la magnitud para el factor constante $K$ es una línea vertical constante contra $\omega$ dada por

$$|K|_{\text{dB}} = 20\log|K|$$

De manera similar, la fase del factor $K$ es una línea constante contra $\omega$:

$$\angle K = \begin{cases} 0^\circ & \text{para } K > 0 \\ -180^\circ & \text{para } K < 0 \end{cases}$$

**Factores de ($j\omega T + 1$).** La magnitud de $(j\omega T + 1)$ en dB está dada por

$$|j\omega T + 1|_{\text{dB}} = 20\log\sqrt{\omega^2T^2 + 1}$$

Defina la frecuencia de esquina $\omega_{\text{cf}}$ como el valor de $\omega$ para el cual $\omega T = 1$; es decir, $\omega_{\text{cf}} = 1/T$. Entonces, para $\omega < \omega_{\text{cf}}$, $\omega T$ es menor a 1, y por lo tanto la magnitud puede ser aproximada mediante

$$|j\omega T + 1|_{\text{dB}} \approx 20\log(1) = 0\ \text{dB}$$

Para frecuencias $\omega > \omega_{cf}$, $\omega T$ es mayor a 1 y la magnitud se puede aproximar mediante

$$|j\omega T + 1|_{dB} \approx 20 \log(\omega T)$$

Cuando graficamos con una escala logarítmica para $\omega$, el término $20 \log(\omega T)$ es una línea recta con pendiente igual a 20 dB/década, donde década es un factor de 10 en la frecuencia.

La gráfica de la constante 0 dB para $\omega < \omega_{cf}$ y la gráfica de la línea $20 \log(\omega T)$ para $\omega > \omega_{cf}$ son las asíntotas para el término de magnitud $|j\omega T + 1|_{dB}$. En la figura 8.25a graficamos las asíntotas junto con la gráfica de Bode de la función de magnitud exacta para el factor $j\omega T + 1$. Como vimos en la figura, las asíntotas proporcionan una buena aproximación para las frecuencias lejanas a la frecuencia de esquina. En la frecuencia de esquina, la aproximación de las asíntotas está desviada por aproximadamente 3 dB.

El ángulo del factor $(j\omega T + 1)$ está dado por

$$\angle(j\omega T + 1) = \tan^{-1} \omega T$$

Para frecuencias muy pequeñas, $\angle(j\omega T + 1) \approx 0°$, y para frecuencias muy grandes, $\angle(j\omega T + 1) \approx 90°$. Una aproximación en línea recta (asíntota) de $\angle(j\omega T + 1)$ para $\omega \leq \omega_{cf}/10$ es $\angle(j\omega T + 1) = 0°$, y para $\omega \geq 10\omega_{cf}$, $\angle(j\omega T + 1) = 90°$. Podemos aproximar la transición de 0° a 90° mediante una línea recta con pendiente 45°/década dibujada sobre un intervalo de dos décadas a partir de $\omega_{cf}/10$ a $10\omega_{cf}$. En la figura 8.25b podemos ver la aproximación mediante asíntotas así como la gráfica del ángulo exacto. Las aproximaciones son bastante precisas con un error aproximado de 5° en las esquinas.

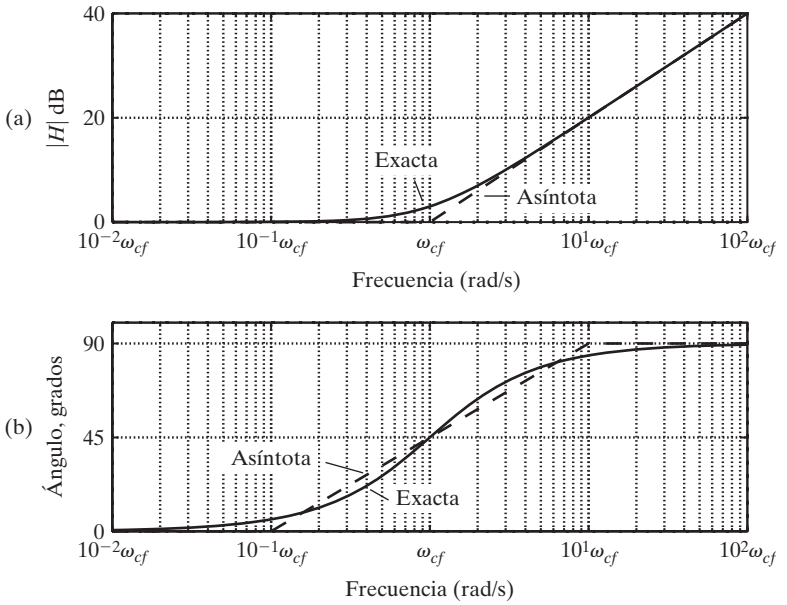



**FIGURA 8.25**
Gráficas de magnitud (a) y fase (b) para el factor $j\omega T + 1$.

Cuando el factor $(j\omega T + 1)$ está en el numerador de $H(\omega)$, representa un cero en $s = -1/T$ dentro de la función de transferencia $H(s)$. Del análisis previo, vemos que cada cero (real) dentro de la función de transferencia contribuye con un ángulo de fase de aproximadamente $+90°$ en altas frecuencias y con una pendiente de $+20$ dB/década en magnitud en altas frecuencias. Cuando el factor $j\omega T + 1$ se encuentra en el denominador de $H(\omega)$, corresponde a un polo de $H(s)$ en $-1/T$. Dado que

$$|(j\omega T + 1)^{-1}|_{\text{dB}} = -|j\omega T + 1|_{\text{dB}}$$

y

$$\angle(j\omega T + 1)^{-1} = -\angle(j\omega T + 1)$$

un factor polo de $j\omega T + 1$ contribuye con un ángulo de fase de aproximadamente $-90°$ en altas frecuencias y una pendiente de $-20$ dB/década en magnitud en altas frecuencias. Las curvas de magnitud y de fase para un factor polo $j\omega T + 1$ son las negativas de las curvas de magnitud y de fase para un factor cero $j\omega T + 1$ que aparecen en la figura 8.25.

***Factores jω.*** La magnitud de $j\omega$ está dada por

$$|j\omega|_{\text{dB}} = 20\log(\omega)$$

Cuando graficamos sobre una escala logarítmica para $\omega$, ésta es una línea recta con pendiente 20 dB/década. La línea cruza a la línea 0 dB en $\omega = 1$. Para ver esto, observe que cuando $\omega = 1$,

$$|j\omega|_{\text{dB}} = 20\log(1) = 0 \text{ dB}$$

En la figura 8.26a, aparece la gráfica de $|j\omega|_{\text{dB}}$. En este caso, no necesitamos una aproximación, ya que la gráfica exacta es una línea recta. La gráfica de la fase es también una línea recta con un valor constante igual $<j\omega = 90°$, como podemos ver en la figura 8.26b. Es evi-

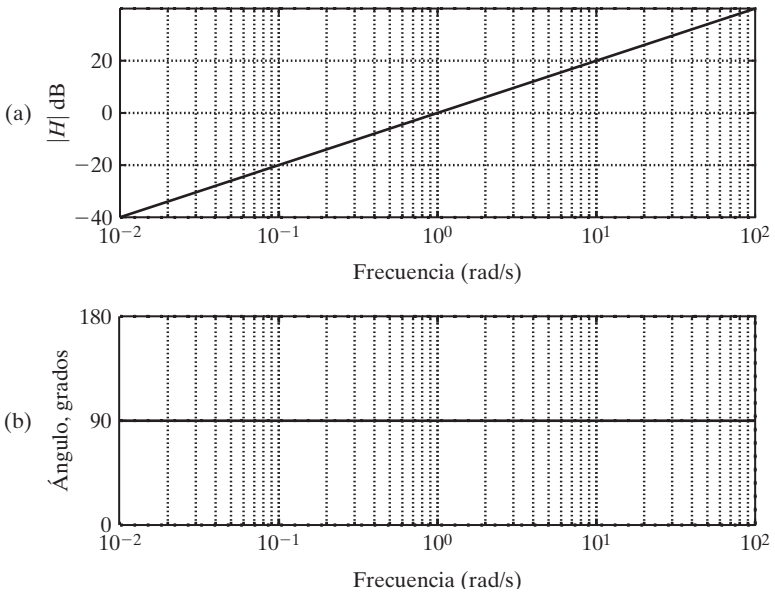



**FIGURA 8.26**
Gráficas de (a) magnitud y (b) fase para el factor $j\omega$.

dente que un factor $j\omega$ en el numerador de $H(\omega)$ corresponde a un cero de $H(s)$ en $s = 0$. Cuando el factor $j\omega$ está en el denominador de $H(\omega)$, las gráficas de la figura 8.26 son anuladas, lo que da como resultado una pendiente de $-20$ dB/década en la gráfica de magnitud y $-90°$ en la gráfica de fase.

**Cómo dibujar diagramas de Bode.** Ahora, para calcular los diagramas de Bode para un sistema con $H(\omega)$ dado por (8.53), podemos simplemente agregar juntos los diagramas de Bode para los distintos factores. En el ejemplo siguiente explicaremos el procedimiento.

---

### Ejemplo 8.21 Diagramas de Bode

Considere el sistema con la función de transferencia

$$H(s) = \frac{1000(s + 2)}{(s + 10)(s + 50)}$$

Si escribimos $H(\omega)$ en la forma (8.53) obtenemos

$$H(\omega) = \frac{1000(j\omega + 2)}{(j\omega + 10)(j\omega + 50)} = \frac{4(j\omega(0.5) + 1)}{(j\omega(0.1) + 1)(j\omega(0.02) + 1)}$$

Los factores que definen a $H(\omega)$ son 4, $[j\omega(0.5) + 1]$, $[j\omega(0.1) + 1]^{-1}$, y $[j\omega(0.02) + 1]\omega^{-1}$. El factor constante tiene una magnitud en decibeles de 20 log (4) = 12.04 dB y un ángulo de 0°. Los otros factores tienen frecuencias de esquina de $\omega_{cf} = 2$, 10, y 50, respectivamente. En la figura 8.27 podemos ver, con líneas punteadas, las aproximaciones mediante asíntotas de la magnitud y la fase para cada factor (numeradas del 1 al 4). Además, en la figura 8.27 mostramos también la suma de todas las asíntotas mediante una línea continua.

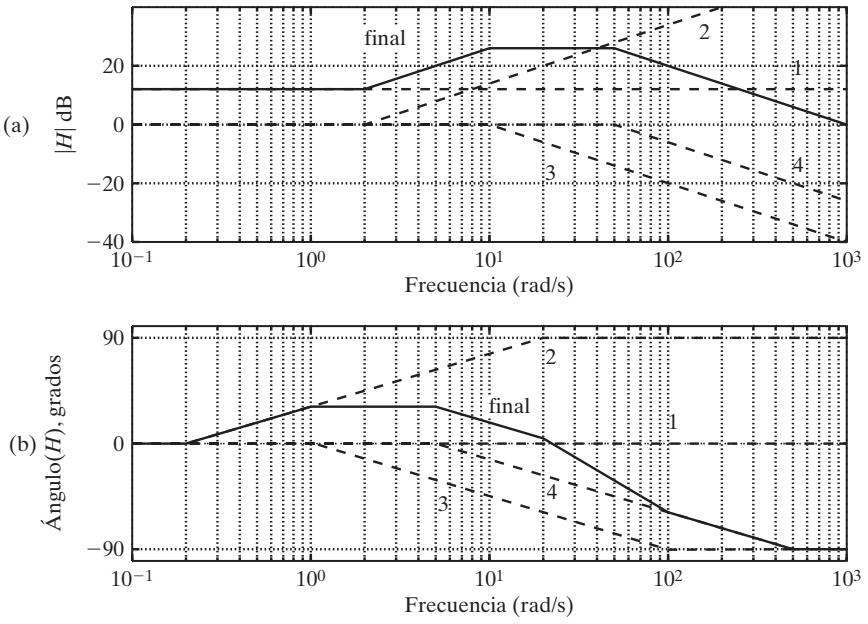



**FIGURA 8.27**
Gráficas de (a) magnitud y (b) fase para las asíntotas del ejemplo 8.21.

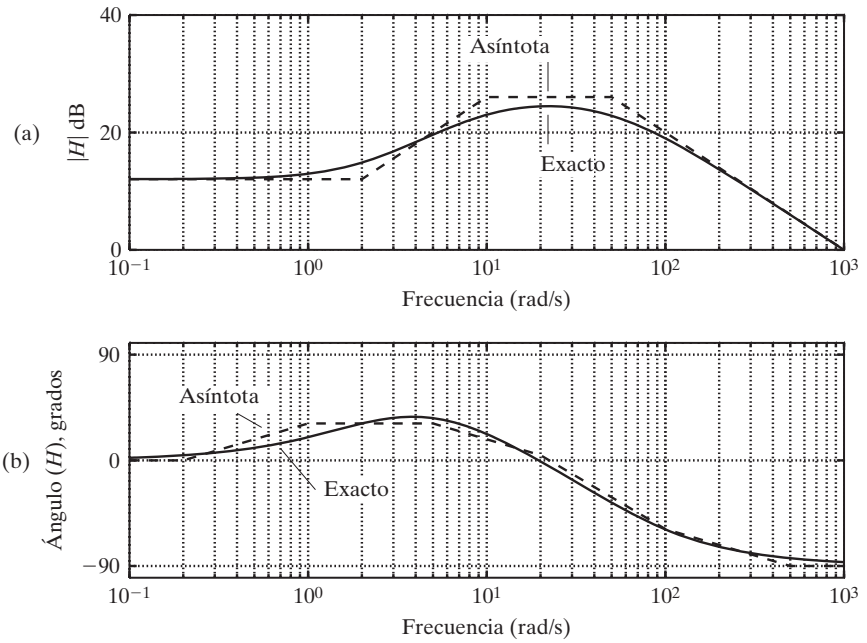



**FIGURA 8.28**
Suma de las asíntotas y diagramas de Bode exactos para el ejemplo 8.21.

Observe que cuando sumamos las gráficas, es muy fácil sumar las pendientes de manera algebraica. Por ejemplo, la pendiente de la curva de magnitud para $\omega < 2$ es 0 dB/década; la pendiente entre $\omega = 2$ y $\omega = 10$ es 20 dB/década; la pendiente entre $\omega = 10$ y $\omega = 50$ es 0 dB/década; y la pendiente para $\omega > 50$ es $-20$ dB/década. Las pendientes en la gráfica del ángulo se suman de manera similar. En la figura 8.28 podemos ver la gráfica exacta obtenida mediante MATLAB, junto con las asíntotas sumadas. Los comandos de MATLAB utilizados para generar la respuesta en frecuencia exacta son

```
w = logspace(-1,3,300); s = j*w;
H = 1000*(s+2)./(s+10)./(s+50);
magdb = 20*log10(abs(H));
phase = angle(H)*180/pi;
```

En el Control System Toolbox existe un comando llamado `bode` que puede ser utilizado además para la gráfica exacta de Bode. Demostraremos su uso mediante el siguiente comando:

```
num = [1000 2000];
den = conv([1 10],[1 50]); % conv multiplica los polinomios
bode(num,den);
```

---

La suma de las pendientes para calcular la curva final, como podemos ver en la figura 8.21, es el fundamento para construir de una manera más corta las gráficas de magnitud: Primero, determinar le frecuencia de esquina más pequeña. Debajo de esa frecuencia, los únicos factores diferentes a cero son la constante y el factor $j\omega$. Cada factor $j\omega$ en el numerador da como resultado una pendiente de 20 dB/década con un cruce por 0 dB en $\omega = 1$ rad/s,

mientras que cada factor $j\omega$ en el denominador da como resultado una pendiente de $-20$ dB/década con un cruce por 0 dB en $\omega = 1$ rad/s. Por lo tanto, un factor de $(j\omega)^q$ en el numerador (donde $q$ es un entero positivo o negativo) corresponde a una línea con pendiente $20q$ dB/década y con cruce por 0 dB en $\omega = 1$ rad/s. Entonces, esta línea es desplazada por la magnitud en decibeles del factor constante para generar la asíntota de baja frecuencia. Esta asíntota se extiende hasta la frecuencia de esquina más pequeña en la que ocurre un cambio en la pendiente. Además, un cambio de pendiente ocurrirá en cada una de las frecuencias de esquina. El cambio de pendiente en la frecuencia de esquina $\omega_{cf}$ es de $-20$ dB/década si la frecuencia de esquina corresponde a un solo polo, y $+20$ dB/década si $\omega_{cf}$ corresponde a un solo cero. La pendiente en alta frecuencia debe ser $-20(N - M)$ dB/década, donde $N$ es el número de polos y $M$ es el número de ceros.

De manera similar, podemos graficar el ángulo mediante el uso de un atajo similar, dado que cada polo agrega $-90°$ en altas frecuencias con una pendiente de transición de $-45°$/década, y cada cero agrega $+90°$ en altas frecuencias con una pendiente de transición de $+45°$/década. Dado que existen dos cambios de pendiente con cada polo o cero, es más fácil graficar los términos individuales y luego agregarlos de manera gráfica. Una buena forma de verificar la gráfica final es verificar que el ángulo en altas frecuencias sea igual a $-90(N - M)$, donde $N$ es el número de polos y $M$ es el número de ceros.

**Polos o ceros complejos.** Suponga que $H(s)$ contiene un factor cuadrático de la forma $s^2 + 2\zeta/\omega_n s + \omega_n^2$, con $0 < \zeta < 1$ y $\omega_n > 0$ (de modo que los ceros son complejos). Al establecer $s = j\omega$ y dividir entre $\omega_n^2$ da como resultado el factor $(j\omega/\omega_n)^2 + (2\zeta/\omega_n)j\omega + 1$. La magnitud en decibeles para este término cuadrático es

$$\left|\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega + 1\right|_{\text{dB}} = 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Defina la frecuencia de esquina tal que sea la frecuencia por la cual $\omega/\omega_n = 1$; es decir, $\omega_{cf} = \omega_n$. Entonces podemos llevar a cabo la construcción de la asíntota al hacer la siguiente aproximación para bajas frecuencias $\omega < \omega_n$:

$$\left|\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\right)j\omega + 1\right|_{\text{dB}} \approx 20 \log(1) = 0 \text{ dB}$$

Y para frecuencias grandes $\omega > \omega_n$,

$$\left|\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega + 1\right|_{\text{dB}} \approx 20 \log\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) = 40 \log\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$$

Así, la asíntota de alta frecuencia es una línea recta con pendiente igual a 40 dB/década. En la figura 8.29a podemos ver la aproximación por asíntotas de la magnitud del término cuadrático. En este caso la diferencia entre la aproximación por asíntota y la gráfica exacta depende del valor de $\zeta$, como lo explicaremos más adelante.

El ángulo para bajas frecuencias $\omega < \omega_n$ es aproximado mediante

$$\angle[(j\omega/\omega_n)^2 + (2\zeta/\omega_n)j\omega + 1] = \tan^{-1}\frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \approx \tan^{-1}\frac{0}{1} = 0°$$

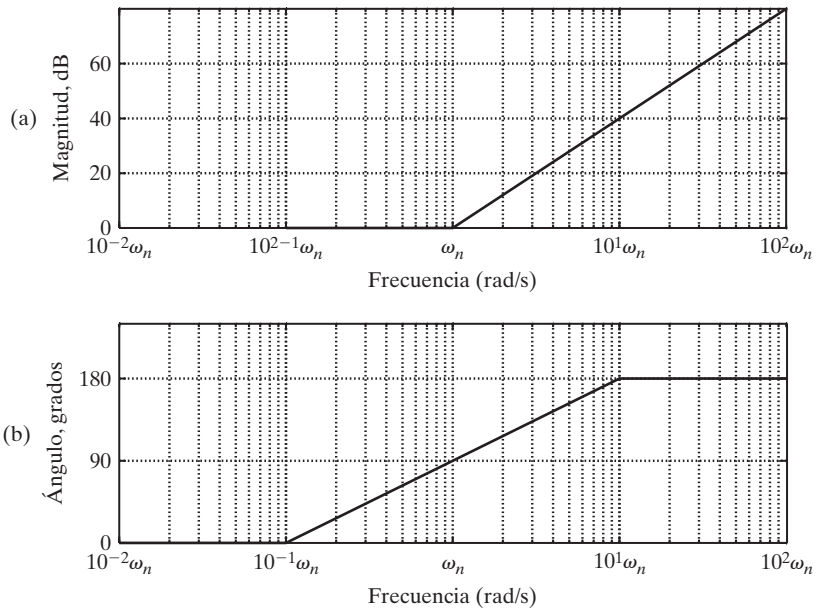



**FIGURA 8.29**
Aproximaciones asíntotas de (a) magnitud y (b) fase para el término cuadrático.

Para altas frecuencias $\omega > \omega_n$, el ángulo es aproximado mediante

$$\angle[(j\omega/\omega_n)^2 + (2\zeta/\omega_n)j\omega + 1] = \tan^{-1}\frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \approx \tan^{-1}\frac{2\zeta\omega_n}{-\omega} \approx 180^\circ$$

La transición entre las asíntotas de alta y baja frecuencia es una línea que se expande a lo largo de dos décadas desde $(0.1)\omega_n$ a $10\omega_n$, con pendiente de 90°/década, como podemos ver en la figura 8.29b.

Cuando el término cuadrático se encuentra en el numerador de $H(\omega)$, corresponde a un par de ceros complejos en $H(s)$. Por lo tanto, mediante el análisis anterior, vemos que un par de ceros complejos contribuyen con un ángulo de fase de aproximadamente 180° y una pendiente de +40 dB/década para altas frecuencias. Esto corresponde con el comentario previo respecto a que cada cero real de una función de transferencia contribuye a un ángulo de fase de +90° y una pendiente de +20 dB/década en los diagramas de Bode para frecuencias altas.

Cuando el término cuadrático está en el denominador, corresponde a un par de polos complejos de $H(s)$. En este caso las aproximaciones asíntotas que podemos ver en la figura 8.29 son negadas para poder desplegar los diagramas de Bode para $[(j\omega/\omega_n)^2 + (2\zeta/\omega_n)j\omega + 1]^{-1}$. De esta manera, un par de polos complejos contribuyen para el diagrama de Bode con un ángulo de fase de −180° y una pendiente en la gráfica de magnitud de −40 dB/década para altas frecuencias. Como explicamos previamente, cada polo real contribuye con −90° y −20 dB/década para altas frecuencias.

Como ya explicamos, la gráfica exacta de Bode para el caso cuadrático depende del valor de $\zeta$. En la figura 8.30 aparecen los diagramas de Bode exactos para distintos valores de $\zeta$. Observe en la figura que mientras $\zeta$ se aproxima a 0, la curva de magnitud exacta tiene

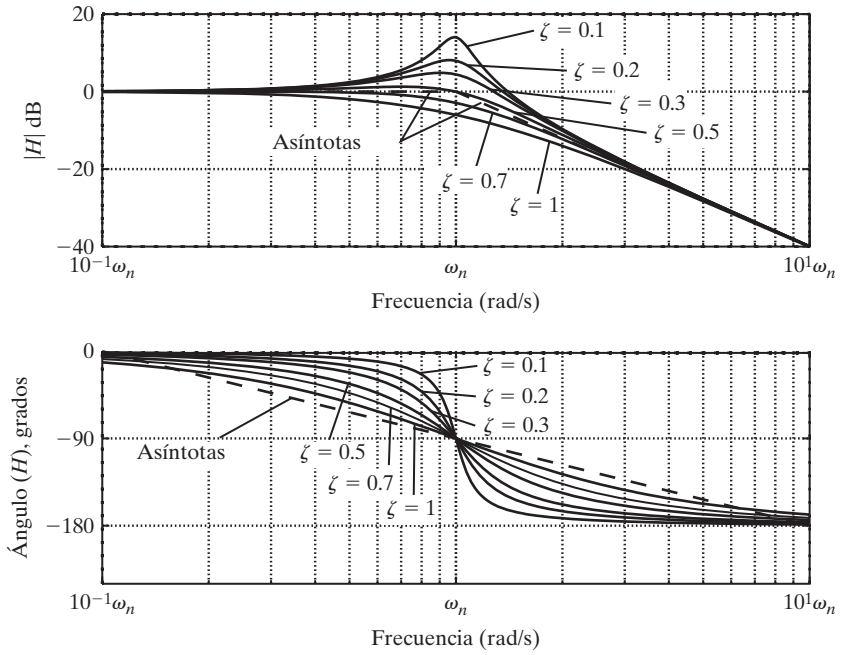



**FIGURA 8.30**
Diagramas de Bode exactos para un término cuadrático.

un pico en $\omega_n$ que crece en magnitud mientras la transición del ángulo en la curva de fase se hace más fina. Por lo tanto, la aproximación asintótica no es muy precisa para valores pequeños de $\zeta$. Cuando $\zeta$ se aproxima a 1, el término cuadrático se aproxima a un término que contiene dos polos reales repetidos. La gráfica de Bode que resulta es igual a la suma de dos gráficas de un solo polo. En este caso el error en la aproximación de la magnitud es de 6 dB en las esquinas (3 dB en cada frecuencia de esquina correspondiente a polos reales).

---

### Ejemplo 8.22 Término cuadrático en el denominador

Considere el sistema con la función de transferencia

$$H(s) = \frac{63(s + 1)}{s(s^2 + 6s + 100)}$$

Primero, rescriba $H(\omega)$ en la forma estándar

$$H(\omega) = \frac{0.63(j\omega + 1)}{j\omega[(j\omega/10)^2 + 0.06j\omega + 1]}$$

Los factores de $H(\omega)$ son $0.63$, $j\omega + 1$, $(j\omega)^{-1}$, y $[(j\omega/10)^2 + 0.06j\omega + 1]^{-1}$. La frecuencia de esquina es $\omega_{cf} = 1$ rad/s para el cero y $\omega_n = 10$ rad/s para el término cuadrático del denominador. Para obtener la gráfica de la magnitud, observe que para $\omega < 1$ rad/s, los únicos factores diferentes de cero son la constante con magnitud $20 \log(0.63) = -4$ dB y $(j\omega)^{-1}$, el cual es una línea con pendiente de $-20$ dB/década que intercepta a 0 dB en 1 rad/s. Al combinar estos factores para $\omega < 1$ simplemente desvía la línea de $-20$ dB/década por $-4$ dB.

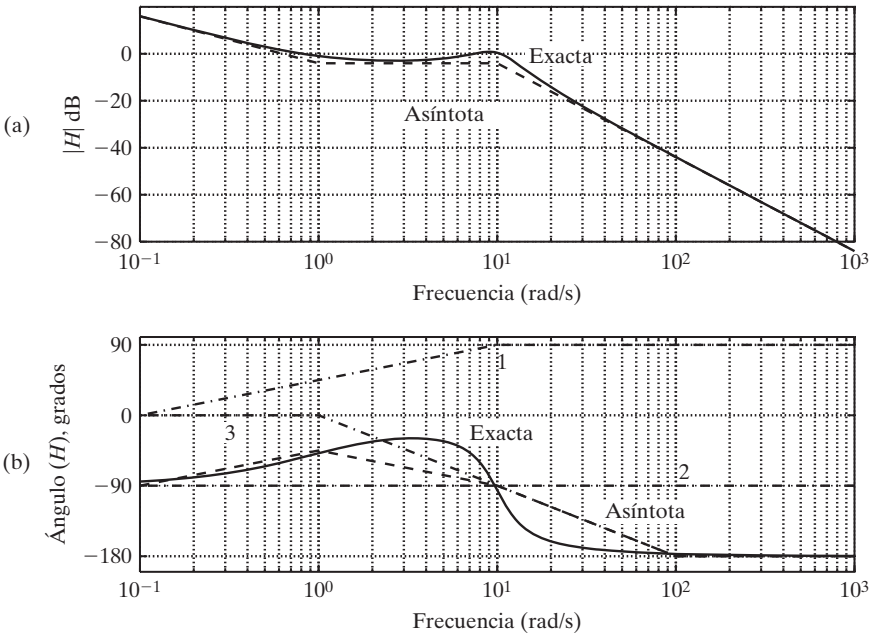



**FIGURA 8.31**
Gráficas exactas de las asíntotas y de Bode para el ejemplo 8.22: (a) magnitud; (b) fase.

Podemos ver esta asíntota de baja frecuencia en la figura 8.31a. La frecuencia de esquina en $\omega_{cf} = 1$ corresponde a un cero, lo cual significa que existe un cambio en la pendiente de +20 dB/década. Por lo tanto, la pendiente para $1 < \omega < 10$ es 0 dB/década. La frecuencia de esquina en $\omega = 10$ corresponde a un término cuadrático en el denominador, lo cual significa que la pendiente cambia a −40 dB/década para $\omega > 10$. En la figura 8.31a podemos ver la gráfica final de magnitud, junto con la gráfica de Bode exacta obtenida mediante MATLAB. En la figura 8.31b aparece la fase junto con la gráfica asintótica final y la gráfica exacta. Los comandos que empleamos en MATLAB para generar la fase y la magnitud exactas son

```
w = logspace(-1,3,300); s = w*j;
H = 63*(s+1)./(s.^2+6*s+100)./s;
magdb = 20*log10(abs(H));
phase = angle(H)*180/pi;
```

## 8.6 FILTROS CAUSALES

En las aplicaciones reales de filtrado, no es posible utilizar filtros ideales, dado que son no causales (vea la sección 5.3). En dichas aplicaciones, es necesario utilizar filtros causales, los cuales son no ideales; esto es, la transición desde la banda de paso hasta la banda de rechazo (y viceversa) es gradual. En particular, las funciones de magnitud de versiones causales de pasa bajas, pasa altas, pasa banda, y rechaza banda, tienen transiciones graduales desde

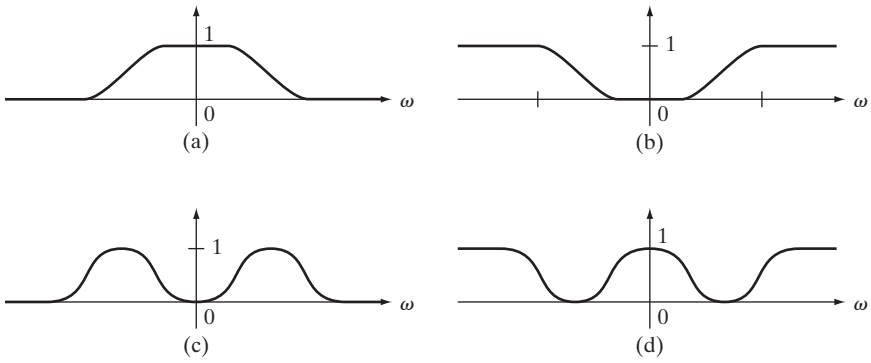



**FIGURA 8.32**
Funciones de magnitud para filtros causales (a) pasa bajas, (b) pasa altas, (c) pasa banda, (d) rechaza banda.

la banda de paso hasta la banda de rechazo. En la figura 8.32 mostramos funciones de magnitud para estos tipos básicos de filtros.

Considere un filtro causal con la función de frecuencia $H(\omega)$ y con un valor pico de $|H(\omega)|$ igual a 1. Entonces, definimos la banda de paso como el conjunto de todas las frecuencias $\omega$ para las cuales

$$|H(\omega)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707 \tag{8.54}$$

Observe que (8.54) es equivalente a la condición de que sea $|H(\omega)|_{\text{dB}}$ menor a 3 dB por debajo del valor pico de 0 dB. Para filtros pasa bajas o filtros pasa banda, a la longitud de la banda de paso se le conoce como ancho de banda de 3 dB.

La banda de rechazo en un filtro causal es un conjunto de frecuencias $\omega$ para el cual $|H(\omega)|_{\text{dB}}$ está por debajo del monto deseado (por ejemplo, 40 o 50 dB) del valor pico de 0 dB. Al intervalo de frecuencias entre la banda de paso y la banda de rechazo se le llama *región de transición*. En el diseño de filtros causales, un objetivo clave es que las regiones de transición sean pequeñas. Más adelante en esta misma sección, veremos que podemos lograr las transiciones más suaves al permitir la existencia de rizos en la banda de paso y en la de rechazo (al contrario de las características monótonas que aparecen en la figura 8.32).

Para poder construir un filtro causal a partir de las componentes del circuito, es necesario que la función de transferencia del filtro $H(s)$ sea racional en $s$. Para facilitar la implementación, el orden de $H(s)$ (es decir, el grado del denominador) debe ser lo más pequeño posible. Sin embargo, siempre existe una pérdida entre la magnitud del orden y las características deseadas del filtro tales como el monto de atenuación en las bandas de rechazo y el ancho de las regiones de transición.

Como en el caso de los filtros ideales, para evitar la distorsión de fase en la salida de un filtro causal, la función de fase debe ser lineal sobre la banda de paso del filtro. Sin embargo, la función de fase de un filtro causal con una función de transferencia racional no puede ser exactamente lineal sobre la banda de paso, y de esta manera siempre habrá alguna distorsión de fase. Con frecuencia, la cantidad de distorsión de fase que se puede tolerar está incluida en la lista de especificaciones del filtro durante el proceso de diseño.

### 8.6.1 Filtros Butterworth

Para los sistemas de dos polos con la función de transferencia

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

de los resultados de la sección 8.5 se desprende que el sistema es un filtro pasa bajas cuando $\zeta \geq 1/\sqrt{2}$. Si $\zeta = 1/\sqrt{2}$, se dice que el filtro pasa bajas resultante es *máximamente plano*, ya que la variación en $|H(\omega)|$ es muy pequeña a lo largo de la banda de paso del filtro. A este filtro se le conoce como *filtro Butterworth* de dos polos.

La función de transferencia del filtro Butterworth de dos polos es

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_n s + \omega_n^2}$$

Al factorizar el denominador de $H(s)$ se revela que los polos se ubican en

$$s = -\frac{\omega_n}{\sqrt{2}} \pm j\frac{\omega_n}{\sqrt{2}}$$

Observe que la magnitud de cada uno de los polos es igual a $\omega_n$.

Si establecemos $s = j\omega$ en $H(s)$ obtenemos la función de magnitud del filtro Butterworth de dos polos:

$$\begin{aligned} |H(\omega)| &= \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 2\omega_n^2\omega^2}} \\ &= \frac{\omega_n^2}{\sqrt{\omega_n^4 - 2\omega_n^2\omega^2 + \omega^4 + 2\omega_n^2\omega^2}} \\ &= \frac{\omega_n^2}{\sqrt{\omega_n^4 + \omega^4}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_n)^4}} \end{aligned} \tag{8.55}$$

De (8.55) podemos ver que el ancho de banda del filtro Butterworth es igual a $\omega_n$; es decir, $|H(\omega_n)|_{\text{dB}} = -3$ dB. Para un filtro pasa bajas, al punto donde $|H(\omega)|_{\text{dB}}$ está abajo por 3 dB en general se le conoce como *frecuencia de corte*. De ahí que, $\omega_n$ es la frecuencia de corte del filtro pasa bajas con una función de magnitud dada por (8.55).

Para el caso en que $\omega_n = 2$ rad/s, en la figura 8.33 podemos ver las curvas de respuesta en frecuencia del filtro Butterworth. También aparecen las curvas de respuesta en frecuencia para el filtro pasa bajas de un solo polo con función de transferencia $H(s) = 2/(s + 2)$, y

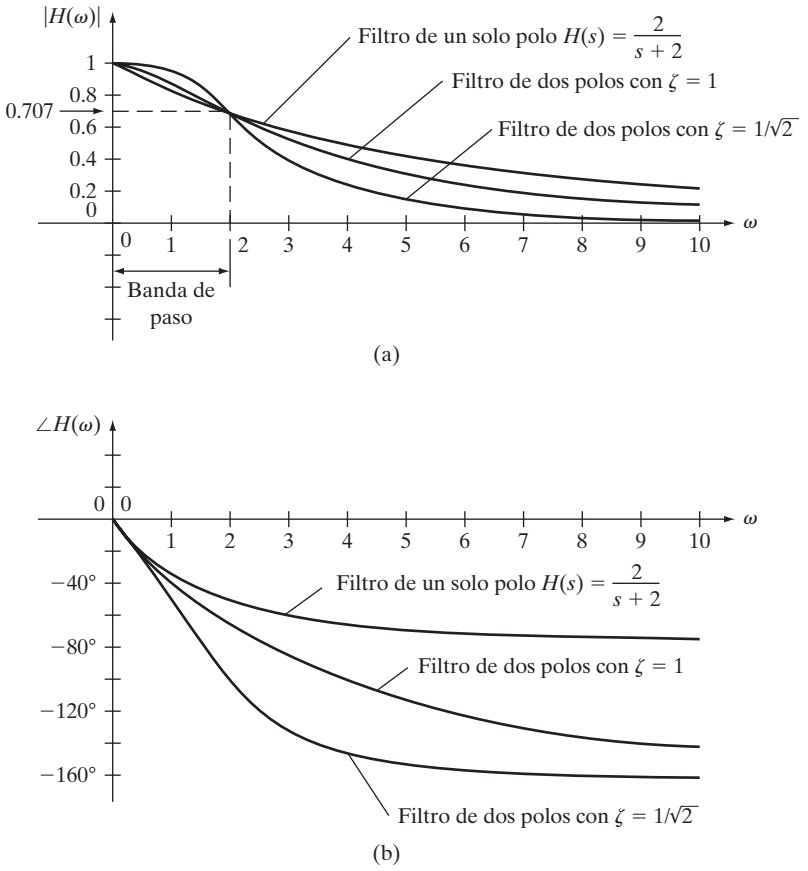



**FIGURA 8.33**
Curvas de frecuencia para los filtros de uno y dos polos: (a) curvas de magnitud; (b) curvas de fase.

el filtro pasa bajas de dos polos con $\zeta = 1$ y con una frecuencia de corte de 2 rad/s. Observe que el filtro Butterworth tiene la transición mas pronunciada de los tres filtros.

**Filtro Butterworth de *N*-polos.** Para cualquier entero positivo $N$, el *filtro Butterworth de N-polos* es el filtro pasa bajas de orden $N$ con una respuesta en frecuencia máximamente plana a lo largo de la banda de paso. La característica distintiva del filtro Butterworth es que los polos se encuentran en un semicírculo del semiplano izquierdo abierto. El radio del semicírculo es igual a $\omega_c$, donde $\omega_c$ es la frecuencia de corte del filtro. En el caso de tercer orden, los polos son como muestra la figura 8.34.

La función de transferencia del filtro Butterworth de tres polos es

$$H(s) = \frac{\omega_c^3}{(s + \omega_c)(s^2 + \omega_c s + \omega_c^2)} = \frac{\omega_c^3}{s^3 + 2\omega_c s^2 + 2\omega_c^2 s + \omega_c^3}$$

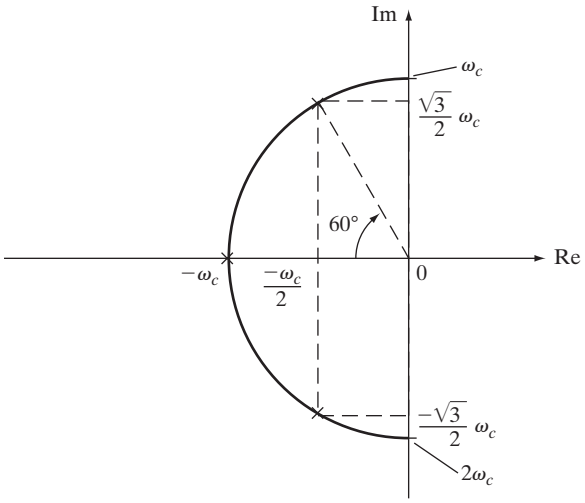



**FIGURA 8.34**
Ubicación de los polos del filtro Butterworth de tres polos.

Al establecer $s = j\omega$ en $H(s)$ y tomar el resultado de la función de magnitud del filtro de tres polos:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^6}}$$

La figura 8.35 muestra la gráfica de la magnitud de la función de este filtro Butterworth con $\omega_c$=2. También se ha graficado la magnitud de la función de un filtro Butterworth de dos polos con frecuencia de corte igual a 2. Es evidente que el filtro de tres polos tiene una transición más pronunciada que el filtro de dos polos.

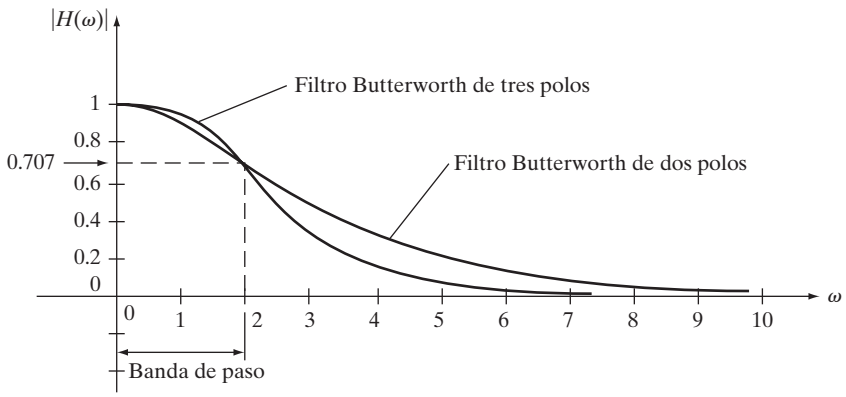



**FIGURA 8.35**
Curvas de magnitud para filtros Butterworth de dos y tres polos.

En el caso general, la función de magnitud del filtro Butterworth de $N$-polos es

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^{2N}}}$$

Podemos determinar la función de transferencia a partir de una tabla para los polinomios de Butterworth. Por ejemplo, cuando $N = 4$, la función de transferencia es

$$H(s) = \frac{\omega_c^4}{(s^2 + 0.765\omega_c s + \omega_c^2)(s^2 + 1.85\omega_c s + \omega_c^2)}$$

Cuando $N = 5$, la función de transferencia es

$$H(s) = \frac{\omega_c^5}{(s + \omega_c)(s^2 + 0.618\omega_c s + \omega_c^2)(s^2 + 1.62\omega_c s + \omega_c^2)}$$

El Signal Proccesing Toolbox de MATLAB contiene un comando para diseñar filtros Butterworth con frecuencia de corte normalizada a 1 rad/s. Por ejemplo, podemos utilizar los siguientes comandos para crear el filtro Butterworth de dos polos, y obtener las funciones de magnitud y fase del filtro:

```
[z,p,k] = buttap(2);    % filtro de dos polos
[b,a] = zp2tf(z,p,k);
w = 0:.01:4;
H = tf(b,a);     % convierte a un objeto de función de transferencia
bode(H,w);
```

Al ejecutar los comandos obtenemos

```
b = 1
a = [1 1.414 1]
```

los cuales son los coeficientes de los polinomios del numerador y del denominador de la función de transferencia del filtro. Al ejecutar el software MATLAB para filtros Butterworth de dos, cinco, y 10 polos obtenemos las curvas de respuesta en frecuencia de la figura 8.36. Observe que mientras más grande es el orden de los filtros, más marcada es la transición de la banda de paso a la banda de rechazo.

### 8.6.2 Filtros Chebyshev

La función de magnitud del filtro Butterworth de $N$-polos tiene la característica de ser monótona tanto en la banda de paso como en la de rechazo del filtro. Aquí, *monótono* significa que la curva de magnitud decrece de manera gradual a lo largo de la banda de paso y la de rechazo. Al contrario del filtro Butterworth, la función de magnitud de un filtro Chebyshev tipo 1 tiene un rizado en la banda de paso y decrece monótonamente en la banda de rechazo (el filtro Chebyshev tipo 2 tiene la característica opuesta). Al permitir un rizado en la

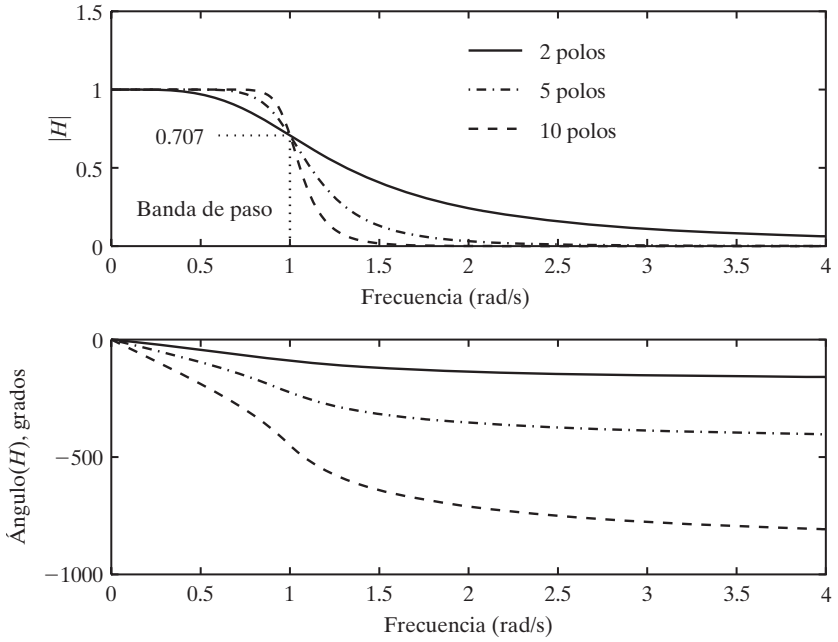



**FIGURA 8.36**
Curvas de respuesta en frecuencia para los filtros Butterworth de 2, 5 y 10 polos.

banda de paso o en la de rechazo, es posible lograr una transición más pronunciada entre una y otra, en comparación con el filtro Butterworth.

La función de frecuencia del filtro Chebyshev tipo 1 de $N$-polos está dada por

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\omega/\omega_1)}} \tag{8.56}$$

donde $T_N(\omega/\omega_1)$ es el polinomio de orden $N$ y $\varepsilon$ es un número positivo. Los polinomios de Chebyshev pueden generarse a través de la recursividad

$$T_N(x) = 2xT_{N-1}(x) - T_{N-2}(x)$$

donde $T_0(x) = 1$ y $T_1(x) = x$. Los polinomios para $N = 2, 3, 4, 5$ son

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 2x(x) - 1 = 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ T_5(x) &= 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - (4x^3 - 3x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x \end{aligned} \tag{8.57}$$

Si utilizamos (8.57) obtenemos el filtro Chebyshev tipo 1 de dos polos, con función de frecuencia

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2[2(\omega/\omega_1)^2 - 1]^2}}$$

Para el filtro de $N$-polos que definimos en (8.56), podemos mostrar que la función $|H(\omega)|$ del filtro oscila entre un valor de 1 y el valor $1/\sqrt{1 + \varepsilon^2}$ mientras $\omega$ varía de 0 a $\omega_1$, con

$$H(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } N \text{ es par} \\ \dfrac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} & \text{si } N \text{ es impar} \end{cases}$$

y

$$|H(\omega_1)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$$

La función $|H(\omega)|$ es monótona y decreciente para $\omega > \omega_1$, y por lo tanto el filtro es pasa bajas con un rizado sobre la banda de paso. Por lo general $\omega_1$ no es igual a la frecuencia de corte (el punto de 3 dB) del filtro; sin embargo, si

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

de modo que $\varepsilon = 1$, entonces $|H(\omega_1)| = 1/\sqrt{2}$, y en este caso $\omega_1$ es la frecuencia de corte. Cuando $\varepsilon = 1$, el rizado varía 3 dB a lo largo de la banda de paso del filtro.

Para el caso de un rizado de 3 dB ($\varepsilon = 1$), las funciones de transferencia de los filtros Chebyshev tipo 1, de dos y tres polos son

$$H(s) = \frac{0.50\omega_c^2}{s^2 + 0.645\omega_c s + 0.708\omega_c^2}$$

$$H(s) = \frac{0.251\omega_c^3}{s^3 + 0.597\omega_c s^2 + 0.928\omega_c^2 s + 0.251\omega_c^3}$$

donde $\omega_c$ es la frecuencia de corte. En la figura 8.37 aparecen las curvas de la respuesta en frecuencia de estos dos filtros para el caso $\omega_c = 2$ radianes.

En la figura 8.38 podemos comparar las funciones de la magnitud de la respuesta del filtro Butterworth de tres polos con el filtro Chebyshev tipo 1 de tres polos, con una frecuencia de corte para ambos igual a 2 rad/s. Observe que la transición de la banda de paso a la de rechazo es más pronunciada en el filtro Chebyshev; sin embargo, el filtro Chebyshev tiene un rizado de 3 dB sobre la banda de paso.

La transición desde la banda de paso a la de rechazo puede ser más pronunciada (en comparación con el filtro Chebyshev) si permitimos un rizado tanto en la banda de paso como en la de rechazo. Los *filtros elípticos* son ejemplos de un tipo de filtro que obtiene una

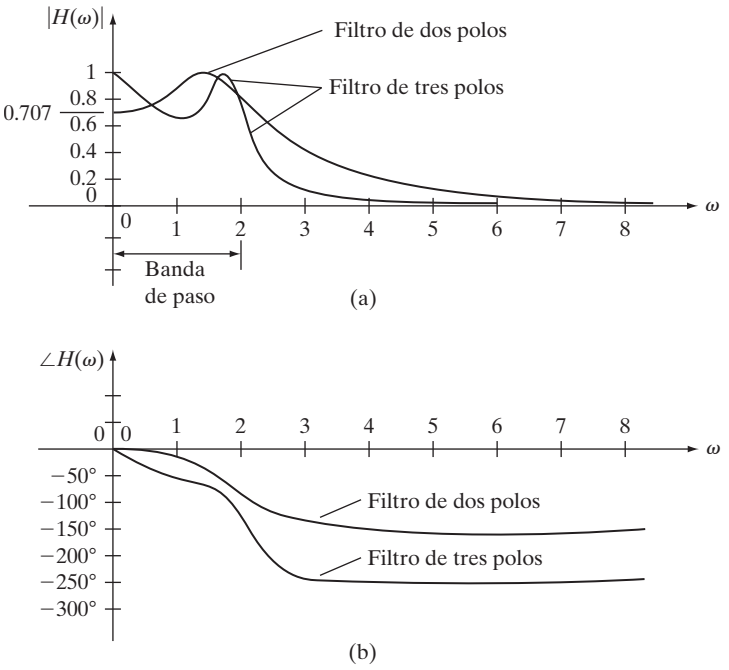



**FIGURA 8.37**
Curvas de frecuencia para filtros Chebyshev de dos y tres polos con $\omega_c = 2$ radianes: (a) curvas de magnitud; (b) curvas de fase.

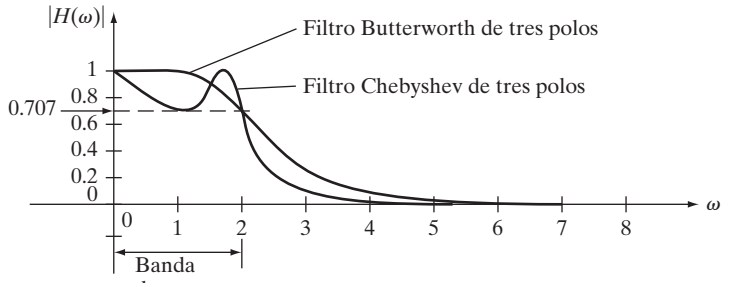



**FIGURA 8.38**
Curvas de magnitud del filtro Butterworth de tres polos y del filtro Chebyshev de tres polos con frecuencia de corte igual a 2 radianes.

transición más pronunciada mediante la admisión de un rizado, tanto en la banda de paso como en la de rechazo. Aquí no explicaremos este tipo de filtros (vea Ludeman [1986]).

Podemos utilizar el comando `cheblap` del Signal Proccesing Toolbox de MATLAB para diseñar filtros Chebyshev tipo 1. Para ejecutar este comando, debemos introducir el orden del filtro y el valor permitido de rizado en dB en la banda de paso. El filtro que resul-

ta tendrá una frecuencia de corte normalizada a 1 rad/s. Por ejemplo, para diseñar un filtro Chebyshev de dos polos que permita un rizado de 3 dB en la banda de paso, podríamos utilizar los siguientes comandos:

```
[z,p,k] = cheblap(2,3);
[b,a] = zp2tf(z,p,k);       % convierte a polinomios
w = 0:0.01:4;
```

En la figura 8.39 aparecen las curvas de respuesta en frecuencia del filtro resultante. Además, en la figura 8.39 aparecen las curvas de los filtros Chebyshev de tres y cinco polos, con un rizado máximo de 3 dB en la banda de paso. Observe que al aumentar el número de polos, la transición es más pronunciada y el rizado es más pronunciado. Observe también que en los tres casos, el rizado se mantiene en el límite de los 3 dB (0.707).

### 8.6.3 Transformaciones de frecuencia

Los filtros Butterworth y Chebyshev que explicamos antes son ejemplos de filtros pasa bajas. Si tomamos cualquier filtro pasa bajas con una función de transferencia $H(s)$, podemos modificar la frecuencia de corte o construir filtros pasa altas, pasa banda y rechaza banda mediante la transformación de la variable de frecuencia $s$. Por ejemplo, si la frecuencia de corte de un filtro pasa bajas es $\omega_c = \omega_1$, y deseamos cambiar la frecuencia de corte a $\omega_2$, reemplazamos $s$ por $s\omega_1/\omega_2$ en $H(s)$. Para convertir un filtro pasa bajas con frecuencia de corte $\omega_1$, en

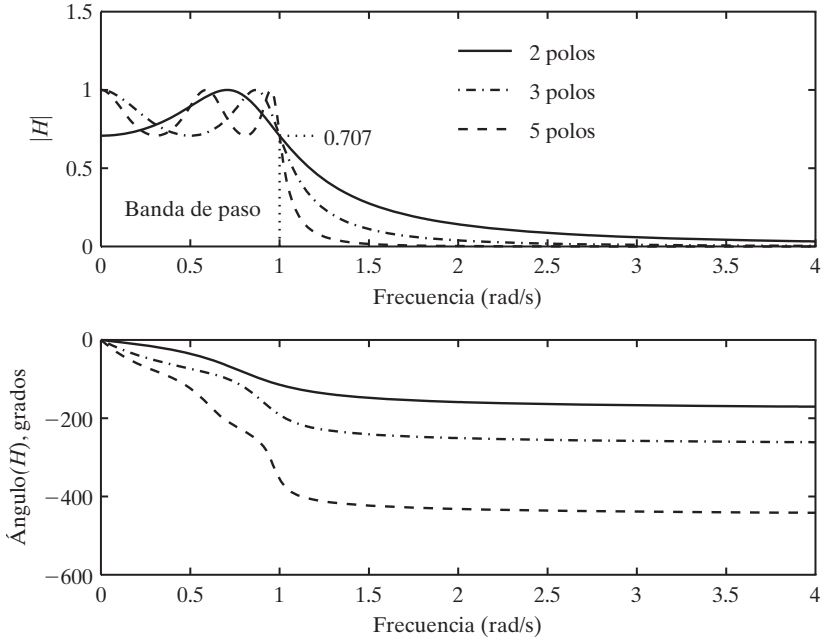



**FIGURA 8.39**
Curvas de respuesta en frecuencia para filtros Chebyshev de dos, tres y cinco polos.

un filtro pasa altas con una banda de paso de 3 dB que va de $\omega = \omega_2$ a $\omega = \infty$, reemplazamos $s$ por $\omega_1\omega_2/s$ en $H(s)$. Para obtener un filtro pasa banda con una banda de paso de 3 dB que va de $\omega = \omega_1$ a $\omega = \omega_2$, reemplazamos $s$ en $H(s)$ por

$$\omega_c \frac{s^2 + \omega_1\omega_2}{s(\omega_2 - \omega_1)}$$

Por último, para obtener un filtro rechaza banda con una banda de paso de 3 dB que va de $\omega = 0$ a $\omega = \omega_1$, y de $\omega = \omega_2$ a $\omega = \infty$, reemplazamos $s$ en $H(s)$ por

$$\omega_c \frac{s(\omega_2 - \omega_1)}{s^2 + \omega_1\omega_2}$$

### Ejemplo 8.23 Filtro Butterworth de tres polos

Considere el filtro Butterworth de tres polos con la función de transferencia

$$H(s) = \frac{\omega_c^3}{s^3 + 2\omega_c s^2 + 2\omega_c^2 s + \omega_c^3}$$

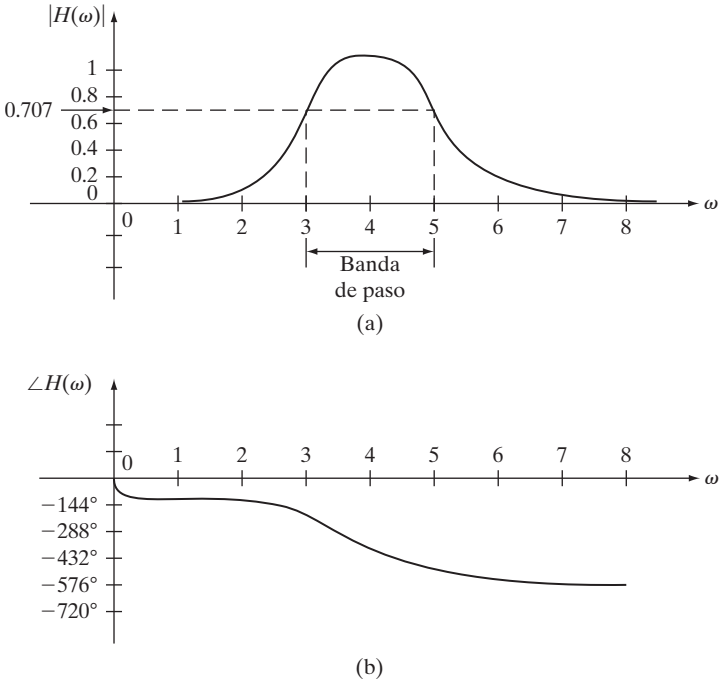



**FIGURA 8.40**
Curvas de respuesta en frecuencia para un filtro pasa banda de seis polos: (a) magnitud (b) fase.

donde $\omega_c$ es la frecuencia de corte. Suponga que el objetivo es diseñar un filtro pasa banda con una banda de paso que va de $\omega_1 = 3$ a $\omega_2 = 5$. Al reemplazar $s$ con

$$\omega_c \frac{s^2 + 15}{2s}$$

la función de transferencia que resulta es

$$H(s) = \frac{\omega_c^3}{\omega_c^3\left(\frac{s^2 + 15}{2s}\right)^3 + 2\omega_c^3\left(\frac{s^2 + 15}{2s}\right)^2 + 2\omega_c^3\left(\frac{s^2 + 15}{2s}\right) + \omega_c^3}$$

$$H(s) = \frac{8s^3}{(s^2 + 15)^3 + 4s(s^2 + 15)^2 + 8s^2(s^2 + 15) + 8s^3}$$

$$= \frac{8s^3}{s^6 + 4s^5 + 53s^4 + 128s^3 + 795s^2 + 900s + 3375}$$

La figura 8.40 muestra las curvas de frecuencia para este filtro.

Con MATLAB, las transformaciones de frecuencia son muy útiles dado que los programas estándares de diseño de filtros producen un filtro pasa bajas con una frecuencia de corte normalizada a 1 rad/s. Podemos comenzar el proceso de diseño si primero generamos un filtro Butterworth o Chebyshev pasa bajas, con frecuencia de corte normalizada. Luego, este filtro resultante puede volverse pasa altas, pasa banda o rechaza banda mediante los comandos `lp2lp`, `lp2hp`, `lp2bp`, y `lp2bs`. Los siguientes ejemplos muestran cómo utilizar MATLAB para diseñar distintos tipos de filtros.

### Ejemplo 8.24 Diseño de filtros pasa bajas

Para diseñar un filtro Butterworth pasa bajas de tres polos, con un ancho de banda de 5 Hz, primero diseñe un filtro de tres polos con una frecuencia de corte de 1 rad/s mediante el comando `buttap`. A continuación, transforme la frecuencia mediante el comando `lp2lp`. Los comandos de MATLAB son los siguientes:

```
[z,p,k] = buttap(3);  % filtro de tres polos
[b,a] = zp2tf(z,p,k);  % convierte a polinomios
wb = 5*2*pi;  % nuevo ancho de banda en rad/s
[b,a] = lp2lp(b,a,wb);    % transforma al nuevo ancho de banda
f = 0:15/200:15;    % defina la frecuencia en Hz para graficar
w = 2*pi*f;
H = tf(b,a);
bode(H,w);
```

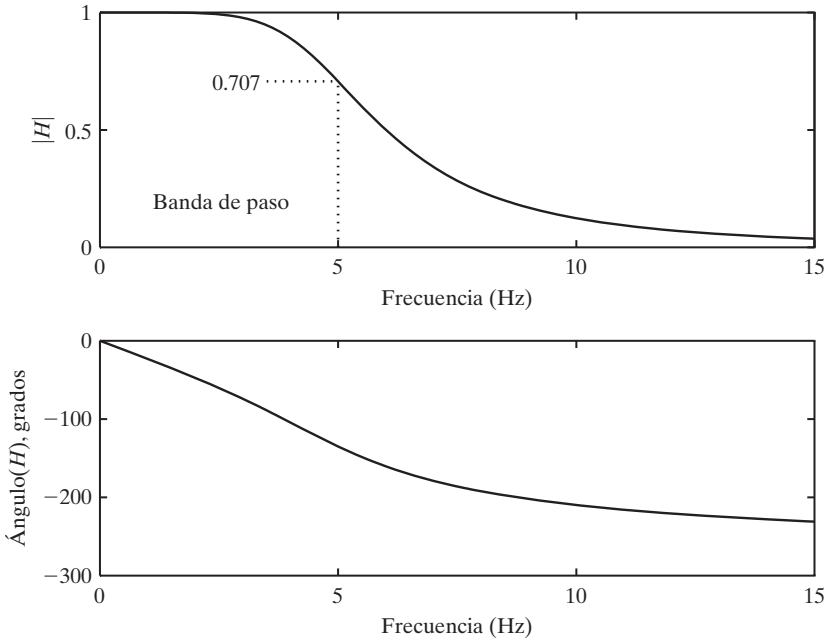



**FIGURA 8.41**
Curvas de respuesta en frecuencia para el filtro pasa bajas del ejemplo 8.24.

Los coeficientes del numerador y el denominador están dados por `b = [0 0 0 31006]` y `a = [1 63 1974 31006]`, respectivamente. Entonces, el filtro con ancho de banda de 5 Hz está dado por

$$H(s) = \frac{31{,}006}{s^3 + 63s^2 + 1974s + 31{,}006}$$

La respuesta en frecuencia resultante aparece en la figura 8.41.

### Ejemplo 8.25 Diseño de filtros pasa altas

Para diseñar un filtro pasa altas de tres polos con frecuencia de corte $\omega = 4$ rad/s, diseñe primero un filtro Chebyshev o Butterworth de tres polos, con frecuencia de corte $\omega_c = 1$ rad/s. Luego transfórmelo en un filtro pasa altas. Los comandos son

```
w0 = 4;    % frecuencia de corte
% crea un filtro Chebyshev tipo I de tres polos con una banda de
paso de 3 dB
[z,p,k] = cheblap(3,3);
[b,a] = zp2tf(z,p,t); % convierte a polinomios
[b,a] = lp2hp(b,a,w0);   % la frecuencia de corte es w0
```

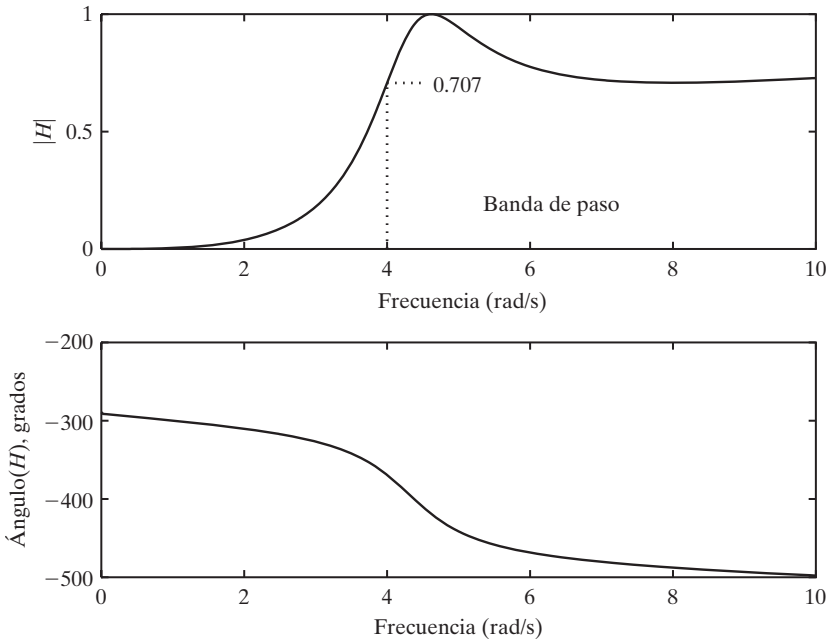



**FIGURA 8.42**
Respuesta en frecuencia del filtro en el ejemplo 8.25.

Los coeficientes del numerador y del denominador localizados en los vectores `b` y `a`, respectivamente, resultan ser `b = [1 0 0 0]` y `a = [1 14.8 39.1 255.4]`. Por lo tanto, el filtro pasa altas está dado por

$$H(s) = \frac{s^3}{s^3 + 14.8s^2 + 38.1s + 255.4}$$

La figura 8.42 muestra la gráfica de la respuesta en frecuencia.

### Ejemplo 8.26 Diseño con MATLAB

En el ejemplo 8.23, transformamos un filtro Butterworth pasa bajas de tres polos en un filtro pasa banda con la banda de paso centrada en $\omega = 4$ rad/s, y con un ancho de banda igual a 2 rad/s. Para realizar esta conversión con MATLAB, utilice los siguientes comandos:

```
w0 = 4;                    % centro de la banda
wb = 2;                    % ancho de banda
[z,p,k] = buttap(3);       % filtro Butterworth de tres polos
[b,a] = zp2tf(z,p,k);      % convierte a polinomios
[b,a] = lp2bp(b,a,w0,wb); % banda de paso centrada en w0, ancho de
                             banda = wb
```

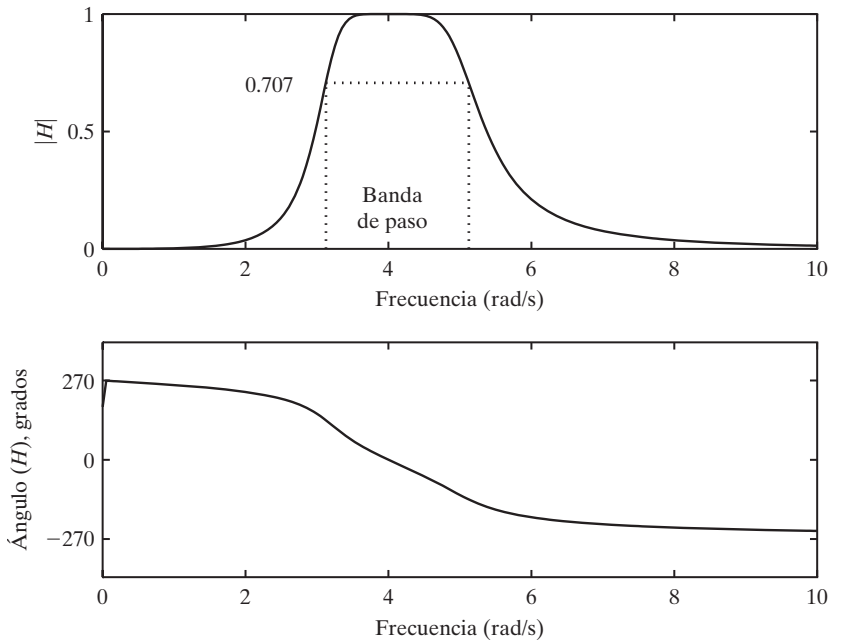



**FIGURA 8.43**
Curvas de respuesta para el filtro del ejemplo 8.26.

Los coeficientes del numerador almacenados en el vector `b` coinciden con aquéllos obtenidos de manera analítica en el ejemplo 8.23. Sin embargo, los coeficientes del denominador, calculados como `a = [1 4 56 136 896 1024 4096]` son diferentes a los que determinamos en forma analítica. Aunque los coeficientes tienen grandes diferencias, los polos correspondientes están muy cerca, lo que da como resultado un error muy pequeño en la gráfica de frecuencia de la figura 8.43. La diferencia se debe a errores de redondeo al momento del cálculo.

### Ejemplo 8.27 Filtro rechaza banda

Para convertir un filtro Chebyshev pasa bajas de tres polos en un filtro rechaza banda, con una banda de rechazo de $\omega = 4$ a $\omega = 6$, utilice los siguientes comandos de MATLAB:

```
w0 = 5;    % centro de la banda de rechazo
wb = 2;    % ancho de la banda de rechazo
[z,p,k] = cheblap(3,3);    % filtro de 3 polos con rizo de 3 dB
[b,a] = zp2tf(z,p,k);      % convierte a polinomios
[b,a] = lp2bs(b,a,w0,wb);   % convierte en un filtro rechaza banda
```

Los coeficientes son calculados y son `b = [1 0 75 0 1875 0 15625]` y `a = [1 7 85 402 2113 4631 15625]`. Por lo tanto, el filtro rechaza banda está dado por

$$H(s) = \frac{s^6 + 75s^4 + 1875s^2 + 15{,}625}{s^6 + 7s^5 + 85s^4 + 402s^3 + 2113s^2 + 4631s + 15{,}625}$$

La figura 8.44 muestra la respuesta en frecuencia resultante.

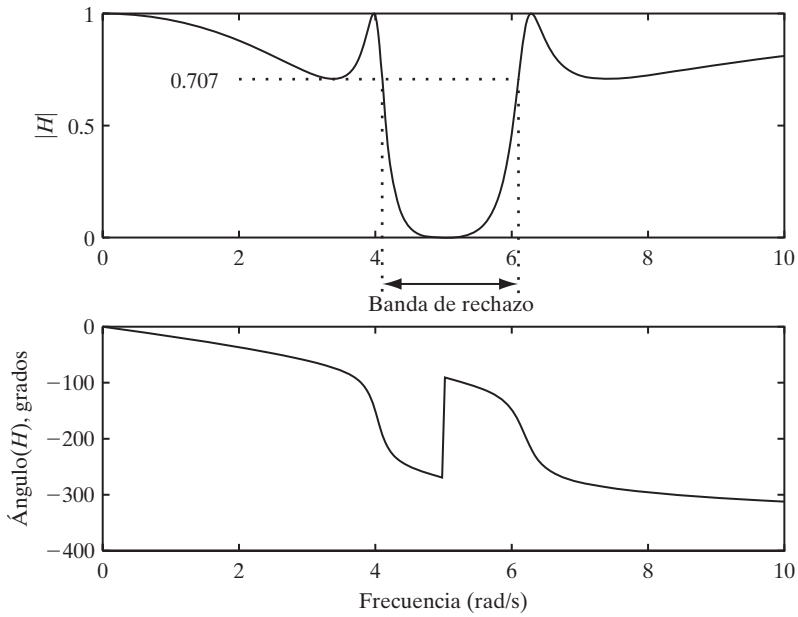



**FIGURA 8.44**
Curvas de respuesta en frecuencia para el filtro del ejemplo 8.27.

## 8.7 RESUMEN DEL CAPÍTULO

En el capítulo 6 explicamos la transformada de Laplace y la representación de un sistema a través de su función de transferencia. En el capítulo 8 mostramos cómo utilizar la función de transferencia para analizar el comportamiento de los sistemas de tiempo continuo. Los conceptos que explicamos incluyen la estabilidad, la respuesta al escalón, la respuesta a sinusoides, la respuesta en frecuencia y las gráficas de Bode, y el filtrado. Un sistema es estable si su respuesta al impulso decae a cero, lo cual es el caso cuando todos los polos de la función de transferencia están en el semiplano izquierdo abierto. El sistema es inestable si su respuesta al impulso aumenta sin límite, lo cual resulta cuando existe al menos un polo en el semiplano derecho abierto, o tiene polos repetidos en el plano $j\omega$. De lo contrario, el sistema es marginalmente estable, lo cual resulta cuando el sistema no es inestable y tiene al menos un polo único sobre el eje $j\omega$. Podemos determinar la estabilidad al encontrar los polos de la función de transferencia, o utilizando la prueba de estabilidad de Routh-Hurwitz. Esta prueba es particularmente útil cuando el grado del denominador de la función de transferencia es grande, o cuando uno o más coeficientes del polinomio del denominador son desconocidos. Este último caso es común cuando estamos en el diseño de una parte del sistema y debemos determinar los intervalos de estabilidad para los coeficientes como parte del diseño.

La respuesta de un sistema estable está compuesta por una componente transitoria y una componente en estado estable. La componente en estado estable de la respuesta coincide con la forma de la señal de entrada; de modo que una entrada escalón alcanza un valor constante en estado estable, y la entrada sinusoidal arroja una respuesta sinusoidal en estado estable con la misma frecuencia de la señal de entrada. La componente transitoria se deriva de la función de transferencia, y también podemos determinar una forma general de la

respuesta transitoria de un sistema, sobre la base de los polos del sistema sin tomar en cuenta la forma de la entrada. La respuesta al escalón de un sistema es un medio bien aceptado para caracterizar el comportamiento del sistema y especificar su rendimiento. Existen tres características principales en una respuesta al escalón: la constante de tiempo, el valor en estado estable, y la posible existencia de oscilaciones o de sobretiros en la respuesta. La respuesta transitoria de un sistema con polos reales, tales como un sistema de primer orden, no oscila. Las oscilaciones son un resultado de polos complejos, donde la frecuencia de las oscilaciones es la parte imaginaria del polo y la razón de decaimiento o crecimiento está determinada por la parte real del polo. La constante de tiempo es una medida de la velocidad de respuesta, la cual indica cuánto tiempo le toma decaer a la respuesta transitoria.

## PROBLEMAS

**8.1.** Para los siguientes sistemas lineales e invariantes en el tiempo continuo, determine si el sistema es estable, marginalmente estable, o inestable:

**(a)** $H(s) = \dfrac{s - 4}{s^2 + 7s + 3}$

**(b)** $H(s) = \dfrac{s + 3}{s^2 + 3}$

**(c)** $H(s) = \dfrac{2s + 3}{s^2 + 2s - 12}$

**(d)** $H(s) = \dfrac{3s^3 - 2s + 6}{s^3 + s^2 + s + 1}$

**(e)** $H(s) = \dfrac{4s + 8}{(s^2 + 4s + 13)(s + 4)}$

**8.2.** Considere el motor cd controlado por campo, dado por la ecuación diferencial de entrada y salida

$$L_f I \frac{d^3y(t)}{dt^3} + (L_f k_d + R_f I)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + R_f k_d \frac{dy(t)}{dt} = kx(t)$$

Suponga que todos los parámetros $I$, $L_f$, $k_d$, $R_f$, y $k$ son estrictamente positivos ($> 0$). Determine si el motor es estable, marginalmente estable, o inestable.

**8.3.** Considere el modelo de ingestión y metabolismo de la droga definida en el problema 6.19. Suponga que $k_1 > 0$ y $k_2 > 0$, determine si el sistema es estable, marginalmente estable, o inestable. ¿Que relación tiene su respuesta, de acuerdo con el comportamiento del sistema? Explique.

**8.4.** Determine si el sistema masa-resorte del problema 2.23 es estable, marginalmente estable, o inestable. Suponga que $k_1$, $k_2$, y $k_3$ son estrictamente positivos ($>0$).

**8.5.** Considere el sistema de un solo ojo del problema 2.35. Suponga que $T_e > 0$; determine si el sistema tiene estabilidad BIBO.

**8.6.** Para cada uno de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo continuo, con respuestas al impulso $h(t)$ dadas en los siguientes incisos, determine si el sistema tiene estabilidad BIBO.

**(a)** $h(t) = [2t^3 - 2t^2 + 3t - 2][u(t) - u(t - 10)]$

**(b)** $h(t) = \dfrac{1}{t}$ para $t \geq 1$, $h(t) = 0$ para toda $t < 1$

**(c)** $h(t) = \text{sen } 2t$ para $t \geq 0$

**(d)** $h(t) = e^{-t} \text{ sen } 2t$ para $t \geq 0$

**(e)** $h(t) = e^{-t^2}$ para $t \geq 0$

**8.7.** Mediante la prueba de Routh-Hurwitz, determine todos los valores del parámetro $k$ para los cuales el siguiente sistema es estable:

**(a)** $H(s) = \dfrac{s^2 + 60s + 800}{s^3 + 30s^2 + (k + 200)s + 40k}$

**(b)** $H(s) = \dfrac{2s^3 - 3s + 4}{s^4 + s^3 + ks^2 + 2s + 3}$

**(c)** $H(s) = \dfrac{s^2 + 3s - 2}{s^3 + s^2 + (k + 3)s + 3k - 5}$

**(d)** $H(s) = \dfrac{s^4 - 3s^2 + 4s + 6}{s^5 + 10s^4 + (9 + k)s^3 + (90 + 2k)s^2 + 12ks + 10k}$

**8.8.** Suponga que un sistema tiene la siguiente función de transferencia:

$$H(s) = \frac{8}{s + 4}$$

**(a)** Calcule la respuesta del sistema para las entradas (i)-(iv). Identifique la solución en estado estable y la solución en estado transitorio.
- **(i)** $x(t) = u(t)$
- **(ii)** $x(t) = tu(t)$
- **(iii)** $x(t) = 2\ (\text{sen}\ 2t)\ u(t)$
- **(iv)** $x(t) = 2\ (\text{sen}\ 10t)\ u(t)$

**(b)** Utilice MATLAB para calcular la respuesta de manera numérica de $x(t)$ y $H(s)$. Grafique las respuestas y compárelas con las obtenidas de manera analítica en el inciso (a).

**8.9.** Considere tres sistemas que tienen las siguientes funciones de transferencia:

Posiciones de los polos y respuesta al escalón

**(i)** $H(s) = \dfrac{32}{s^2 + 4s + 16}$

**(ii)** $H(s) = \dfrac{32}{s^2 + 8s + 16}$

**(iii)** $H(s) = \dfrac{32}{s^2 + 10s + 16}$

Para cada sistema, haga lo siguiente:

**(a)** Determine si el sistema es críticamente amortiguado, subamortiguado, o sobreamortiguado.

**(b)** Calcule la respuesta al escalón del sistema.

**(c)** Utilice MATLAB para calcular en forma numérica la respuesta al escalón. Dibuje la respuesta, y compárela con la gráfica de la respuesta obtenida de forma numérica en el inciso (b).

**8.10.** Un sistema de primer orden tiene una respuesta al escalón como la que presentamos en la figura P8.10. Determine la función de transferencia.

**8.11.** Un sistema de segundo orden tiene una respuesta al escalón como la que presentamos en la figura P8.11. Determine la función de transferencia.

**8.12.** Considere el sistema masa-resorte-amortiguador con la siguiente ecuación diferencial de entrada y salida

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2} + D\frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = x(t)$$

donde $M$ es la masa, $D$ es la constante de amortiguamiento, $K$ es la constante de rigidez, $x(t)$ es la fuerza aplicada a la masa, y $y(t)$ es el desplazamiento relativo de la masa, respecto a la posición de equilibrio.

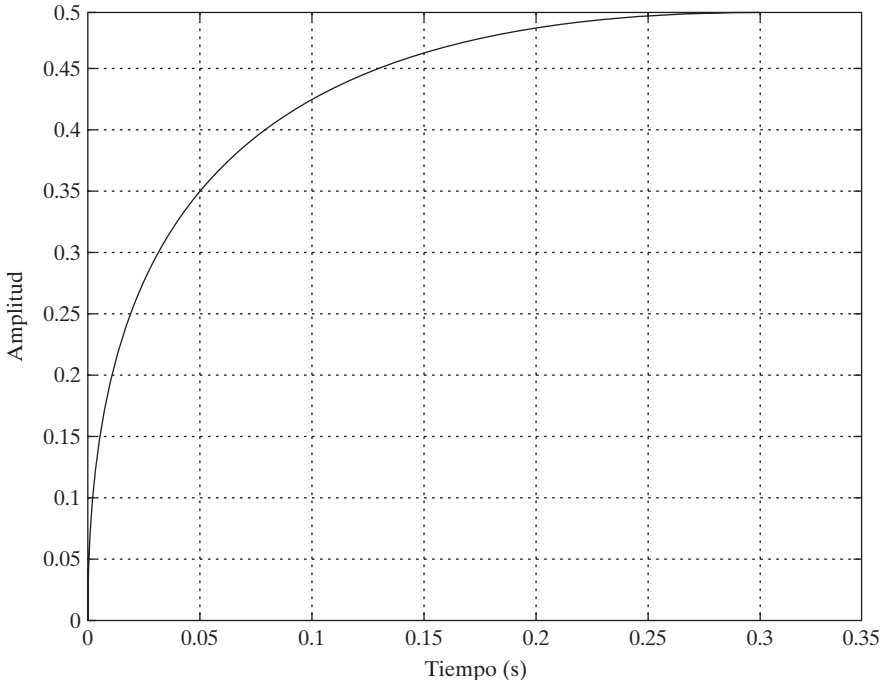



**FIGURA P8.10**

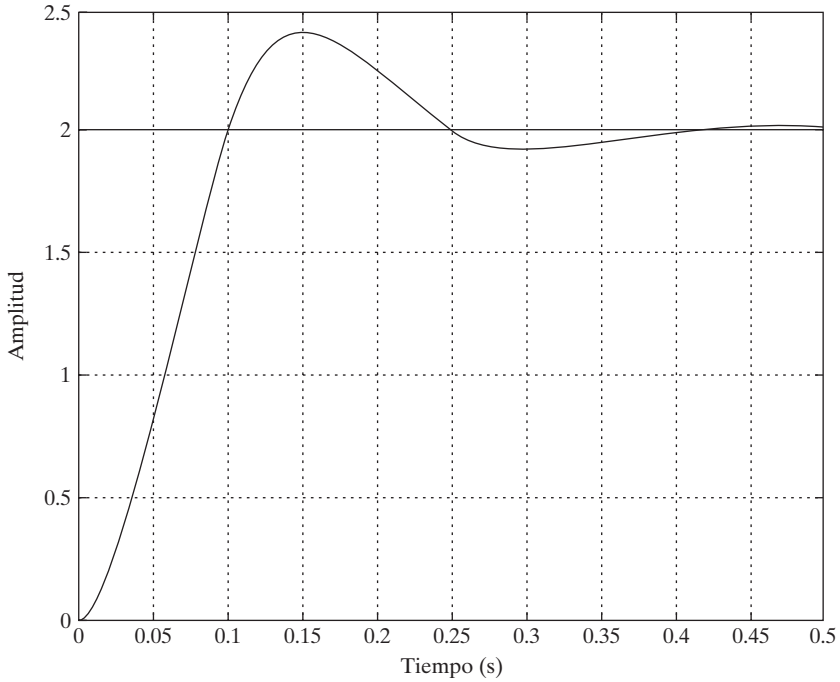



**FIGURA P8.11**

**(a)** Determine la ubicación de los polos para los casos **(i)** $M = 1, D = 50.4, K = 3969$; y **(ii)** $M = 2, D = 50.4, K = 3969$. Muestre la ubicación de los polos en una gráfica de polos y ceros. Calcule la frecuencia natural y la constante de tiempo para cada uno de los casos. ¿Cuál tiene la respuesta en frecuencia más alta? ¿Para cuál de los casos decae más rápidamente la respuesta transitoria?

**(b)** Utilice MATLAB para calcular la respuesta al impulso del sistema para los dos casos, y compare sus resultados con las predicciones hechas en el inciso (a).

**(c)** Repita los incisos (a) y (b), para los casos **(i)** $M = 1, D = 50.4, K = 15{,}876$ y **(ii)** $M = 2$, $D = 50.4, K = 15{,}876$.

Sistema masa-resorte-amortiguador

**8.13.** Considere de nuevo el sistema masa-resorte-amortiguador del problema 8.12. Sea $M = 1$, $D = 50.4, K = 3969$.

**(a)** Calcule la respuesta para un escalón unitario en la fuerza.

**(b)** Calcule la respuesta en estado estable para una entrada de $x(t) = 10\cos(20\pi t)u(t)$.

**(c)** Calcule la respuesta en estado estable para una entrada de $x(t) = 10\cos(2\pi t)u(t)$.

**(d)** Utilice MATLAB para simular el sistema con las entradas de los incisos (a)-(c). Verifique que sus respuestas en dichos incisos sean correctas; para ello, grafíquelas junto con los resultados correspondientes obtenidos de la simulación.

**(e)** Utilice la demostración del sistema masa-resorte-amortiguador disponible en la página Web del libro para simular el sistema con las entradas de los incisos (a)-(c), y compare las respuestas con las que dibujó en el inciso (d). Modifique el parámetro de amortiguamiento a $D = 127$ y utilice el applet para simular la respuesta al escalón. Dibuje el resultado.

**8.14.** Considere los dos sistemas dados por las siguientes funciones de transferencia:

**(i)** $$H(s) = \frac{242.5(s + 8)}{(s + 2)[(s + 4)^2 + 81](s + 10)}$$

**(ii)** $$H(s) = \frac{115.5(s + 8)(s + 2.1)}{(s + 2)[(s + 4)^2 + 81](s + 10)}$$

**(a)** Identifique los polos y los ceros del sistema.

**(b)** Sin calcular la respuesta real, diga cuál es la forma general de la respuesta al escalón.

**(c)** Determine el valor en estado estable de la respuesta al escalón.

**(d)** Determine el(los) polo(s) dominante(s).

**(e)** Use MATLAB para calcular y graficar la respuesta al escalón del sistema. Compare el dibujo con las respuestas esperadas en (b) a (d).

**8.15.** Para cada uno de los circuitos de la figura P8.15, calcule la respuesta en estado estable $y_{ss}(t)$ que resulta de las siguientes entradas con condiciones iniciales iguales a cero:

**(a)** $x(t) = u(t)$

**(b)** $x(t) = (5\cos 2t)u(t)$

**(c)** $x(t) = [2\cos(3t + 45°)]u(t)$

**8.16.** Considere el sistema masa-resorte del problema 2.23. Suponga que $M_1 = 1, M_2 = 10$, y $k_1 = k_2 = k_3 = 0.1$. Calcule la respuesta en estado estable $y_{ss}(t)$ que resulta de las siguientes entradas con condiciones iniciales iguales a cero:

**(a)** $x(t) = u(t)$

**(b)** $x(t) = (10\cos t)u(t)$

**(c)** $x(t) = [\cos(5t - 30°)]u(t)$

**8.17.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo tiene una función de transferencia $H(s) = 2/(s + 1)$. Calcule la respuesta transitoria $y_{tr}(t)$ que resulta de la entrada $x(t) = 3\cos 2t - 4\operatorname{sen} t, t \geq 0$, con condiciones iniciales iguales a cero:

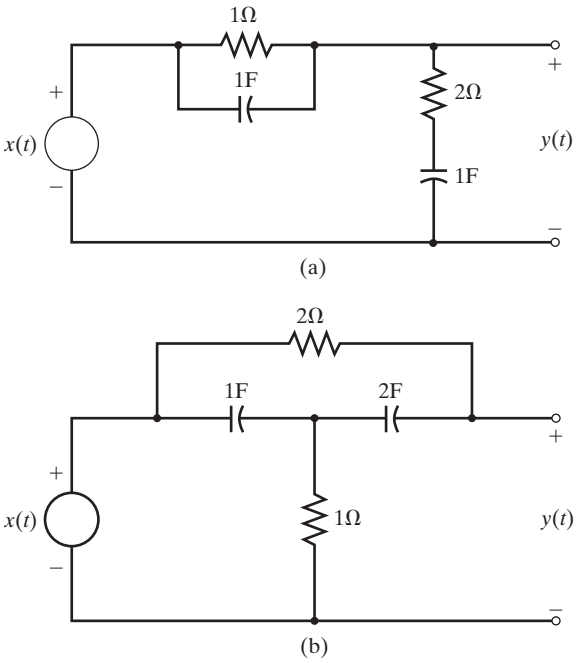



FIGURA P8.15

**8.18.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo tiene una función de transferencia

$$H(s) = \frac{s^2 + 16}{s^2 + 7s + 12}$$

Calcule las respuestas transitorio y en estado estable para la entrada $x(t) = 2\cos 4t, t \geq 0$, con condiciones iniciales iguales a cero.

**8.19.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo tiene una función de transferencia

$$H(s) = \frac{s^2 + 1}{(s + 1)(s^2 + 2s + 17)}$$

Calcule tanto la respuesta en estado estable $y_{ss}(t)$ como en estado transitorio $y_{tr}(t)$ cuando la entrada $x(t)$ es

**(a)** $x(t) = u(t)$, con condiciones iniciales iguales a cero.
**(b)** $x(t) = \cos t, t \geq 0$, con condiciones iniciales iguales a cero.
**(c)** $x(t) = \cos 4t, t \geq 0$, con condiciones iniciales iguales a cero.

**8.20.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo tiene una función de transferencia

$$H(s) = \frac{s + 2}{(s + 1)^2 + 4}$$

Aplicamos la entrada $x(t) = C\cos(\omega_0 t + \theta)$ al sistema para $t \geq 0$ con condiciones iniciales iguales a cero. La respuesta en estado estable $y_{ss}(t)$ que resulta es

$$y_{ss}(t) = 6\cos(t + 45°), t \geq 0$$

**(a)** Calcule $C, \omega_0$, y $\theta$.
**(b)** Calcule la transformada de Laplace $Y_{tr}(s)$ de la respuesta transitoria $y_{tr}(t)$ que resulta de esta entrada.

**8.21.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo tiene una función de transferencia $H(s)$ con $H(0) = 3$. Determinamos que la respuesta transitoria $y_{tr}(t)$ que resulta de la función escalón $x(t) = u(t)$ con condiciones iniciales iguales a cero en el tiempo $t = 0$ es

$$y_{tr}(t) = -2e^{-t} + 4e^{-3t}, t \geq 0$$

**(a)** Calcule la función de transferencia $H(s)$ del sistema.
**(b)** Calcule la respuesta en estado estable $y_{ss}(t)$ cuando la entrada $x(t)$ del sistema es igual a $2\cos(3t + 60°), t \geq 0$, con condiciones iniciales iguales a cero.

**8.22.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo tiene una función de transferencia $H(s)$. La entrada $x(t) = 3(\cos t + 2) + \cos(2t - 30°)$, con $t \geq 0$, producen la respuesta en estado estable $y_{ss}(t) = 6\cos(t - 45°) + 8\cos(2t - 90°), t \geq 0$, con condiciones iniciales iguales a cero. Calcule $H(1)$ y $H(2)$.

**8.23.** Considere un sistema de segundo orden de la forma

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Sea $s \rightarrow j\omega$ para obtener $H(\omega)$, y suponga que $0 < \zeta < 1$. Sin factorizar el denominador, encuentre la expresión para $|H(\omega)|$. Para determinar si existe un pico en $|H(\omega)|$, tome la derivada de $|H(\omega)|$ respecto a $\omega$. Demuestre que existe un pico para $\omega \neq 0$ sólo si $\zeta \leq 1/\sqrt{2}$. Determine la altura del pico. ¿Qué sucede con el pico cuando $\zeta \rightarrow 0$?

**8.24.** Trace las gráficas de magnitud y fase para los siguientes sistemas. En cada caso, calcule $|H(\omega)|$ y $\angle H(\omega)$ para $\omega = 0$, $\omega =$ los puntos a 3 dB, $\omega = \omega_p$ y $\omega \rightarrow \infty$. Aquí, $\omega_p$ es el valor de $\omega$ para el cual $|H(\omega)|$ es el máximo. Verifique sus cálculos mediante la gráfica de la respuesta en frecuencia con el uso de MATLAB.

**(a)** $H(s) = \dfrac{10}{s + 5}$

**(b)** $H(s) = \dfrac{5(s + 1)}{s + 5}$

**(c)** $H(s) = \dfrac{s + 10}{s + 5}$

**(d)** $H(s) = \dfrac{4}{(s + 2)^2}$

**(e)** $H(s) = \dfrac{4s}{(s + 2)^2}$

**(f)** $H(s) = \dfrac{s^2 + 2}{(s + 2)^2}$

**(g)** $H(s) = \dfrac{4}{s^2 + \sqrt{2}(2s) + 4}$

**8.25.** Trace las gráficas de magnitud y fase para los circuitos que aparecen en la figura P8.25. En cada caso, calcule $|H(\omega)|$ y $\angle H(\omega)$ para $\omega = 0$, $\omega =$ los puntos a 3 dB, y $\omega \rightarrow \infty$.

**8.26.** Repita el problema 8.25 para los circuitos de la figura P8.15.

**8.27.** Considere el circuito *RLC* que aparece en la figura P8.27. Elija los valores para $R$ y $L$ tales que el factor de amortiguamiento $\zeta = 1$ y el circuito sea un filtro pasa bajas con un ancho de banda aproximado de 20 rad/s; es decir, $|H(\omega)| \geq (0.707)|H(0)|$ para $0 \leq \omega \leq 20$.

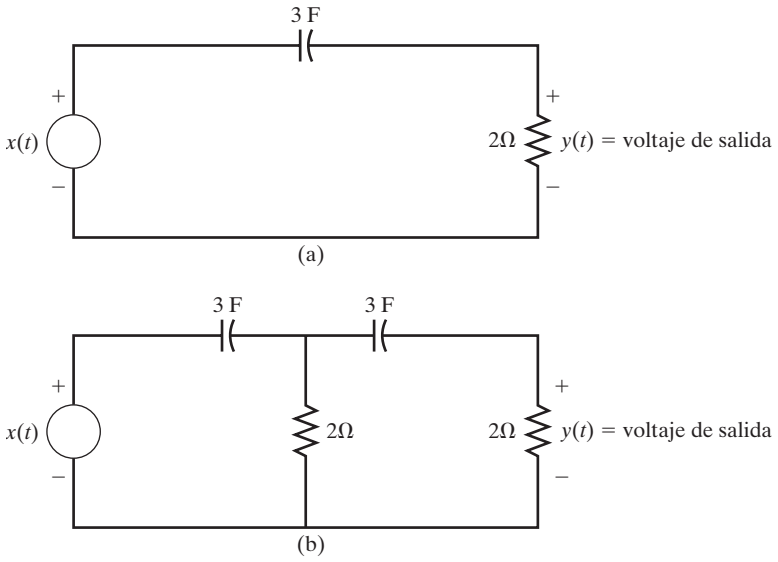



FIGURA P8.25

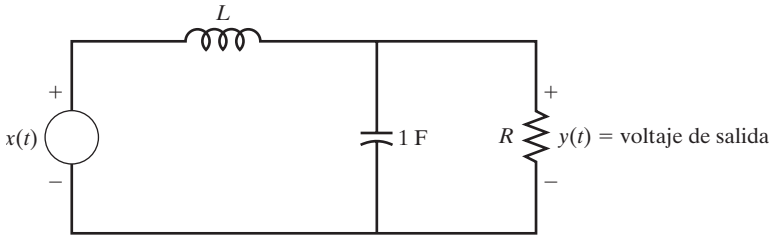



FIGURA P8.27

**8.28.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo tiene una función de transferencia $H(s)$. Sabemos que $H(0) = 1$ y que $H(s)$ tiene dos polos y ningún cero. Además, la función $|H(\omega)|$ aparece en la figura P8.28. Determine $H(s)$.

**8.29.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo tiene una función de transferencia $H(s) = K/(s + a)$, donde $K > 0$ y $a > 0$ son desconocidas. La respuesta en estado estable para $x(t) = 4 \cos t, t \geq 0$, es $y_{ss}(t) = 20 \cos(t + \phi_1), t \geq 0$. La respuesta en estado estable para $x(t) = 5 \cos 4t, t \geq 0$, es $y_{ss}(t) = 10 \cos(4t + \phi_2), t \geq 0$. Aquí $\phi_1, \phi_2$ son desplazamientos de fase no medibles. Encuentre $K$ y $a$.

**8.30.** Mediante MATLAB, determine las curvas de respuesta en frecuencia para el sistema masa-resorte del problema 2.23. Tome $M_1 = 1, M_2 = 10$, y $k_1 = k_2 = k_3 = 0.1$.

**8.31.** Dibuje las gráficas de Bode asintóticas (tanto la gráfica de magnitud como la de fase) para los siguientes sistemas. Compare sus gráficas con las gráficas reales de Bode obtenidas mediante MATLAB.

**(a)** $H(s) = \dfrac{16}{(s + 1)(s + 8)}$

**(b)** $H(s) = \dfrac{10(s + 4)}{(s + 1)(s + 10)}$

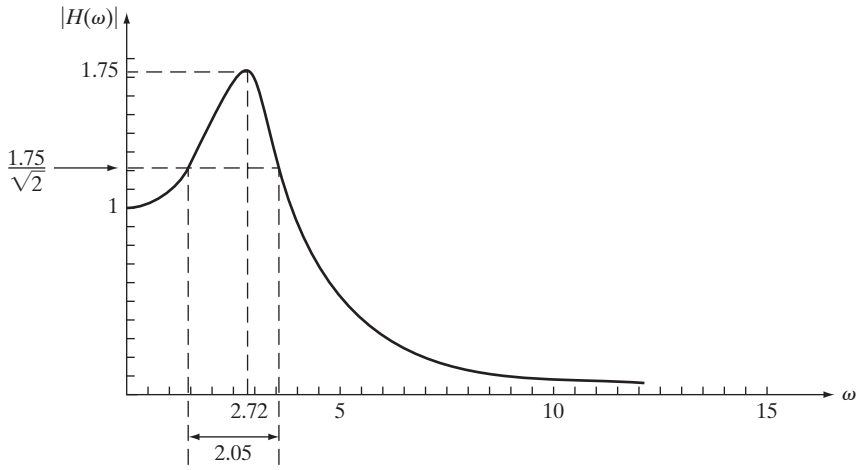



FIGURA P8.28

**(c)** $H(s) = \dfrac{10}{s(s + 6)}$

**(d)** $H(s) = \dfrac{10}{(s + 1)(s^2 + 4s + 16)}$

**(e)** $H(s) = \dfrac{10}{(s + 1)(s^2 + s + 16)}$

**(f)** $H(s) = \dfrac{1000(s + 1)}{(s + 20)^2}$

**8.32.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo tiene una función de transferencia $H(s)$ con dos polos y dos ceros. La función $H(\omega)$ del sistema está dada por

$$H(\omega) = \frac{-\omega^2 + j3\omega}{8 + j12\omega - 4\omega^2}$$

Determine $H(s)$.

**8.33.** Considere el filtro Butterworth de tres polos dado por la función de transferencia

$$H(s) = \frac{\omega_c^3}{s^3 + 2\omega_c s^2 + 2\omega_c^2 s + \omega_c^3}$$

**(a)** Derive una expresión para la respuesta al impulso $h(t)$ en términos del ancho de banda $\omega_c$. Grafique $h(t)$ cuando $\omega_c = 1$ rad/s.

**(b)** Compare su resultado en el inciso (a) con la respuesta al impulso de un filtro pasa bajas ideal con la función de frecuencia $H(\omega) = p_2(\omega)$. Discuta las similitudes y diferencias de las dos respuestas al impulso.

**8.34.** De nuevo considere el filtro Butterworth de tres polos definido en el problema 8.33.

**(a)** Para el caso donde $\omega_c = 2\pi$, calcule la respuesta de salida del filtro cuando la entrada es $x(t) = u(t) - u(t - 1)$ con condiciones iniciales iguales a cero.

**(b)** Repita el inciso (a) para el caso cuando $\omega_c = 4\pi$.

**(c)** Mediante MATLAB, grafique las respuestas encontradas en los incisos (a) y (b).

**(d)** ¿Esperaba los resultados obtenidos en el inciso (c)? Explique.

**8.35.** Para el filtro Butterworth de tres polos con $\omega_c = 1$, calcule la respuesta de salida $y(t)$ cuando la entrada $x(t)$ es

**(a)** $x(t) = 1, -\infty < t < \infty$

**(b)** $x(t) = 2\cos t, -\infty < t < \infty$

**(c)** $x(t) = \cos(10t + 30°), -\infty < t < \infty$

**(d)** $x(t) = 2(\cos t)(\text{sen } t), -\infty < t < \infty$

**8.36.** De nuevo, considere el filtro Butterworth de tres polos con $\omega_c = 1$. La respuesta de salida a la entrada $x(t) = \cos 0.5t, -\infty < t < \infty$, se puede expresar en la forma $y(t) = B\cos[0.5(t - t_d)], -\infty < t < \infty$, donde $t_d$ es el tiempo de retardo a través del filtro. La respuesta que resulta de la entrada $x(t) = \cos t, -\infty < t < \infty$, se puede expresar en la forma $y(t) = C\cos(t - t_d + \phi), -\infty < t < \infty$, donde $\phi$ es la distorsión de fase que resulta de la característica de fase no lineal del filtro. Calcule $t_d$ y $\phi$.

**8.37.** Repita el problema 8.34 para el filtro Chebyshev de tres polos con la función de transferencia

$$H(s) = \frac{0.251\omega_c^3}{s^3 + 0.597\omega_c s^2 + 0.928\omega_c^2 s + 0.251\omega_c^3}$$

**8.38.** Repita el problema 8.35 para el filtro Chebyshev de tres polos con $\omega_c = 1$.

**8.39.** El objetivo de este problema es diseñar tanto un filtro pasa altas como un filtro pasa banda, comenzando con el filtro Butterworth de dos polos con la función de transferencia

$$H(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_c s + \omega_c^2}$$

**(a)** Diseñe el filtro pasa altas de modo que el ancho de banda vaya de $\omega = 10$ a $\omega = \infty$.

**(b)** Diseñe el filtro pasa banda de modo que el ancho de banda vaya de $\omega = 10$ a $\omega = 20$.

**(c)** Mediante el uso de MATLAB, determine las curvas de respuesta en frecuencia para los filtros construidos en los incisos (a) y (b).

**8.40.** Repita el problema 8.39 para el filtro Chebyshev de dos polos con la función de transferencia

$$H(s) = \frac{0.50\omega_c^2}{s^2 + 0.645\omega_c s + 0.708\omega_c^2}$$

**8.41.** Diseñe un filtro Butterworth de tres polos con una banda de rechazo desde $\omega = 10$ hasta $\omega = 15$ rad/s.

**(a)** Grafique las curvas de respuesta en frecuencia para el filtro resultante.

**(b)** A partir de la curva de magnitud graficada en el inciso (a), determine la amplitud esperada de las respuestas en estado estable $y_{ss}(t)$ para las siguientes señales: **(i)** $x(t) = \text{sen } 5t$, **(ii)** $x(t) = \text{sen } 12t$, y **(iii)** $x(t) = \text{sen } 5t + \text{sen } 12t$.

**(c)** Verifique su predicción en el inciso (b) mediante MATLAB para calcular y graficar la respuesta del sistema para las señales definidas en el inciso (b). Usted puede utilizar `lsim` e integrar lo suficiente para que la respuesta alcance el estado estable, o utilice Simulink. [*Nota:* cuando simulamos un sistema de tiempo continuo para encontrar la respuesta, las computadoras aproximan el sistema como si fuera de tiempo discreto. Por lo tanto, cuando defina las señales $x(t)$ para un vector de tiempo `t=0:T:tf`, asegúrese de que el incremento de tiempo `T` para el cual define $x(t)$, satisfaga el teorema de muestreo de Nyquist; es decir, $2\pi/T$ es al menos el doble de la frecuencia más alta encontrada en $x(t)$ [vea los comentarios en el problema 1.2 para mayor información].

**8.42.** Diseñe un filtro pasa banda Chebyshev de tres polos con una banda de paso de $\omega = 10$ a $\omega = 15$ rad/s. Permita un rizo de 3 dB en la banda de paso.
- **(a)** Grafique las curvas de la respuesta en frecuencia para el filtro resultante.
- **(b)** De la curva de magnitud que aparece en el inciso (a), determine la amplitud esperada de la respuesta en estado estable $y_{ss}(t)$ para las siguientes señales: **(i)** $x(t) = \text{sen } 5t$. **(ii)** $x(t) = \text{sen } 12t$, y **(iii)** $x(t) = \text{sen } 5t + \text{sen } 12t$.
- **(c)** Verifique su predicción en el inciso (**b**) mediante MATLAB para calcular y graficar la respuesta del sistema para las señales que definimos en el inciso (**b**) (considere el comentario en el problema 8.41 sobre la selección del incremento de tiempo al utilizar MATLAB).

**8.43.** Diseñe un filtro Butterworth con un ancho de banda de 10 rad/s. Seleccione un número apropiado de polos de modo que atenuemos una señal sinusoidal de 25 rad/s a un nivel que no sea mayor al 5% de su amplitud de entrada. Utilice MATLAB para calcular y graficar la respuesta del sistema para las siguientes señales (considere los comentarios del problema 8.41 sobre la selección del incremento de tiempo al utilizar MATLAB).
- **(a)** $x(t) = \text{sen } 5t$
- **(b)** $x(t) = \text{sen } 25t$
- **(c)** $x(t) = \text{sen } 5t + \text{sen } 25t$
- **(d)** $x(t) = w(t)$ donde $w(t)$ es una señal aleatoria cuyos valores están distribuidos de manera uniforme entre 0 y 1 (use `x = rand(201, 1)` para generar la señal del vector de tiempo `t = 0:.05:10`). Grafique la entrada aleatoria $x(t)$, y compárela con la respuesta del sistema.

**8.44.** Diseñe un filtro Chebyshev pasa altas tipo 1 con un ancho de banda de 10 rad/s. Seleccione un número apropiado de polos de modo que atenúe una señal sinusoidal de 5 rad/s a un nivel que no sea mayor al 10% de su amplitud de entrada y que exista un máximo de rizo de 3 dB en la banda de paso. Utilice MATLAB para calcular y graficar la respuesta del sistema para las siguientes señales (considere los comentarios del problema 8.41 sobre la selección del incremento de tiempo al utilizar MATLAB).
- **(a)** $x(t) = \text{sen } 5t$
- **(b)** $x(t) = \text{sen } 25t$
- **(c)** $x(t) = \text{sen } 5t + \text{sen } 25t$
- **(d)** $x(t) = w(t)$, donde $w(t)$ es una señal aleatoria cuyos valores están distribuidos de manera uniforme entre 0 y 1 (use `x = rand(201, 1)` para generar la señal del vector de tiempo `t = 0:.05:10`). Grafique la entrada aleatoria $x(t)$, y compárela con la respuesta del sistema.

CAPÍTULO

9

# Aplicación al control

Una de las principales aplicaciones de la función de transferencia es en el estudio de control. Un tipo de problema de control muy común es el de forzar la salida de un sistema para que sea igual a una señal de referencia deseada, lo que se conoce como *seguimiento*. El problema de seguimiento surge en una gran variedad de aplicaciones, tales como el control y la automatización industriales, donde el objetivo es controlar la posición y la velocidad de un objeto. Algunos de los ejemplos que planteamos en este capítulo involucran el control de la velocidad de un vehículo y el control de la posición angular del eje de un motor. El desarrollo comienza en la sección 9.1 con una introducción al problema de seguimiento, y después en la sección 9.2 proporcionamos las condiciones para resolver este problema en términos de una configuración de control por retroalimentación. Aquí nos enfocamos en el caso en el que la referencia es una señal constante, llamada *punto de ajuste*. En la sección 9.3 se plantea el estudio del comportamiento de un sistema de lazo cerrado como una función de la ganancia de un controlador, en términos del lugar geométrico de las raíces, y después en la sección 9.4 aplicamos el lugar geométrico de las raíces al problema de diseño de sistemas de control. La sección 9.5 resume el capítulo.

## 9.1 INTRODUCCIÓN AL CONTROL

Considere un sistema causal, lineal e invariante en el tiempo continuo, con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$. El sistema está dado por la representación de su función de transferencia,

$$Y(s) = G_p(s)X(s) \tag{9.1}$$

donde $Y(s)$ es la transformada de Laplace de la salida $y(t)$, $X(s)$ es la transformada de Laplace de la entrada, y $G_p(s)$ es la función de transferencia del sistema, que con frecuencia se conoce como la *planta*. Observe el cambio en la notación de $H(s)$ a $G_p(s)$ para denotar la función de transferencia. A lo largo de este capítulo indicaremos la función de transferencia del sistema dado como $G_p(s)$, donde el subíndice "$p$" significa "planta".

En muchas aplicaciones, el objetivo es forzar la salida $y(t)$ del sistema para que siga una señal deseada $r(t)$, llamada *señal de referencia*. A esto se le conoce como el *problema de seguimiento*; es decir, el objetivo es encontrar una entrada $x(t)$, tal que la salida del sistema $y(t)$ sea igual a una señal de referencia $r(t)$. En este problema, la entrada $x(t)$ se conoce como *entrada de control*. En muchos casos, la referencia $r(t)$ es una constante $r_0$, la cual se conoce como *punto de ajuste*. Por lo tanto, en el *control del punto de ajuste*, el objetivo es encontrar una entrada de control $x(t)$, tal que $y(t) = r_0$ para toda $t$ en cierto intervalo de valores deseados. La forma más sencilla de control es el control de *lazo abierto*, en el que la entrada $x(t)$ depende sólo de la señal de referencia $r(t)$, y no de la salida $y(t)$. El seguimiento ideal de un

sistema con condiciones iniciales igual a cero es $Y(s) = R(s)$, y encontramos el control de lazo abierto correspondiente a partir de (9.1):

$$X(s) = \frac{R(s)}{G_p(s)} \tag{9.2}$$

Aquí, $R(s)$ es la transformada de Laplace de la referencia $r(t)$. Para el control de punto de ajuste, $R(s) = \frac{r_0}{s}$. La expresión en (9.2) se conoce como *inversión del modelo*, ya que la planta se invierte en el control.

Existen limitaciones prácticas para implementar el control en (9.2). Por ejemplo, considere el control de punto de ajuste en el caso en que $G_p(s) = B(s)/A(s)$, donde el grado de $A(s)$ es $N$ y el grado de $B(s)$ es $M$. Si $N > M + 1$, entonces $X(s)$ en (9.2) tiene un grado mayor en el numerador que en el denominador. Al tomar la transformada inversa de Laplace de $X(s)$ se obtendría un impulso o la derivada de un impulso, lo cual es imposible de generar. La otra limitación de (9.2) es que los polos de $sX(s)$ deben estar en el semiplano izquierdo para que exista el límite de $x(t)$. Este resultado proviene del teorema del valor final que presentamos en el capítulo 6. Si $G_p(s)$ tiene ceros que no se encuentren en el semiplano izquierdo, entonces no puede generarse la entrada de control ideal, $x(t)$.

Con frecuencia, un control no ideal $x(t)$ puede encontrarse para un control de punto de ajuste, tal que $y(t)$ sea asintótica en $r_0$, es decir, $y(t) \to r_0$ cuando $t \to \infty$. Considere la siguiente forma general para $X(s)$:

$$X(s) = \frac{r_0}{s} G_c(s) \tag{9.3}$$

En esta forma, $G_c(s)$ es alguna función racional de $s$. La salida del sistema resultante es

$$Y(s) = \frac{r_0}{s} G_p(s) G_c(s) \tag{9.4}$$

La velocidad a la que $y(t)$ converge en $r_0$ se determina con los polos de (9.4). Un método general para elegir $X(s)$ en (9.3) es seleccionar los ceros de $G_c(s)$ que cancelan los polos lentos, pero estables de $G_p(s)$. Entonces se eligen los polos de $G_c(s)$ para que sean más rápidos que los de $G_p(s)$. El siguiente ejemplo demuestra la aplicación del control de lazo abierto:

---

**Ejemplo 9.1 Control de lazo abierto**

Considere el sistema que consiste en un vehículo en movimiento sobre una superficie horizontal. La salida $y(t)$ en el tiempo $t$ es la posición del vehículo al tiempo $t$ en relación a alguna referencia. La entrada $x(t)$ es la fuerza de impulsión o de frenado que se le aplica al vehículo al tiempo $t$. De la segunda ley de movimiento de Newton (vea la sección 2.4) se desprende que $y(t)$ y $x(t)$ están relacionadas por la siguiente ecuación diferencial de entrada y salida:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{k_f}{M}\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{M}x(t)$$

Aquí, $M$ es la masa del vehículo y $k_f$ es el coeficiente que representa las pérdidas por fricción. En términos de la velocidad $v(t) = dy(t)/dt$, la ecuación diferencial se reduce a

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{k_f}{M}v(t) = \frac{1}{M}x(t) \tag{9.5}$$

La ecuación diferencial (9.5) especifica el modelo para la velocidad del vehículo. A partir de (9.5), la función de transferencia del modelo de velocidad es

$$G_p(s) = \frac{1/M}{s + k_f/M} \tag{9.6}$$

Ahora, con la salida del sistema definida para que sea la velocidad $v(t)$, el objetivo del control de velocidad es forzar a $v(t)$ para que sea igual a una velocidad deseada $v_0$. Así, en este problema, la señal de referencia $r(t)$ es igual a la constante $v_0$, y $v_0$ es el punto de ajuste. Suponga que la velocidad inicial $v(0)$ es cero; entonces, encontramos el control ideal a partir de (9.2):

$$X(s) = \frac{v_0}{sG_p(s)} = \frac{v_0}{s(1/M)/(s + k_f/M)} = \frac{v_0M(s + k_f/M)}{s}$$

Al tomar la transformada inversa, resulta en la entrada del control

$$x(t) = v_0M\delta(t) + v_0k_f, t \geq 0 \tag{9.7}$$

donde $\delta(t)$ es el impulso. Obviamente, el control (9.7) no puede implementarse, ya que contiene un impulso. La presencia del impulso en la entrada de control es un resultado del requerimiento $v(t) = v_0$ para toda $t > 0$, iniciando en $v(0) = 0$. En otras palabras, el impulso es necesario para cambiar la velocidad de manera instantánea, desde cero hasta el punto de ajuste deseado $v_0$.

Buscamos un controlador asintótico de la forma (9.3), el cual pueda implementarse. Una forma simple de control es hacer que $G_c(s) = K$, donde $K$ es una constante (real). La entrada de control correspondiente es $x(t) = v_0Ku(t)$, donde $u(t)$ es la función escalón unitario. Al sustituir $X(s) = v_0K/s$ en la representación de la función de transferencia, obtenemos

$$V(s) = G_p(s)X(s) = \frac{v_0K/M}{s(s + k_f/M)} = \frac{v_0K/k_f}{s} - \frac{v_0K/k_f}{s + k_f/M}$$

Si hacemos que $K$ sea igual a $k_f$, entonces la transformada inversa de Laplace de $V(s)$ arroja

$$v(t) = v_0[1 - e^{-(k_f/M)t}], \quad t \geq 0 \tag{9.8}$$

y debido a que $k_f/\mathrm{M} > 0$, vemos que $v(t)$ converge en $v_0$ cuando $t \to \infty$. Por lo tanto, con la entrada

$$x(t) = (v_0k_f)u(t) \tag{9.9}$$

el control de punto de ajuste se logra en el límite, cuando $t \to \infty$. Observe que la implementación del control (9.9) requiere que el coeficiente $k_f$ del modelo de velocidad (9.5) sea conocido. Además, la relación $k_f/M$ será menor, ya que la masa del vehículo será grande y el coeficiente $k_f$ correspondiente a la fricción viscosa será relativamente pequeño. Así, el control $x(t) = v_0k_fu(t)$ resultará en una constante de tiempo grande, $\tau = \dfrac{M}{k_f}$, en la respuesta del sistema dado por (9.8).

Es posible lograr una respuesta más rápida si seleccionamos de manera adecuada los polos y ceros de $G_c(s)$. Sea que la transformada de Laplace $X(s)$ de la señal de control $x(t)$ esté dada por

$$X(s) = \frac{B(s + k_f/M)}{s + C} R(s) \tag{9.10}$$

donde $B$ y $C$ son constantes reales que determinaremos, y $R(s)$ es la transformada de la señal de referencia $r(t) = v_0, t \geq 0$. Al sustituir (9.10) en la representación de la función de transferencia, $V(s) = G_p(s)X(s)$, y al tomar la transformada inversa de $V(s)$ obtenemos

$$v(t) = \frac{Bv_0}{CM}(1 - e^{-Ct}), \quad t \geq 0$$

Si $C > 0$, es claro que la velocidad $v(t)$ convergerá en $v_0$ si $B = CM$. Además, podemos hacer que la rapidez a la que $v(t)$ converge en $v_0$ sea tan grande como queramos si elegimos que $C$ sea un número positivo lo suficientemente grande. Así, con $B = CM$, la señal de control con la transformada $X(s)$ dada por (9.10) logra el objetivo de forzar la velocidad $v(t)$ para que converja al punto de ajuste $v_0$, con cualquier rapidez deseada de convergencia. Sin embargo, como veremos a continuación, este tipo de control (es decir, el control de lazo abierto) es susceptible a influencias sobre la salida del sistema que puede resultar de alteraciones desconocidas aplicadas al sistema. Por ejemplo, el control definido por (9.10) puede no funcionar bien cuando la gravedad actúa sobre el vehículo al ir de subida o de bajada.

---

Un problema importante con el control de lazo abierto es que es sensible a modelar errores y alteraciones que pueden aplicarse al sistema. Considere el control diseñado en el ejemplo 9.1, y dado en (9.10), donde $B = CM$. Los valores de los parámetros de la planta $k_f$ y $M$ necesitan ser conocidos de manera exacta para que el control funcione a la perfección. Siempre hay algún error en los parámetros de la planta, y se debe diseñar una ley de control *robusta*, es decir, que no sea sensible a estos errores de modelado. La ley de control también debe ser robusta ante alteraciones que pudiesen aplicarse al sistema. En la figura 9.1a aparece un diagrama a bloques de control de lazo abierto, donde $d(t)$ es una perturbación. Observe que la transformada $Y(s)$ de la salida de la planta está dada por

$$Y(s) = G_p(s)G_c(s)R(s) + G_p(s)D(s)$$

donde $R(s)$ es la transformada de la señal de referencia $r(t)$ y $D(s)$ es la transformada de la perturbación $d(t)$. Es claro que la salida $y(t)$ de la planta será "perturbada" por la perturbación de entrada $d(t)$.

Para mejorar la robustez, es necesario que la señal de control $x(t)$ dependa directamente de la salida de la planta $y(t)$. Esto requiere que $y(t)$ pueda ser medido por algún tipo de sensor, en cuyo caso la salida medida puede ser comparada con la salida $r(t)$ deseada. Esto resulta en el *error de seguimiento* $e(t)$ dado por

$$e(t) = r(t) - y(t) \tag{9.11}$$

el cual puede "retroalimentarse" para formar la señal de control $x(t)$. De forma más precisa, en el *control por retroalimentación* la señal de error $e(t)$ se aplica al controlador o compensador con la función de transferencia $G_c(s)$, para arrojar la señal de control $x(t)$ del sistema dado. La figura 9.1b muestra un diagrama a bloques para el proceso de control de lazo cerrado. El sistema completo que muestra la figura 9.1b se conoce como *sistema de lazo cerrado*, ya que está formado a partir del sistema dado con la función de transferencia $G_p(s)$ "cerrando el lazo" alrededor de $G_p(s)$ y $G_c(s)$. En el resto de este capítulo nos enfocaremos en el control de lazo cerrado.

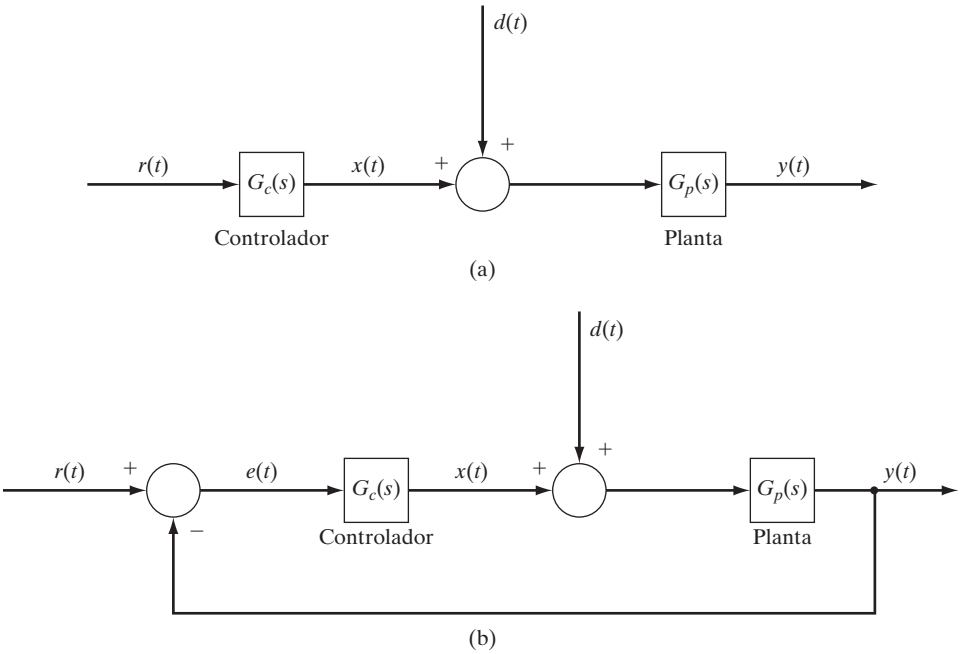



**FIGURA 9.1**
Diagrama a bloques de (a) control de lazo abierto, y (b) control de lazo cerrado.

En el esquema de control por retroalimentación que aparece en la figura 9.1b, el objetivo es diseñar la función de transferencia $G_c(s)$ del controlador para que el error de seguimiento $e(t)$ converja en cero cuando $t \to \infty$, lo cual es equivalente a requerir que la entrada $y(t)$ converja en la referencia $r(t)$, cuando $t \to \infty$. En ocasiones a esto se le conoce como *seguimiento asintótico*, ya que $y(t) = r(t)$ ocurre en el límite cuando $t \to \infty$. La solución al problema de seguimiento mediante la configuración de la figura 9.1b se conoce como *control por retroalimentación de salida*, ya que la salida del sistema $y(t)$ retroalimenta la entrada; es decir, la señal de control $x(t)$ aplicada al sistema dado depende de la salida $y(t)$ del sistema. La dependencia de $x(t)$ sobre $y(t)$ se ve a partir de la relación de transformada

$$X(s) = G_c(s)E(s) = G_c(s)[R(s) - Y(s)] \tag{9.12}$$

lo que se desprende directamente del diagrama a bloques de la figura 9.1b. En (9.12), $R(s)$ es la transformada de la referencia $r(t)$, y $E(s)$ es la transformada del error de seguimiento $e(t)$.

El tipo más sencillo de controlador es el que tiene la función de transferencia $G_c(s) = K_P$, donde $K_P$ es una constante (real). En este caso, (9.12) se vuelve

$$X(s) = K_P E(s) = K_P[R(s) - Y(s)]$$

y al tomar la transformada inversa, obtenemos la señal de control

$$x(t) = K_P e(t) = K_P[r(t) - y(t)] \tag{9.13}$$

El control dado por (9.13) se conoce como *control proporcional*, ya que la señal de control $x(t)$ es directamente proporcional a la señal de error $e(t)$. Esto explica el subíndice "$P$" en $K_P$, lo que significa "proporcional".

Si combinamos (9.13) con (9.1) y utilizamos el resultado de la conexión de retroalimentación en la sección 6.6 obtenemos la siguiente función de transferencia de lazo cerrado, para una planta $G_p(s)$ con control proporcional:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_P G_P(s)}{1 + K_P G_P(s)} \tag{9.14}$$

Lograríamos un seguimiento perfecto para todas las señales de entrada si $Y(s) = R(s)$; en otras palabras, si la función de transferencia de lazo cerrado es igual a 1. Un controlador proporcional entrega errores de seguimiento diferentes de cero; sin embargo, la función de transferencia de lazo cerrado se acerca a la unidad conforme se incrementa el valor de $K_P$, y se mejora así la exactitud de seguimiento del controlador.

---

### Ejemplo 9.2 Control proporcional

De nuevo considere un vehículo sobre una superficie horizontal con el modelo de velocidad dado por (9.5), y suponga que el objetivo es forzar a la velocidad $v(t)$ a que rastree una rapidez deseada $v_0$, de tal manera que $r(t) = v_0 u(t)$. En este caso, la velocidad puede medirse con un velocímetro y, entonces, el error de seguimiento

$$e(t) = r(t) - v(t) = v_0 - v(t)$$

puede calcularse. Con un control por retroalimentación proporcional, la señal de control $x(t)$ aplicada al coche está dada por

$$x(t) = K_P[v_0 - v(t)] \tag{9.15}$$

Con el control (9.15), la función de transferencia de lazo cerrado (9.14) es

$$\frac{V(s)}{R(s)} = \frac{K_P/M}{s + k_f/M + K_P/M}$$

Con $R(s) = v_0/s$, encontramos que $V(s)$ es

$$V(s) = \frac{-K_P v_0/(k_f + K_P)}{s + k_f/M + K_P/M} + \frac{K_P v_0/(k_f + K_P)}{s} \tag{9.16}$$

La transformada inversa de (9.16) arroja la respuesta

$$v(t) = -\frac{K_P v_0}{k_f + K_P} e^{-[(k_f + K_P)/M]t} + \frac{K_P v_0}{k_f + K_P}, \quad t \geq 0 \tag{9.17}$$

A partir de (9.17) vemos que, si $(k_f + K_P)/M > 0$, entonces $v(t)$ converge en $K_P v_0/(k_f + K_P)$. Debido a que no existe un valor finito de $K_P$ para el que $K_P/(k_f + K_P) = 1$, el controlador proporcional resultará en un *error de seguimiento en el estado estable* igual a

$$v_0 - \frac{K_P v_0}{k_f + K_P} = \left(1 - \frac{K_P}{k_f + K_P}\right) v_0 = \frac{k_f}{k_f + K_P} v_0 \tag{9.18}$$

Sin embargo, podemos hacer que el error de seguimiento dado por (9.18) sea tan pequeño como queramos si tomamos $K_P$ lo suficientemente grande, comparado con $k_f$. Como veremos en los resultados de la siguiente sección, es posible obtener un error en estado estable igual a cero modificando el controlador proporcional.

De (9.17) vemos que podemos hacer que la rapidez de convergencia de $v(t)$ hacia el valor en estado estable sea tan rápida como queramos, nuevamente haciendo que $K_P$ sea lo suficientemente grande. Para ver esto, suponga que $k_f = 10$, $M = 1000$, y $v_0 = 60$. Entonces, la transformada $V(s)$ dada por (9.16) se vuelve

$$V(s) = \frac{0.06K_P}{[s + 0.01(1 + 0.1K_P)]s}$$

La velocidad resultante $v(t)$ puede calcularse con MATLAB mediante el comando `step`, el Symbolic Math Toolbox, o Simulink, como muestran los ejemplos 6.34 a 6.36. Los siguientes comandos se utilizan con `step`:

```
num = 0.06*Kp;
den = [1 0.01+0.001*Kp];
H = tf(num,den);
step(H)
```

Al ejecutar el software MATLAB con $K_P = 100, 200$ y $500$, resulta en las respuestas de la velocidad que aparecen en la figura 9.2. Observe que la respuesta más rápida con el error en estado estable más pequeño se logra cuando $K_P = 500$, el valor más grande de $K_P$. Para $K_P = 500$, el error en estado estable es

$$\frac{k_f}{k_f + K_P} v_0 = \frac{10}{510} 60 = 1.176$$

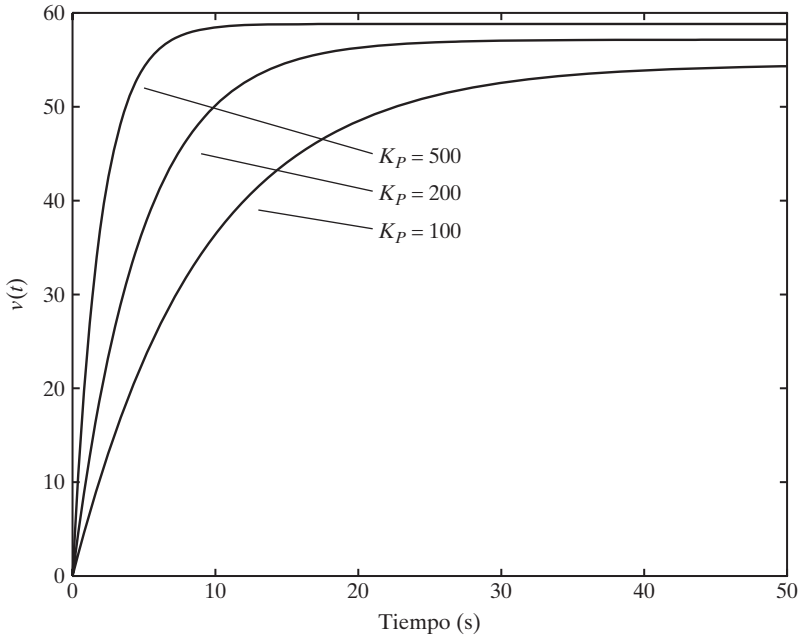



**FIGURA 9.2**
Respuestas de la velocidad del ejemplo 9.2 para $K_P = 100$, 200 y 500.

Ahora suponga que una fuerza de perturbación escalón $d(t) = 50u(t)$ se aplica al vehículo en el tiempo $t = 0$, donde la perturbación puede ser el resultado del desplazamiento del vehículo hacia abajo sobre una pendiente. Si utilizamos el esquema de control de lazo abierto que aparece en la figura 9.1a, la transformada $V(s)$ de la velocidad estará dada por

$$V(s) = G_p(s)G_c(s)R(s) + G_p(s)\frac{50}{s}$$

Por lo tanto, la perturbación escalón resultará en una perturbación de la velocidad del coche, $v(t)$, igual a la transformada inversa de

$$G_p(s)\frac{50}{s} = \frac{(0.001)50}{(s + 0.01)s} = \frac{5}{s} - \frac{5}{s + 0.01}$$

lo cual es igual a

$$5(1 - e^{-0.01t}), t \geq 0$$

Así, la perturbación resultará en un error importante para lograr el punto de ajuste deseado, $v_0 = 60$. En contraste, si una entrada de perturbación escalón $d(t)$ se aplica al vehículo, con el control por retroalimentación $x(t)$ dado por (9.15), la transformada $V(s)$ de la velocidad está dada por

$$V(s) = G_p(s)X(s) + G_p(s)\frac{50}{s} = K_P G_p(s)\left[\frac{v_0}{s} - V(s)\right] + G_p(s)\frac{50}{s} \tag{9.19}$$

Al resolver (9.19) para $V(s)$ tenemos

$$V(s) = \frac{K_P G_p(s)}{1 + K_P G_p(s)}\frac{v_0}{s} + \frac{G_p(s)}{1 + K_P G_p(s)}\frac{50}{s}$$

y por lo tanto, la perturbación de la velocidad resultante de una perturbación escalón es igual a la transformada inversa de

$$\frac{G_p(s)}{1 + K_P G_p(s)}\frac{50}{s} = \frac{50/M}{(s + k_f/M + K_P/M)s}$$

Para $k_f = 10$, $M = 1000$, y $K_P = 500$, la perturbación es

$$0.098(1 - e^{-0.51t}), t \geq 0$$

Es evidente que este término es mucho más pequeño que en el caso del control de lazo abierto, y por lo tanto en este ejemplo, el control de lazo cerrado es mucho más "robusto" para escalonar una perturbación que el control de lazo abierto.

### 9.1.1 Simulación con MATLAB del sistema de lazo cerrado

En el ejemplo 9.2 demostramos un método para simular un sistema de lazo cerrado, el cual utiliza el comando `step` que está disponible con Control System Toolbox. El método demostrado requiere calcular en forma analítica la función de transferencia de lazo cerrado. Como mencionamos en el ejemplo 9.2, si conocemos la función de transferencia de lazo cerrado, podemos utilizar los métodos demostrados en los ejemplos 6.34 a 6.36. Otra alternativa es que podemos utilizar MATLAB sin determinar de manera explícita la función de transferencia de lazo cerrado.

Si Control System Toolbox está disponible, utilice los siguientes comandos:

```
GcGp = tf(conv(Bp,Bc),conv(Ap,Ac));
Gcl = feedback(GcGp,1);
step(Gcl);
```

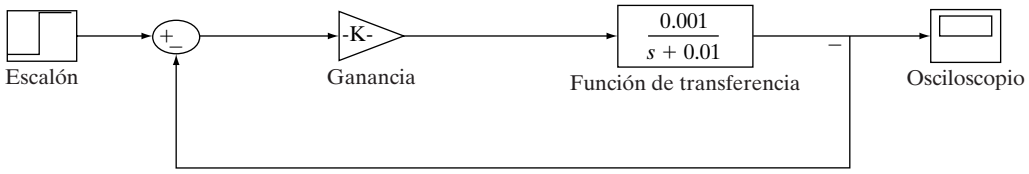



**FIGURA 9.3**
Modelo en Simulink del sistema de lazo cerrado con retroalimentación proporcional del ejemplo 9.2.

Aquí, los vectores `Bp` y `Bc` almacenan los coeficientes de los numeradores de $G_p(s)$ y $G_c(s)$, respectivamente; y `Ap` y `Ac` almacenan los coeficientes de los denominadores de $G_p(s)$ y $G_c(s)$, respectivamente.

Si cuenta con Simulink, construya el diagrama a bloques de la conexión con retroalimentación que aparece en la figura 9.3. Utilice la descripción de Simulink que dimos en el ejemplo 6.36 para construir el modelo. La unión de suma y el bloque de ganancia se encuentran en el menú "Math Operations" de la librería de Simulink. Observe que lo predeterminado para la unión de suma es tener dos entradas positivas, pero la retroalimentación negativa requiere que el término de retroalimentación sea negado. Haga doble clic en la unión de suma para establecer el signo del segundo término a negativo. La retroalimentación que muestra la figura 9.3 es para control proporcional. Para simular un control más general dado por $G_c(s)$, sustituya el bloque de ganancia por un bloque de función de transferencia. Haga un clic en "Simulation" y después en "Start" para simular el sistema. Haga doble clic en el osciloscopio para ver los resultados.

## 9.2 CONTROL DE SEGUIMIENTO

Dado un sistema con una función de transferencia $G_p(s)$, un controlador con función de transferencia $G_c(s)$, y una señal de referencia $r(t)$, considere de nuevo la configuración de control por retroalimentación que aparece en la figura 9.1b. A lo largo de esta sección supondremos que tanto el sistema como el controlador son dimensionalmente finitos, y por lo tanto $G_p(s)$ y $G_c(s)$ son funciones racionales de $s$ dadas por

$$G_p(s) = \frac{B_p(s)}{A_p(s)} \quad \text{y} \quad G_c(s) = \frac{B_c(s)}{A_c(s)} \tag{9.20}$$

donde $B_p(s)$, $A_p(s)$, $B_c(s)$ y $A_c(s)$ son polinomios en $s$ con el grado de $A_p(s)$ igual a $N$, y el grado de $A_c(s)$ igual a $q$. Así, el sistema dado tiene $N$ polos, y el controlador tiene $q$ polos.

Como explicamos en la sección 9.1, en el control de seguimiento el objetivo es diseñar la función de transferencia del controlador, $G_c(s)$, tal que el error de seguimiento $e(t) = r(t) - y(t)$ converja en cero, cuando $t \to \infty$. La solución a este problema involucra los polos de lazo cerrado; es decir, los polos del sistema de lazo cerrado. Los polos de lazo cerrado se determinan de la siguiente manera:

Primero, del diagrama a bloques de la figura 9.1b, cuando $d(t) = 0$, resulta claro que la transformada $Y(s)$ de la salida $y(t)$ está dada por

$$Y(s) = G_p(s)G_c(s)[R(s) - Y(s)] \tag{9.21}$$

donde $R(s)$ es la transformada de la entrada de referencia $r(t)$. Al resolver (9.21) para $Y(s)$ obtenemos

$$Y(s) = \frac{G_p(s)G_c(s)}{1 + G_p(s)G_c(s)}R(s) \tag{9.22}$$

Es conveniente observar que la representación de la función de transferencia de lazo cerrado (9.22) se desprende directamente de los resultados de la sección 6.6.

Con $G_{cl}(s)$ definida para que sea la función de transferencia de lazo cerrado, a partir de (9.22),

$$G_{\text{cl}}(s) = \frac{G_p(s)G_c(s)}{1 + G_p(s)G_c(s)} \tag{9.23}$$

Después, al sustituir (9.20) en (9.23) resulta en la siguiente expresión para la función de transferencia de lazo cerrado:

$$G_{\text{cl}}(s) = \frac{[B_p(s)/A_p(s)][B_c(s)/A_c(s)]}{1 + [B_p(s)/A_p(s)][B_c(s)/A_c(s)]}$$

$$G_{\text{cl}}(s) = \frac{B_p(s)B_c(s)}{A_p(s)A_c(s) + B_p(s)B_c(s)} \tag{9.24}$$

De (9.24) vemos que $p$ es un polo del sistema de lazo cerrado si y sólo si

$$A_p(p)A_c(p) + B_p(p)B_c(p) = 0$$

Por lo tanto, los polos de lazo cerrado son las raíces de la ecuación polinomial

$$A_p(s)A_c(s) + B_p(s)B_c(s) = 0 \tag{9.25}$$

Observe que el grado del polinomio (9.25) es igual a $N + q$, donde $N$ es el grado de $A_p(s)$ y $q$ es el grado de $A_c(s)$. Así, el número de polos de lazo cerrado es igual a $N + q$, que es la suma del número de polos del sistema dado y el número de polos del controlador.

---

**Ejemplo 9.3 Cálculo de la función de transferencia de lazo cerrado**

Suponga que

$$G_p(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 4s + 10}, \qquad G_c(s) = \frac{s + 1}{s(s + 10)}$$

Entonces, $G_p(s)$ y $G_c(s)$ tienen dos polos, lo que implica que el sistema de lazo cerrado tiene cuatro polos. Ahora, vemos que

$$B_p(s) = s + 2, \quad A_p(s) = s^2 + 4s + 10$$
$$B_c(s) = s + 1, \quad A_c(s) = s(s + 10)$$

y al sustituir esto en (9.24), tenemos la función de transferencia de lazo cerrado

$$G_{\text{cl}}(s) = \frac{\left(\dfrac{s+1}{s(s+10)}\right)\left(\dfrac{s+2}{s^2+4s+10}\right)}{1+\left(\dfrac{s+1}{s(s+10)}\right)\left(\dfrac{s+2}{s^2+4s+10}\right)}$$

$$G_{\text{cl}}(s) = \frac{s^2+3s+2}{s^4+14s^3+51s^2+103s+2}$$

Los polos de lazo cerrado son las raíces de la ecuación

$$s^4+14s^3+51s^2+103s+2=0$$

Si utilizamos el comando de MATLAB, `roots`, se revela que los polos de lazo cerrado son $-0.0196, -9.896, -2.042 \pm j2.477$.

---

De nuevo considere el error de seguimiento $e(t) = r(t) - y(t)$. Con $E(s)$ igual a la transformada de Laplace del error de seguimiento $e(t)$, a partir del diagrama a bloques de la figura 9.1b vemos que

$$E(s) = R(s) - Y(s) \tag{9.26}$$

Al sustituir la expresión (9.22) para $Y(s)$ en (9.26), se obtiene

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - \frac{G_p(s)G_c(s)}{1+G_p(s)G_c(s)}R(s) \\ &= \frac{1}{1+G_p(s)G_c(s)}R(s) \end{aligned} \tag{9.27}$$

Después, al sustituir (9.20) en (9.27) tenemos

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{1}{1+[B_p(s)/A_p(s)][B_c(s)/A_c(s)]}R(s) \\ &= \frac{A_p(s)A_c(s)}{A_p(s)A_c(s)+B_p(s)B_c(s)}R(s) \end{aligned} \tag{9.28}$$

A partir del análisis dado en la sección 8.3, el error de seguimiento $e(t)$ converge en cero cuando $t \to \infty$ si y sólo si todos los polos de $E(s)$ están ubicados en el semiplano izquierdo (esto también resulta directamente del teorema del valor final). De (9.28) vemos que los polos de $E(s)$ incluyen los polos de lazo cerrado, es decir, los valores de $s$ para los que

$$A_p(s)A_c(s) + B_p(s)B_c(s) = 0$$

Como resultado, una condición necesaria para $e(t) \to 0$ es que el sistema de lazo cerrado debe ser estable, y por lo tanto todos los polos de lazo cerrado deben estar ubicados en el semiplano izquierdo. Es importante resaltar que, aunque la estabilidad de los sistemas de lazo cerrado es necesaria para el seguimiento, no resulta suficiente. Otras condiciones que garantizan el seguimiento dependen de la señal de referencia $r(t)$; a continuación investigaremos esto con detalle para el caso de una entrada escalón.

### 9.2.1 Seguimiento de una referencia escalón

Suponga que la entrada de referencia $r(t)$ es igual a $r_0u(t)$, donde $r_0$ es una constante real y $u(t)$ es la función escalón unitario. Como explicamos en la sección 9.1, este caso corresponde al control del punto de ajuste, donde la constante $r_0$ es el punto de ajuste. Observe que cuando $r(t) = r_0u(t)$, la respuesta de salida resultante, $y(t)$, con condiciones iniciales igual a cero, es igual a $r_0$ veces la respuesta al escalón del sistema de lazo cerrado. Cuando $R(s) = r_0/s$, la expresión (9.28) para la transformada $E(s)$ del error de seguimiento se vuelve

$$E(s) = \frac{A_p(s)A_c(s)}{A_p(s)A_c(s) + B_p(s)B_c(s)} \frac{r_0}{s} \tag{9.29}$$

En este caso, los polos de $E(s)$ son iguales a los polos del sistema de lazo cerrado más un polo en $s = 0$. Por lo tanto, si el sistema de lazo cerrado es estable, se satisfacen las condiciones para aplicar el teorema del valor final a $E(s)$. Así, el valor límite de $e(t)$ cuando $t \to \infty$ puede calcularse mediante dicho teorema, lo que produce

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \frac{A_p(0)A_c(0)r_0}{A_p(0)A_c(0) + B_p(0)B_c(0)} \tag{9.30}$$

Con el error en estado estable $e_{ss}$ definido por

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t)$$

de (9.30) vemos que

$$e_{ss} = \frac{A_p(0)A_c(0)r_0}{A_p(0)A_c(0) + B_p(0)B_c(0)} \tag{9.31}$$

El error en estado estable $e_{ss}$ puede escribirse de la forma

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + [B_p(0)/A_p(0)][B_c(0)/A_c(0)]} r_0 \tag{9.32}$$

y, debido a que

$$G_p(0) = \frac{B_p(0)}{A_p(0)} \quad \text{y} \quad G_c(0) = \frac{B_c(0)}{A_c(0)}$$

(9.32) puede expresarse de la forma

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + G_p(0)G_c(0)} r_0 \tag{9.33}$$

A partir de (9.33) resulta claro que el error en estado estable es cero si y sólo si

$$G_p(0)G_c(0) = \infty \tag{9.34}$$

que es el caso si $G_p(s)G_c(s)$ tiene un polo en $s = 0$. Se dice que el sistema de lazo abierto definido por la función de transferencia $G_p(s)G_c(s)$ es un *sistema de tipo 1* si $G_p(s)G_c(s)$ tiene un solo polo en $s = 0$. Entonces, el sistema dado por (9.22) seguirá la entrada escalón $r_0u(t)$

si $G_p(s)G_c(s)$ es un sistema de tipo 1. Además, de los resultados de la sección 8.3 se desprende que la rapidez a la que el error $e(t)$ se aproxima a cero, depende de la ubicación de los polos de lazo cerrado en el semiplano izquierdo abierto. En particular, entre más lejos se encuentren los polos de lazo cerrado en el semiplano izquierdo, la rapidez de convergencia de $e(t)$ hacia cero será mayor. También observe que, debido a que la salida del sistema $y(t)$ es igual a $r_0 - e(t)$, la rapidez a la que $y(t)$ converge hacia el punto de ajuste $r_0$ es la misma que la rapidez a la que $e(t)$ converge a cero.

Se dice que el sistema de lazo abierto $G_p(s)G_c(s)$ es un *sistema de tipo 0* si $G_p(s)G_c(s)$ no tiene polos en $s = 0$. Esto es equivalente a requerir que $G_p(0)G_c(0) \neq \infty$. Así, si partimos del análisis anterior, resulta claro que cuando la señal de referencia $r(t)$ es una función escalón y $G_p(s)G_c(s)$ es un sistema tipo 0, el sistema de lazo cerrado (9.22) tendrá un error de seguimiento en el estado estable $e_{ss}$ diferente de cero, dado por (9.33).

Suponga que el objetivo del controlador es tener cero error de seguimiento para una referencia escalón, pero la planta original $G_p(s)$ no tiene un polo en $s = 0$. Para lograr el objetivo, el controlador debe tener un polo en $s = 0$, por lo que el producto $G_p(s)G_c(s)$ es de tipo 1. Un tipo de controlador común utilizado para lograr este objetivo es un *controlador proporcional más integral* (PI), el cual está dado por

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = \frac{K_P s + K_I}{s} \tag{9.35}$$

donde $K_P$ y $K_I$ son constantes reales. En este caso, la transformada $X(s)$ de la entrada $x(t)$ del control aplicada a la planta está dada por

$$X(s) = G_c(s)E(s) = K_p E(s) + \frac{K_I}{s}E(s) \tag{9.36}$$

La transformada inversa (9.36) arroja

$$x(t) = K_p e(t) + K_I \int_0^t e(\tau)\, d\tau \tag{9.37}$$

El primer término del lado derecho de (9.37) corresponde al control proporcional (como explicamos en la sección 9.1), mientras que el segundo término corresponde al control integral, ya que este término está dado en función de la integral del error $e(t)$. Así, el subíndice "$I$" en $K_I$ significa "integral". Con la función de transferencia del controlador (9.35), la transformada $E(s)$ del error dado por la ecuación (9.28) se vuelve

$$E(s)\frac{A_p(s)s}{A_p(s)s + B_p(s)(K_p s + K_I)}R(s)$$

Es evidente que los coeficientes del polinomio del denominador de $E(s)$ dependen de $K_P$ y $K_I$. Entonces, los polos de $E(s)$, que son los polos del sistema de lazo cerrado, pueden modificarse mediante la selección de $K_P$ y $K_I$. Por lo tanto, el objetivo del diseñador del control es seleccionar los valores para $K_P$ y $K_I$ que resulten en polos de lazo cerrado con una rapidez de convergencia a cero para el error $e(t)$ que sea aceptable o, de manera equivalente, la rapidez de convergencia de la salida $y(t)$ hacia la referencia $r_0$.

Los siguientes ejemplos ilustran estos resultados.

### Ejemplo 9.4 Control proporcional más integral

De nuevo considere el control de velocidad de un vehículo en movimiento sobre una superficie horizontal, como vimos en los ejemplos 9.1 y 9.2. El objetivo es hacer que la velocidad del vehículo, $v(t)$, converja en una velocidad deseada $v_0$ cuando $t \to \infty$. Recuerde que la función de transferencia $G_p(s)$ del modelo de velocidad del vehículo está dada por $G_p(s) = (1/M)/(s + k_f/M)$. En el ejemplo 9.2, consideramos el control proporcional, donde $G_c(s) = K_P$. En este caso

$$G_p(s)G_c(s) = \frac{K_P/M}{s + k_f/M}$$

Es claro que $G_p(s)G_c(s)$ no tiene un polo en $s = 0$, y el sistema de lazo abierto $G_p(s)G_c(s)$ es de tipo 0. Entonces, como observamos en el ejemplo 9.2, existe un error en estado estable, $e_{ss}$, en el seguimiento de la entrada escalón $v_0u(t)$. A partir de (9.33), $e_{ss}$ está dado por

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_P/k_f}v_0 = \frac{k_f v_0}{k_f + K_P}$$

Esto coincide con el resultado obtenido en el ejemplo 9.2 [vea (9.18)].

Para lograr el objetivo de error en estado estable igual a cero para una referencia escalón, utilizamos un controlador PI de la forma dada en (9.35). La transformada del error $E(s)$ surge a partir de (9.27),

$$\begin{aligned} E(s) &= \left[\frac{s(s + k_f/M)}{s(s + k_f/M) + (K_P s + K_I)(1/M)}\right]\frac{v_0}{s} \\ &= \frac{(s + k_f/M)v_0}{s^2 + (k_f/M + K_P/M)s + K_I/M} \end{aligned}$$

En este ejemplo, pueden elegirse los parámetros de diseño $K_P$ y $K_I$ para ubicar a los polos de $E(s)$ (equivalente a los polos de lazo cerrado) de manera arbitraria en el semiplano izquierdo. Entonces, podemos obtener una rapidez de convergencia a cero del error $e(t)$, es decir, que la rapidez de convergencia de $v(t)$ a $v_0$ sea tan rápida como queramos seleccionando los valores para $K_P$ y $K_I$. Para investigar esto, suponga que $k_f = 10$, $M = 1000$, y $v_0 = 60$. Entonces, la transformada $V(s)$ de la respuesta de velocidad es

$$V(s) = G_{cl}(s)\frac{v_0}{s} = \frac{G_p(s)G_c(s)}{1 + G_p(s)G_c(s)}\frac{60}{s} = \frac{0.06(K_P s + K_I)}{[s^2 + 0.01(1 + 0.1K_P)s + 0.001K_I]s}$$

Cuando $K_I = 0$, de tal forma que no hay control integral, la respuesta $v(t)$ fue calculada en el ejemplo 9.2 para tres diferentes valores de $K_P$ (vea la figura 9.2). Cuando tomamos $K_I$ lo suficientemente grande, la acción de control integral eliminará el error en estado estable que vimos en la figura 9.2. Por ejemplo, para $K_P = 500$ y $K_I = 1$, 5 y 10, las respuestas aparecen graficadas en la figura 9.4. Observe que cuando $K_I = 1$, la acción integral no es lo suficientemente robusta para llevar la velocidad hasta 60 durante el intervalo de 50 segundos en la gráfica, aunque es verdad que $v(t)$ está convergiendo en 60, en el límite cuando $t \to \infty$. Observe que para $K_I = 5$ la velocidad alcanza el valor de 60 en aproximadamente 12 segundos, y al incrementar $K_I$ a 10 obtenemos que $v(t)$ llega a 60, pero ahora la respuesta se sobrepasa. Es claro que $K_I = 5$ arroja la mejor respuesta, y hay una razón para esto; a saber, cuando $K_I = 5$, la función de transferencia del controlador $G_c(s) = (500s + 5)/s$ tiene un cero en $s = -5/500 = -0.01$, y este cero cancela el polo de $G_p(s)$ en $s = -0.01$. Esto resulta en un sistema de lazo cerrado de primer orden, con función de transferencia

$$G_{cl}(s) = \frac{\left(\frac{500s + 5}{s}\right)\left(\frac{0.001}{s + 0.01}\right)}{1 + \left(\frac{500s + 5}{s}\right)\left(\frac{0.001}{s + 0.01}\right)} = \frac{0.5}{s + 0.5}$$

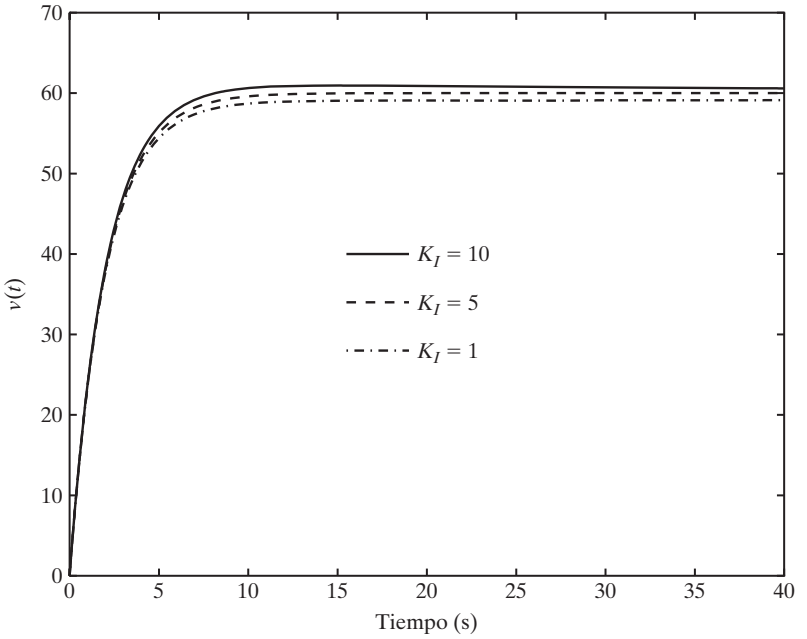



**FIGURA 9.4**
Respuestas de velocidad del ejemplo 9.4.

Por lo tanto, cuando $K_P = 500$ y $K_I = 5$, la expresión anterior para $V(s)$ se reduce a una función racional de primer orden; en otras palabras, existe una cancelación de polo-cero en la expresión para $V(s)$. Para estos valores de $K_P$ y $K_I$,

$$V(s) = G_{\text{cl}}(s)\frac{v_0}{s} = \left(\frac{0.5}{s + 0.5}\right)\frac{60}{s} = 60\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 0.5}\right)$$

Entonces, al tomar la transformada inversa de Laplace tenemos

$$v(t) = 60(1 - e^{-0.5t}), t \geq 0$$

Así, el transitorio $y_{\text{tr}}(t) = -60 \exp(-0.5t)$ es una exponencial sencilla que decae hacia cero con una constante de tiempo de $1/0.5 = 2$ segundos. Por lo tanto, la velocidad $v(t)$ converge en 60 con la rapidez de convergencia correspondiente a una constante de tiempo de 2 segundos. El punto clave aquí es que, si elegimos $G_c(s)$ de tal manera que cancele el polo en $G_p(s)$, ocasionamos que el sistema de lazo cerrado se vuelva un sistema de primer orden, el cual es más sencillo de manejar que uno de segundo orden. En la práctica es común diseñar la función de transferencia del controlador $G_c(s)$ para que cancele uno o más polos estables de la función de transferencia de la planta $G_p(s)$. En la sección 9.4 presentamos otro ejemplo sobre esto.

---

En el ejemplo 9.4, los parámetros de diseño $K_I$ y $K_P$ del controlador PI podrían elegirse para ubicar a los polos de lazo cerrado en cualquier parte del semiplano izquierdo. Esto fue cierto en el ejemplo del control del vehículo, ya que la planta era de primer orden. Cuando la planta tiene un orden mayor, los polos de lazo cerrado no pueden hacerse arbitrariamen-

te rápidos (es decir, ubicados lo más alejados a la izquierda en el plano $s$) mediante un controlador PI o un controlador proporcional, $G_c(s) = K_P$. De hecho, un controlador PI tiende a hacer lenta la respuesta, es decir, arrojar polos de lazo cerrado que se encuentren a la derecha de los polos de lazo cerrado alcanzados cuando se utiliza un controlador proporcional simple. Si el objetivo es acelerar la respuesta de lazo cerrado, incluso por encima de la alcanzable con el controlador proporcional, en general se utiliza un *controlador proporcional más derivativo*; es decir,

$$G_c(s) = K_P + K_D\, s \tag{9.38}$$

donde $K_P$ y $K_D$ son constantes. En este caso, la transformada $X(s)$ de la señal de control que se aplica a la planta está dada por

$$X(s) = G_c(s)E(s) = K_P E(s) + K_D\, sE(s) \tag{9.39}$$

Debido a que la multiplicación por $s$ en el dominio $s$ corresponde a la diferenciación en el dominio del tiempo, la transformada inversa de ambos lados de (9.39) resulta en la siguiente expresión para la señal de control $x(t)$:

$$x(t) = K_P\, e(t) + K_D \frac{de(t)}{dt} \tag{9.40}$$

El primer término del lado derecho de (9.40) corresponde al control proporcional, mientras que el segundo término corresponde al control derivativo, ya que este término está dado en términos de la derivada del error de seguimiento $e(t)$ (por lo tanto, el subíndice "$D$" en $K_D$ significa "derivativo").

---

**Ejemplo 9.5 El control proporcional frente al control derivativo**

Un problema que surge en muchas aplicaciones es el de controlar la posición de un objeto. Un ejemplo es controlar la posición angular de una válvula en algún proceso químico, o controlar la posición angular de una placa circular en alguna operación de manufactura, como una perforación o la inserción de un componente. En tales aplicaciones, un problema fundamental es controlar la posición angular del eje de un motor utilizado para manejar una estructura mecánica específica (como una válvula o una placa). Con frecuencia, el motor utilizado es un motor de cd (corriente directa) de campo controlado, el cual aparece en la figura 9.5. La carga indicada en la figura es la estructura (válvula, placa, etcétera) a la que el eje del motor se conecta. La entrada al motor es el voltaje $v_f(t)$ aplicado al circuito del campo, y la salida es el ángulo $\theta(t)$ del eje del motor. Como vimos en la sección 2.4, la torca $T(t)$ desarrollada por el motor está relacionada con el ángulo $\theta(t)$ mediante la ecuación diferencial

$$I\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + k_d\frac{d\theta(t)}{dt} = T(t) \tag{9.41}$$

donde $I$ es el momento de inercia del motor y la carga, y $k_d$ es el coeficiente de fricción viscosa del motor y la carga. En la aproximación usual de la dinámica del motor, se supone que la torca $T(t)$ está dada por

$$T(t) = k_m v_f(t) \tag{9.42}$$

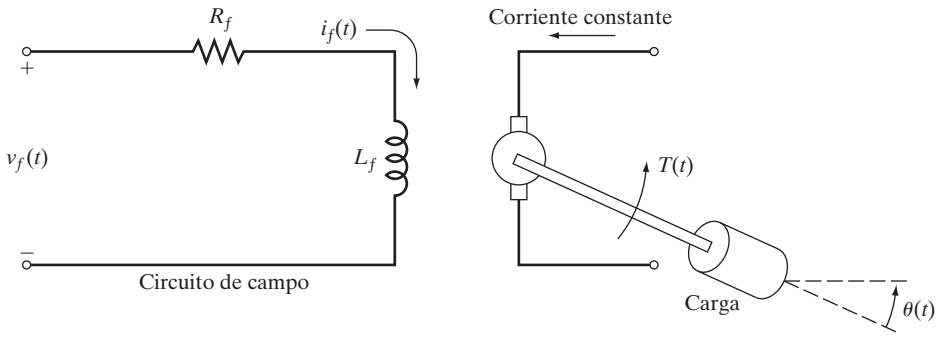



**FIGURA 9.5**
Motor de cd de campo controlado con carga.

donde $k_m$ es la constante del motor, la cual es estrictamente positiva ($k_m > 0$). Al sustituir (9.42) en (9.41) obtenemos

$$I\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + k_d\frac{d\theta(t)}{dt} = k_m v_f(t) \tag{9.43}$$

que es la ecuación diferencial de entrada y salida para el motor de cd. Al tomar la transformada de Laplace de ambos lados de (9.43) resulta en la siguiente representación de la función de transferencia para el motor de cd:

$$\Theta(s) = \frac{k_m/I}{(s + k_d/I)s}V_f(s) \tag{9.44}$$

En esta ecuación, $\Theta(s)$ es la transformada de $\theta(t)$ y $V_f(s)$ es la transformada de $v_f(t)$. En este caso, el sistema (el motor de cd con la carga) tiene un polo en $s = 0$, y por lo tanto para cualquier función de transferencia del controlador $G_c(s) = B_c(s)/A_c(s)$, el sistema de lazo abierto $G_p(s)G_c(s)$ será de tipo 1. Entonces, no es necesario que $G_c(s)$ tenga un polo en $s = 0$ para que siga una entrada escalón $r(t) = \theta_0 u(t)$, donde $\theta_0$ es la posición angular deseada del eje del motor. Al elegir la $G_c(s)$ más sencilla posible, resulta en el controlador proporcional dado por $G_c(s) = K_P$, donde $K_P$ es una constante real. En este caso, de (9.28), la transformada $E(s)$ del error de seguimiento es

$$E(s) = \left[\frac{(s + k_d/I)s}{(s + k_d/I)s + k_m K_P/I}\right]\frac{\theta_0}{s}$$

$$= \frac{(s + k_d/I)\theta_0}{s^2 + (k_d/I)s + k_m K_P/I} \tag{9.45}$$

Del análisis de estabilidad de Routh-Hurwitz se desprende que los dos polos de $E(s)$ se encuentran en el semiplano izquierdo si y sólo si $k_d/I > 0$ y $k_m K_P/I > 0$. Debido a que $k_d > 0$, $I > 0$, y $k_m > 0$, esta condición es equivalente a $K_P > 0$. Por lo tanto, para cualquier valor de $K_P > 0$, el error de seguimiento $e(t) = \theta_0 - \theta(t)$ converge en cero, lo que implica que $\theta(t) \to \theta_0$.

Aunque el error $e(t)$ converge en cero para cualquier $K_P > 0$, no podemos obtener una gran rapidez de convergencia a cero arbitraria eligiendo $K_P$. En otras palabras, no podemos co-

locar los polos de $E(s)$ arbitrariamente lejos sobre el semiplano izquierdo eligiendo $K_P$. Esto se desprende directamente de la expresión (9.45) para $E(s)$, de la que vemos que las partes reales de los dos polos de $E(s)$ no pueden ser más negativos que $-k_d/2I$. Podemos verificar esto si aplicamos la fórmula cuadrática al polinomio $s^2 + (k_d/I)s + k_mK_P/I$ del denominador de $E(s)$. Puede lograrse una rapidez de convergencia lo suficientemente grande de $e(t)$ hacia cero utilizando un controlador PD de la forma (9.38).

Con el controlador PD dado por (9.38), la transformada $E(s)$ del error de seguimiento se vuelve

$$E(s) = \left[\frac{(s + k_d/I)s}{(s + k_d/I)s + (k_m/I)(K_P + K_Ds)}\right]\frac{\theta_0}{s}$$

$$= \frac{(s + k_d/I)\theta_0}{s^2 + (k_d/I + k_mK_D/I)s + k_mK_P/I} \tag{9.46}$$

A partir de (9.46) es evidente que los coeficientes del polinomio denominador de $E(s)$ pueden elegirse de manera arbitraria seleccionando $K_P$ y $K_D$, y de este modo los polos de $E(s)$ y los polos del sistema de lazo cerrado pueden colocarse en cualquier parte del semiplano izquierdo. Por lo tanto, la rapidez de convergencia de $\theta(t)$ a $\theta_0$ puede hacerse tan rápida como se necesite si elegimos de manera adecuada los valores de $K_P$ y $K_D$. La forma de la parte transitoria de la respuesta a una entrada escalón depende de la ubicación de los polos de lazo cerrado. Para investigar esto, calcularemos la respuesta de salida $\theta(t)$ en el caso en que $I = 1, k_d = 0.1$, y $k_m = 10$. Con estos valores para los parámetros del sistema, la función de transferencia de lazo cerrado es

$$G_{\text{cl}}(s) = \frac{G_p(s)G_c(s)}{1 + G_p(s)G_c(s)}$$

$$= \frac{[10/s(s + 0.1)](K_P + K_Ds)}{1 + [10/s(s + 0.1)](K_P + K_Ds)}$$

$$= \frac{10(K_P + K_Ds)}{s^2 + (0.1 + 10K_D)s + 10K_P}$$

Al establecer

$$s^2 + (0.1 + 10K_D)s + 10K_P = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \tag{9.47}$$

resulta en la siguiente forma de $G_{cl}(s)$:

$$G_{\text{cl}}(s) = \frac{10(K_P + K_Ds)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

A excepción del cero en $s = -K_P/K_D$, $G_{\text{cl}}(s)$ tiene la misma forma que la función de transferencia de segundo orden que estudiamos en la sección 8.3. Si ignoramos el efecto del cero, aquí podemos aplicar el análisis de la sección 8.3 respecto a la respuesta al escalón del caso de segundo orden. En particular, del resultado en la sección 8.3, vimos que cuando el factor de amortiguamiento $\zeta$ se encuentra entre 0 y 1, el transitorio en la respuesta al escalón decae hacia cero a una rapidez que corresponde al factor exponencial $\exp(-\zeta\omega_n t)$ [vea (8.24)]. Al seleccionar $\zeta\omega_n = 1$, y utilizar (9.47) obtenemos

$$\zeta\omega_n = 1 = \frac{0.1 + 10K_D}{2}$$

Si resolvemos para $K_D$, obtenemos $K_D = 0.19$. Ahora, para evitar un sobretiro en la respuesta al escalón, el factor de amortiguamiento $\zeta$ no debe ser menor que $1/\sqrt{2}$. Con $\zeta = 1/\sqrt{2}$ y $\zeta\omega_n = 1$, entonces $\omega_n = \sqrt{2}$, y al utilizar (9.47) tenemos

$$10K_P = \omega_n^2 = 2$$

y así, $K_P = 0.2$. Entonces, la función de transferencia de lazo cerrado $G_{\text{cl}}(s)$ es

$$G_{\text{cl}}(s) = \frac{1.9s + 2}{s^2 + 2s + 2}$$

Con $\theta_0 = 1$, calculamos la respuesta al escalón mediante el comando `step(Gcl)` de MATLAB con

```
num = [1.9 2]; den = [1 2 2];
Gcl = tf(num,den);
```

La figura 9.6 muestra una gráfica de la respuesta. Observe que el sobretiro es bastante pronunciado. Para reducir esto, debe incrementarse el factor de amortiguamiento $\zeta$. Por ejemplo, al establecer $\zeta = 0.9$, pero manteniendo $\zeta\omega_n = 1$, resulta en los valores $K_P = 0.123$ y $K_D = 0.19$. La respuesta al escalón resultante también aparece en la figura 9.6. Observe que el sobretiro es poco, pero ahora la respuesta es más "lenta". Para conseguir una respuesta más rápida, $\zeta\omega_n$ podría hacerse más grande que 1. Invitamos al lector a intentar esto.

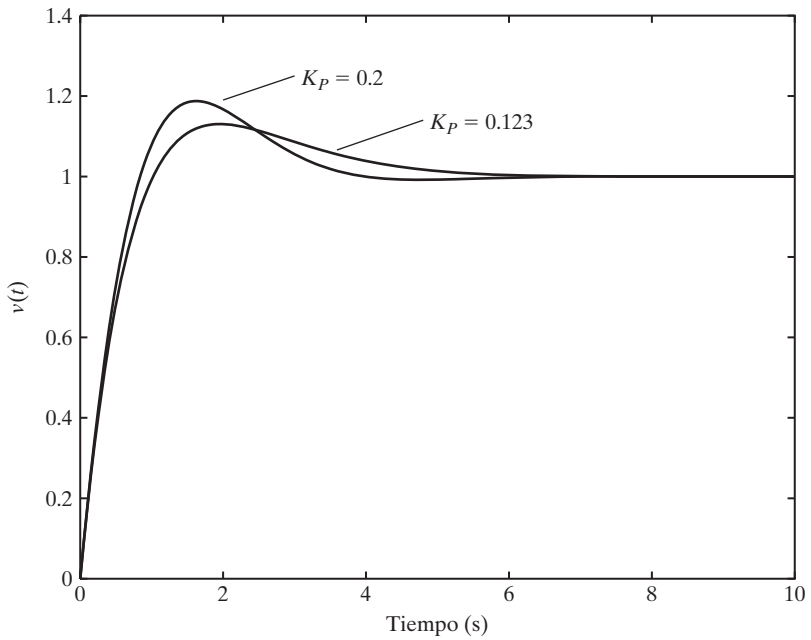



**FIGURA 9.6**
Respuesta al escalón con $K_D = 0.19$ y $K_P = 0.2$ y 0.123.

Considere la señal de control $x(t)$ dada en (9.40). Para una referencia escalón $e(t) = r_0 - y(t)$. Por lo tanto, (9.40) puede expresarse en la forma

$$x(t) = K_P e(t) - K_D \frac{dy(t)}{dt} \tag{9.48}$$

Entonces, para implementar el control (9.48), es necesario medir la derivada $dy(t)/dt$ de la salida $y(t)$. Por desgracia, con frecuencia esto no es posible en la práctica, debido a la presencia de ruido de alta frecuencia en $y(t)$. Por ejemplo, suponga que $y(t)$ contiene una componente de ruido muy pequeña, igual a $10^{-4}$ sen $10^6 t$. Cuando derivamos este término, el resultado es 100 sen $10^6 t$, el cual no es pequeño en magnitud y puede "empantanar" los términos de la señal. En la práctica, los controladores PD con frecuencia se implementan con un filtro adicional de alta frecuencia para mitigar los efectos del ruido de alta frecuencia.

## 9.3 LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES

De nuevo considere el sistema de control por retroalimentación con la representación de la función de transferencia

$$Y(s) = G_{\text{cl}}(s)R(s) \tag{9.49}$$

donde la función de transferencia de lazo cerrado $G_{\text{cl}}(s)$ está dada por

$$G_{\text{cl}}(s) = \frac{G_p(s)G_c(s)}{1 + G_p(s)G_c(s)} \tag{9.50}$$

La figura 9.7 muestra el sistema de lazo cerrado.

Aún suponemos que la función de transferencia de la planta $G_p(s)$ tiene $N$ polos, y la función de transferencia del controlador $G_c(s)$ tiene $q$ polos. Entonces, si no hay cancelaciones de polos-ceros, el producto $G_p(s)G_c(s)$ tiene $N + q$ polos, lo que es igual a los polos de la planta más los polos del controlador. Además, los ceros de $G_p(s)G_c(s)$ son iguales a los ceros de la planta más los ceros del controlador. Con los ceros de $G_p(s)G_c(s)$ denotados por $z_1, z_2, \ldots, z_r$, y los polos denotados por $p_1, p_2, \ldots, p_{N+q}$, $G_p(s)G_c(s)$ puede expresarse en la forma factorizada

$$G_p(s)G_c(s) = K\frac{(s - z_1)(s - z_2)\cdots(s - z_r)}{(s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_{N+q})} \tag{9.51}$$

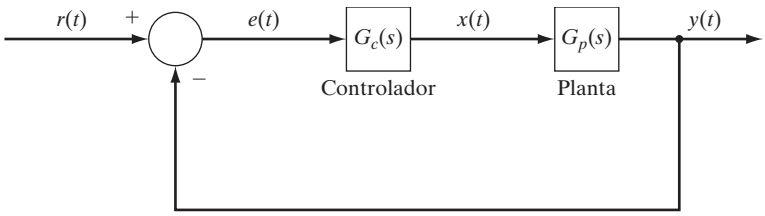



**FIGURA 9.7**
Sistema de control por retroalimentación.

En (9.51), $K$ es una constante que contiene los coeficientes importantes de los polinomios del numerador y del denominador de $G_p(s)G_c(s)$. Al sustituir (9.51) en (9.50) obtenemos la siguiente expresión para la función de transferencia de lazo cerrado:

$$G_{\text{cl}}(s) = \frac{K\dfrac{(s - z_1)(s - z_2)\cdots(s - z_r)}{(s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_{N+q})}}{1 + K\dfrac{(s - z_1)(s - z_2)\cdots(s - z_r)}{(s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_{N+q})}}$$

$$G_{\text{cl}}(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2)\cdots(s - z_r)}{(s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_{N+q}) + K(s - z_1)(s - z_2)\cdots(s - z_r)} \tag{9.52}$$

De (9.52) vemos que los polos de lazo cerrado son las $N + q$ raíces de la ecuación

$$(s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_{N+q}) + K(s - z_1)(s - z_2)\cdots(s - z_r) = 0 \tag{9.53}$$

Es evidente que los valores de los $N + q$ polos de lazo cerrado dependen del valor de la constante $K$. En particular observe que cuando $K = 0$, los polos de lazo cerrado son los mismos que los polos de $G_p(s)G_c(s)$.

Debido a que las características del error de seguimiento $e(t) = r(t) - y(t)$ dependen directamente de los valores (o ubicaciones) de los polos de lazo cerrado, en el diseño de un sistema de control por retroalimentación es más importante conocer las posibles ubicaciones de los polos que podemos obtener variando $K$. Por ejemplo, $K$ puede corresponder a un parámetro (como la ganancia) del controlador que puede elegir el diseñador, en cuyo caso la pregunta que surge es si existe o no un valor de $K$ que resulte en "buenas" ubicaciones de los polos. Para responder esto, primero es necesario determinar todas las ubicaciones de los polos de lazo cerrado conforme $K$ se modifica sobre cierto intervalo de valores. Esto nos lleva al "lugar geométrico de las raíces a 180°" (o el "lugar geométrico de las raíces para $K > 0$"), que es la gráfica en el plano complejo de los $N + q$ polos de lazo cerrado, cuando $K$ varía de 0 a $\infty$. Debido a que sólo consideraremos el caso $K > 0$, nos referiremos al lugar geométrico de las raíces a 180° o lugar geométrico de las raíces para $K > 0$ como lugar geométrico de las raíces. En la construcción del lugar geométrico de las raíces, a la constante $K$ se le conoce como *ganancia del lugar geométrico de las raíces*.

Debido a que existen $N + q$ polos de lazo cerrado, el lugar geométrico de las raíces tiene $N + q$ ramificaciones, donde cada ramificación corresponde al movimiento de un polo de lazo cerrado sobre el plano complejo, cuando $K$ varía de 0 a $\infty$. Debido a que los polos de lazo cerrado son los polos de $G_p(s)G_c(s)$ cuando $K = 0$, el lugar geométrico de las raíces comienza (cuando $K = 0$) en los polos de $G_p(s)G_c(s)$. Cuando $K$ se incrementa desde cero, las ramificaciones del lugar geométrico de las raíces parten de los polos de $G_p(s)G_c(s)$, una ramificación por polo. Cuando $K$ se aproxima a $\infty$, $r$ de las ramificaciones se mueven hacia los $r$ ceros de $G_p(s)G_c(s)$ una ramificación por cero, y las otras $N + q - r$ ramificaciones se aproximan a $\infty$.

Un número $p$ real o complejo se encuentra en el lugar geométrico de las raíces si y sólo si $p$ es una raíz de (9.53) para algún valor de $K > 0$. Es decir, $p$ se encuentra en el lugar geométrico de las raíces si y sólo si para alguna $K > 0$,

$$(p - p_1)(p - p_2)\cdots(p - p_{N+q}) + K(p - z_1)(p - z_2)\cdots(p - z_r) = 0 \tag{9.54}$$

Al dividir ambos lados de (9.54) entre $(p - p_1)(p - p_2) \ldots (p - p_{N+q})$ obtenemos

$$1 + K\frac{(p - z_1)(p - z_2)\cdots(p - z_r)}{(p - p_1)(p - p_2)\cdots(p - p_{N+q})} = 0 \tag{9.55}$$

Al dividir ambos lados de (9.55) entre $K$, y reacomodando los términos obtenemos

$$\frac{(p - z_1)(p - z_2)\cdots(p - z_r)}{(p - p_1)(p - p_2)\cdots(p - p_{N+q})} = -\frac{1}{K} \tag{9.56}$$

Entonces, $p$ se encuentra en el lugar geométrico de las raíces si y sólo si (9.56) es satisfecha por alguna $K > 0$.

Ahora, si $P(s)$ se define como

$$P(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2)\cdots(s - z_r)}{(s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_{N+q})} \tag{9.57}$$

entonces $KP(s) = G_p(s)G_c(s)$, y en términos de $P$, (9.56) se vuelve

$$P(p) = -\frac{1}{K} \tag{9.58}$$

Entonces, $p$ se encuentra en el lugar geométrico de las raíces si y sólo si (9.58) es satisfecha por alguna $K > 0$. Debido a que $P(p)$ es en general un número complejo, (9.58) es equivalente a las siguientes dos condiciones:

$$|P(p)| = \frac{1}{K} \tag{9.59}$$

$$\angle P(p) = \pm 180^\circ \tag{9.60}$$

A la condición (9.59) se le conoce como *criterio de magnitud*, y a la condición (9.60) como *criterio del ángulo*. Cualquier número real o complejo $p$ que satisfaga el criterio del ángulo (9.60) se encuentra en el lugar geométrico de las raíces; es decir, si (9.60) es satisfecha, entonces (9.59) también es satisfecha si

$$K = \frac{1}{|P(p)|} \tag{9.61}$$

En otras palabras, para el valor de $K$ dado por (9.61), $p$ se encuentra en el lugar geométrico de las raíces. Este resultado muestra que el lugar geométrico de las raíces consiste en todos los números $p$, reales o complejos, tales que el criterio del ángulo (9.60) se satisfaga. El siguiente ejemplo ilustra el uso del criterio del ángulo.

---

Lugar geométrico de las raíces interactivo

### Ejemplo 9.6 Lugar geométrico de las raíces para un sistema de primer orden

Considere el sistema de lazo cerrado con una planta igual al vehículo con el modelo de velocidad dado por $G_p(s) = 0.001/(s + 0.01)$, y con el controlador proporcional dado por $G_c(s) = K_P$. Entonces,

$$G_p(s)G_c(s) = \frac{0.001K_P}{s + 0.01} = K\frac{1}{s + 0.01} \tag{9.62}$$

donde $K = 0.001K_P$. En este caso, $G_p(s)G_c(s)$ no tiene ceros y tiene un polo en $s = -0.01$, y así $N + q = 1$ y $r = 0$. Por lo tanto, el lugar geométrico de las raíces tiene una ramificación que comienza (cuando $K = 0$) en $s = -0.01$, y continúa hacia $\infty$, cuando $K \to \infty$. De (9.62), $P(s)$ es

$$P(s) = \frac{1}{s + 0.01}$$

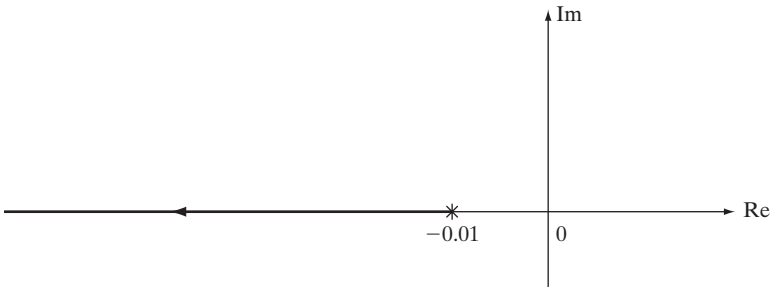



**FIGURA 9.8**
Lugar geométrico de las raíces del ejemplo 9.6.

y entonces

$$\angle P(p) = -\angle(p + 0.01)$$

Entonces $\angle P(p) = \pm 180°$ si y sólo si $p$ es un número real negativo con $p < -0.01$. Así, el lugar geométrico de las raíces consiste en todos los números reales negativos $p$, tales que $p < -0.01$. La figura 9.8 muestra la gráfica del lugar geométrico de las raíces. La flecha de la figura 9.8 muestra la dirección del movimiento del polo de lazo cerrado, cuando $K \to \infty$. Observe que en este caso el polo de lazo cerrado se dirige a $\infty$ "moviéndose hacia afuera" sobre el eje real negativo del plano complejo.

Dado un número real negativo $p < -0.01$, de (9.61) el valor de $K$ para el que $p$ se encuentra en el lugar geométrico de las raíces es

$$K = \frac{1}{|1/(p + 0.01)|} = |p + 0.01|$$

Por ejemplo, para que el polo de lazo cerrado sea $p = -0.2$, el valor de la ganancia del lugar geométrico de las raíces $K$ es

$$K = |-0.2 + 0.01| = 0.19$$

Entonces, ya que $K = 0.001K_P$ [vea (9.62)], la ganancia $K_P$ del controlador proporcional debe ser

$$K_P = \frac{0.19}{0.001} = 190$$

Éste es el valor de $K_P$ que coloca al polo de lazo cerrado en $s = -0.2$. Invitamos al lector a verificar este resultado calculando la función de transferencia de lazo cerrado con $G_c(s) = 190$.

### 9.3.1 Construcción del lugar geométrico de las raíces

De nuevo considere el sistema de control por retroalimentación de la figura 9.7, con $G_p(s)G_c(s)$ expresada en la forma factorizada (9.51), y con $P(s)$ definida por (9.57) de tal forma que $KP(s) = G_p(s)G_c(s)$. Observe que los ceros (polos, respectivamente) de $P(s)$ son los mismos que los ceros (polos, respectivamente) de $G_p(s)G_c(s)$. Los polos de lazo cerrado son las raíces de la ecuación (9.53), donde las $z_i$ son los ceros de $P(s)$ y las $p_i$ son los polos de $P(s)$. Puede generarse un esquema del lugar geométrico de las raíces para $K > 0$ mediante el cálculo numérico de los polos de la función de transferencia de lazo cerrado para valores específicos de $K$.

### Ejemplo 9.7 Lugar geométrico de las raíces para sistemas de segundo orden

Lugar geométrico de las raíces interactivo

Considere el motor de cd con la función de transferencia $G_p(s) = 10/(s + 0.1)s$, y con el controlador proporcional $G_c(s) = K_P$. Entonces,

$$G_p(s)G_c(s) = \frac{10K_P}{(s + 0.1)s} = K\frac{1}{(s + 0.1)s}$$

y por lo tanto

$$K = 10K_P \quad \text{y} \quad P(s) = \frac{1}{(s + 0.1)s}$$

Debido a que $P(s)$ tiene dos polos en $p_1 = 0$ y $p_2 = -0.1$, existen dos polos de lazo cerrado, y el lugar geométrico de las raíces tiene dos ramificaciones, que comienzan en $s = 0$ y $s = -0.1$. La función de transferencia de lazo cerrado se calcula para que sea

$$G_{\text{cl}}(s) = \frac{KP(s)}{1 + KP(s)}$$

$$= \frac{K/s(s + 0.1)}{1 + K/s(s + 0.1)}$$

$$= K\frac{1}{s^2 + 0.1s + K}$$

Los polos de lazo cerrado están dados por las raíces de

$$s^2 + 0.1s + K = 0 \tag{9.63}$$

Podemos obtener de manera numérica el lugar geométrico de las raíces si sustituimos los valores específicos de $K$ en (9.63) y encontramos las raíces de la ecuación resultante. En este caso podemos utilizar la fórmula cuadrática para encontrar las raíces:

$$s = -0.05 \pm 0.5\sqrt{0.01 - 4K}$$

Para $K = 0$, los polos de lazo cerrado se encuentran en $p_1 = 0$ y $p_2 = -0.1$, como esperábamos. Podemos escribir un programa de cómputo para calcular las raíces de la ecuación (9.63), que inicie en $K = 0$ y la incremente en pequeñas cantidades, hasta un límite superior especificado. En este ejemplo en particular, es obvio que para $0 < K < 0.0025$, los polos de lazo cerrado son reales y negativos; para $K = 0.0025$, los polos son reales e iguales. Por último, para $K > 0.0025$, los polos son complejos y se ubican en $p, \overline{p} = -0.05 \pm j0.5\sqrt{4K - 0.01}$. La figura 9.9 muestra una gráfica del lugar geométrico resultante.

El archivo M `rlocus` del Control System Toolbox de MATLAB calcula y grafica el lugar geométrico de las raíces, dado el numerador y el denominador de $P(s)$. Los comandos para generar esta gráfica están dados por

```
num = 1; den  = [1 0.1 0];
P = tf(num,den);
rlocus(P)
```

donde `num` contiene los coeficientes del numerador de $P(s)$ y `den` contiene los coeficientes del denominador de $P(s)$. En el sitio Web de este libro está disponible una versión de este comando, llamado `rootlocus`, que funciona con la versión para el estudiante de MATLAB. Los comandos correspondientes son

```
num = 1; den  = [1 0.1 0];
rootlocus(num,den)
```

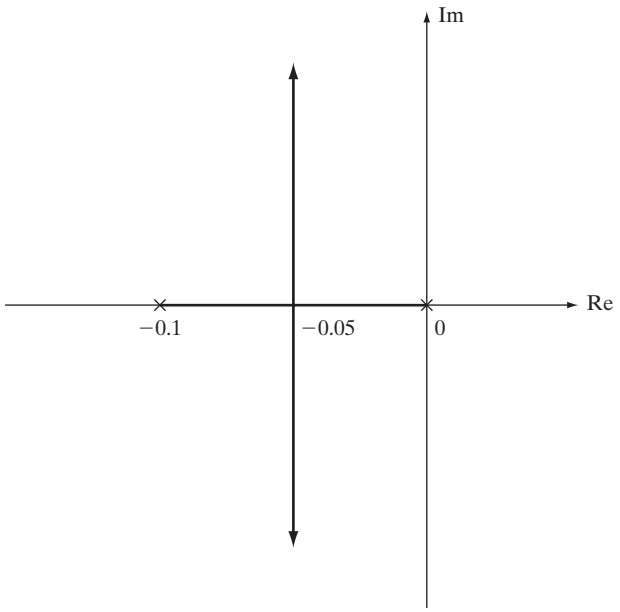



**FIGURA 9.9**
Lugar geométrico de las raíces correspondiente al ejemplo 9.7.

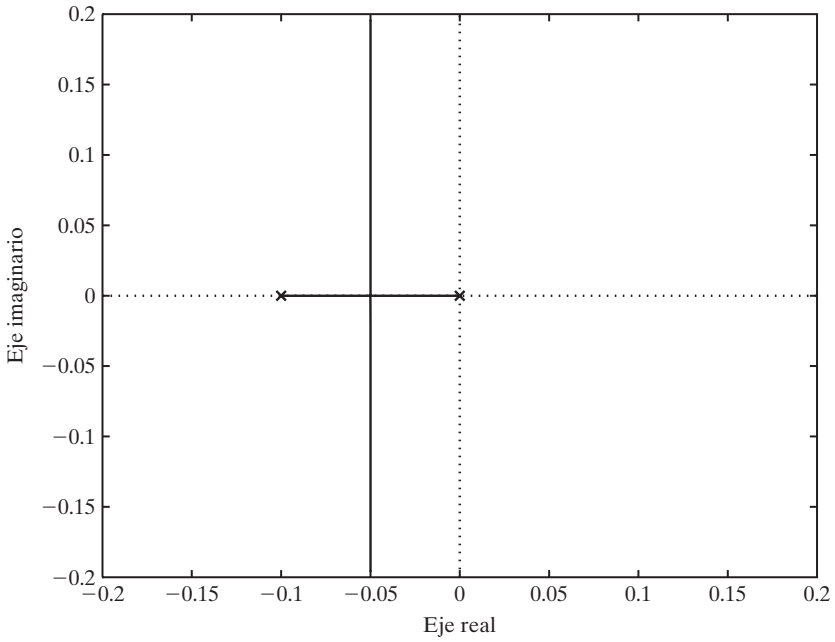



**FIGURA 9.10**
Gráfica de MATLAB del lugar geométrico de las raíces correspondiente al ejemplo 9.7.

La gráfica resultante aparece en la figura 9.10. Ambos comandos del lugar geométrico de las raíces generan de manera automática los valores de $K$ que arrojarán una buena gráfica. Para personalizar la gráfica, podemos calcular el lugar geométrico de las raíces para ganancias especificadas en un vector $K$:

```
num = 1; den  = [1 0.1 0];
P = tf(num,den);
K = 0:.0005:.04;
p = rlocus(P,K);
plot(p)
```

---

### Ejemplo 9.8 Lugar geométrico de las raíces para un sistema de segundo orden con un cero

Lugar geométrico de las raíces interactivo

Ahora, suponga que

$$G_p(s) = \frac{2}{(s-1)(s^2+2s+5)} \quad \text{y} \quad G_c(s) = A(s+3)$$

donde $A$ es una constante real (una ganancia en el controlador). Entonces,

$$G_p(s)G_c(s) = \frac{2A(s+3)}{(s-1)(s^2+2s+5)} = K\frac{s+3}{(s-1)(s^2+2s+5)}$$

y por lo tanto,

$$K = 2A \quad \text{y} \quad P(s) = \frac{s+3}{(s-1)(s^2+2s+5)} = \frac{s+3}{s^3+s^2+3s-5}$$

En este caso, $P(s)$ tiene tres polos en $p_1 = -1 + j2, p_2 = -1 - j2$, y $p_3 = 1$, y $P(s)$ tiene un cero en $z_1 = -3$. Por lo tanto, el lugar geométrico de las raíces tiene tres ramificaciones que comienzan en $-1 \pm j2$ y 1 (cuando $K = 0$ o $A = 0$). Mediante el comando `rlocus` de MATLAB podemos generar un esquema preciso del lugar geométrico de las raíces. En este ejemplo, los siguientes comandos calculan el lugar geométrico de las raíces y después generan una gráfica:

```
num = [1 3]; den  = [1 1 3 -5];
P = tf(num,den);
rlocus(P);
```

El lugar geométrico resultante aparece en la figura 9.11. Las ramificaciones que inician en los polos $-1 \pm j2$ van hacia infinito cuando $K \to \infty$, mientras que la ramificación que inicia en $p_3 = 1$ va hacia cero en $z_1 = -3$, cuando $K \to \infty$.

El lugar geométrico de las raíces que aparece en la figura 9.11 puede utilizarse para determinar el intervalo de valores de $K$ (o $A$), tal que el sistema de lazo cerrado sea estable, es decir, el intervalo de valores de $K$ para el que los tres polos de lazo cerrado se encuentren en el semiplano izquierdo. Primero, observe que debido a que una de las ramificaciones inicia en 1 cuando $K = 0$ y se mueve hacia el origen, el sistema de lazo cerrado no es estable para $0 < K \leq c$, donde $c$ es el valor de $K$ para el que existe un polo de lazo cerrado en $s = 0$. La constante $c$ puede determinarse mediante el criterio de magnitud (9.61), lo que arroja

$$c = \frac{1}{|P(0)|} = \left|\frac{-5}{3}\right| = \frac{5}{3}$$

A partir del lugar geométrico de las raíces de la figura 9.11, también es evidente que el sistema de lazo cerrado no es estable para $K > b$, donde $b$ es el valor de $K$ para el que los dos polos com-

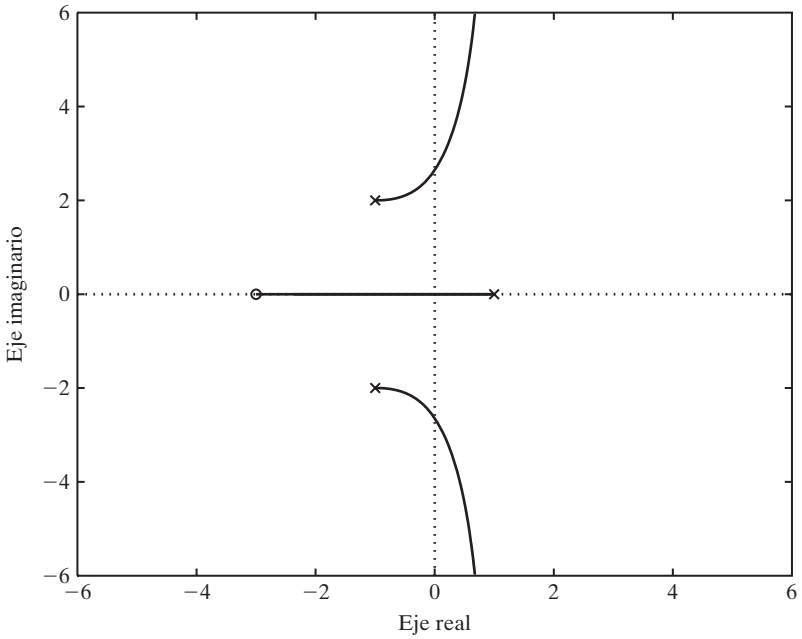



**FIGURA 9.11**
Gráfica de MATLAB del lugar geométrico de las raíces.

plejos son iguales a $\pm j\omega_c$, donde $\pm j\omega_c$ son los puntos sobre el eje imaginario, donde las dos ramificaciones cruzan hacia el semiplano derecho. En la figura 9.11 vemos que un valor aproximado de $\omega_c$ es 2.6. Entonces,

$$b = \frac{1}{|P(j2.6)|} = \left|\frac{-j17.576 - 6.76 + j7.8 - 5}{j2.6 + 3}\right| = \sqrt{\frac{(11.76)^2 + (9.776)^2}{(2.6)^2 + 9}} = 3.85$$

Entonces, un intervalo aproximado para la estabilidad es $\frac{5}{3} < K < 3.85$; debido a que $K = 2A$, el intervalo sobre $A$ es $\frac{5}{6} < A < 1.925$. Podemos determinar el intervalo exacto de $K$ o $A$ para asegurar la estabilidad si calculamos el valor exacto de $K$ para el cual los dos polos complejos se encuentran en el eje imaginario. Podemos hacer esto mediante el análisis de Routh-Hurwitz de la siguiente manera. Primero, la función de transferencia de lazo cerrado es

$$\begin{aligned} G_{\text{cl}}(s) &= \frac{KP(s)}{1 + KP(s)} \\ &= \frac{K(s + 3)}{s^3 + s^2 + (K + 3)s + (3K - 5)} \end{aligned}$$

y por lo tanto, el arreglo Routh es

| | | |
|---|---|---|
| $s^3$ | 1 | $K + 3$ |
| $s^2$ | 1 | $3K - 5$ |
| $s^1$ | $\dfrac{(K + 3) - (3K - 5)}{1}$ | |
| $s^0$ | $3K - 5$ | |

A partir de los resultados de la sección 8.2, vemos que existen dos polos en el eje $j\omega$ cuando el término en la primera columna del arreglo Routh indexado como $s^1$ es cero. Entonces,

$$K + 3 - (3K - 5) = 0$$

lo que arroja $K = 4$. Por lo tanto, el intervalo para estabilidad es $\frac{5}{3} < K < 4$, o en términos de $\frac{5}{6} < A < 2$.

---

Un medio alterno para esquematizar el lugar geométrico de las raíces utiliza reglas de construcción gráfica, que se derivan de los criterios de ángulo y magnitud (9.59) y (9.60). El método gráfico proporciona una idea sobre el efecto de las ubicaciones del polo y el cero sobre la forma del lugar geométrico de las raíces. Tal idea es valiosa para el diseño de control; sin embargo, en este libro sólo cubriremos una introducción al control que aplica el método del lugar geométrico de las raíces. Para mayor información sobre las reglas de construcción gráfica y su uso en el diseño de control, vea Phillips y Harbor [2000].

## 9.4 APLICACIÓN AL DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL

En esta sección aplicamos la construcción del lugar geométrico de las raíces al problema de diseñar la función de transferencia del controlador $G_c(s)$, para lograr el rendimiento deseado en el seguimiento de una señal de referencia específica $r(t)$. En la práctica, el rendimiento generalmente se especifica en términos de la precisión, velocidad de respuesta, y estabilidad relativa. Una medida de precisión es el error en estado estable. Si la referencia $r(t)$ es una función escalón (el caso del control de punto de ajuste), los resultados de la sección 9.2 muestran que el error en estado estable será cero si el sistema de lazo abierto $G_p(s)G_c(s)$ es de tipo 1. Como vimos antes, si la función de transferencia de la planta $G_p(s)$ no tiene un polo en $s = 0$, la función de transferencia del controlador $G_c(s)$ debe tener un polo en cero para tener un sistema de tipo 1. Entonces, en el caso del control de punto de ajuste, el mejor rendimiento posible en estado estable (es decir, error en estado estable igual a cero) se obtiene fácilmente si se incluye (si fuera necesario) un polo en cero en $G_c(s)$.

Las mediciones de la velocidad de respuesta se definen a partir de la respuesta al escalón de un sistema estable. Como explicamos en la sección 8.3, una medida de la velocidad de respuesta es la constante de tiempo $\tau$, que puede calcularse como $-1/\text{Re}(p)$, donde $p$ es el polo dominante. Otra medida es el *tiempo de establecimiento*, que es el tiempo que le lleva a una respuesta alcanzar y permanecer dentro del 5% de la banda del valor en el estado estable. Una aproximación común para el tiempo de colocación es $3\tau$. Tanto el tiempo de colocación como la constante de tiempo se vuelven más pequeños conforme el polo dominante se mueve más hacia la izquierda del plano $s$, es decir, conforme la parte real del polo se vuelve más grande en magnitud y más negativa.

La estabilidad relativa se refiere a la robustez del control, en esencia, cuánto error de modelado se tolera antes de que el sistema de lazo cerrado se vuelva inestable. El sistema se vuelve inestable cuando los errores de modelado ocasionan un desplazamiento en la ubicación de los polos cerrados, del semiplano izquierdo hacia el eje $j\omega$ o hacia el plano derecho. Conforme los polos complejos de segundo orden de un sistema se mueven más cerca del eje $j\omega$, la respuesta del sistema se vuelve más oscilatoria. Esto se aprecia en el ejemplo 8.11, donde vemos que entre más pequeño es el valor de $\zeta$, más pronunciada será la oscilación. Una medida específica de la estabilidad relativa es el *porcentaje de sobretiro* (P.O., por sus siglas en inglés), que se define como

$$\text{P.O.} = \frac{M_p - y_{ss}}{y_{ss}} \times 100\%$$

donde $M_p$ es el valor pico de la respuesta $y(t)$, y $y_{ss}$ es el valor en el estado estable. Podemos calcular en forma analítica el valor pico si tomamos la derivada de la expresión para $y(t)$ y la igualamos a cero para encontrar el tiempo $t_p$, al que ocurre el pico en $y(t)$. Entonces, $M_p = y(t_p)$. Para un sistema de segundo orden con la función de transferencia dada en (8.23), es decir, sin ceros y polos iguales a $-\zeta\omega_n \pm j\omega_d$, la respuesta al escalón está dada en (8.24). Si seguimos el procedimiento anterior para encontrar $t_p = \pi/\omega_d$, resulta en la siguiente aproximación para P.O.:

$$\text{P.O.} = \exp\left(-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \times 100 \tag{9.64}$$

Así, un requerimiento específico sobre P.O., tal que P.O. $< 10\%$, puede trasladarse a una especificación de $\zeta$. La aproximación (9.64) con frecuencia se generaliza a sistemas de segundo orden con ceros, y a sistemas de orden más alto con polos dominantes de segundo orden. En general, $\zeta$ se elige de tal forma que $\zeta \geq 0.4$, lo que arroja P.O. $\leq 25.5\%$.

En resumen, la velocidad de respuesta y la estabilidad relativa pueden relacionarse con posiciones de polos de lazo cerrado. Más aún, las especificaciones sobre la constante de tiempo o el tiempo de establecimiento, y sobre el P.O., pueden utilizarse para determinar la región del plano complejo en el que deben encontrarse los polos dominantes de lazo cerrado. El lugar geométrico de las raíces puede entonces graficarse para determinar si existe algún valor de $K$, tal que un polo de lazo cerrado se encuentre en la región aceptable del plano complejo. En general, este procedimiento se realiza primero con un controlador proporcional, $G_c(s) = K_P$, ya que es un controlador fácil de diseñar e implementar. Si una ramificación dominante del lugar geométrico de las raíces no se encuentra en la región deseada del plano complejo, se utiliza un controlador más complejo $G_c(s)$ para reformar el lugar geométrico de las raíces.

---

### Ejemplo 9.9 Diseño de un controlador proporcional

Diseñaremos un controlador para el motor de cd que consideramos en el ejemplo 9.7, donde

$$G_p(s) = \frac{10}{(s + 0.1)s}$$

Las especificaciones para el sistema de lazo cerrado son que la constante de tiempo $\tau$ sea menor o igual que 25 segundos, y que el factor de amortiguamiento $\zeta$ sea mayor o igual que 0.4. Ya que $\tau \approx -1/\text{Re}(p)$ y $\tau \leq 25$, $\text{Re}(p) \leq -0.04$. También recuerde que el factor de amortiguamiento está definido por $\zeta = \cos\theta$, donde $\theta$ es el ángulo de la posición del polo, medida respecto al eje real negativo. Estas especificaciones pueden transferirse al plano complejo como muestra la figura 9.12. Cualquier polo de lazo cerrado que se encuentre en la región sombreada es aceptable. Después, examine un controlador proporcional, $G_c(s) = K_P$. Sea $K = 10K_P$ y $P(s) = 1/(s + 0.1)s$. El lugar geométrico de las raíces para el motor de cd con un controlador proporcional aparece en la figura 9.9, y se volvió a trazar en la figura 9.13 junto con las especificaciones. El polo designado como $p_L$ en la figura 9.13 marca el punto en el que el lugar geométrico de las raíces entra en la región deseada. El polo designado como $p_H$ marca el punto en el que el lugar geométrico de las raíces sale de la región deseada. Los valores de ganancia $K$, que arrojan polos de lazo cerrado en $p_L$ y $p_H$, especifican el intervalo de valores de $K$ con los que se satisfacen las especificaciones. Para encontrar la ganancia $K_L$ que arroja un polo de lazo cerrado en $p_L$, utilice el criterio de magnitud dado en (9.61) para $p = p_L$, donde $p_L = -0.04$ se obtiene de la gráfica

$$K_L = |(p + 0.1)p|_{p=-0.04} = 0.0024$$

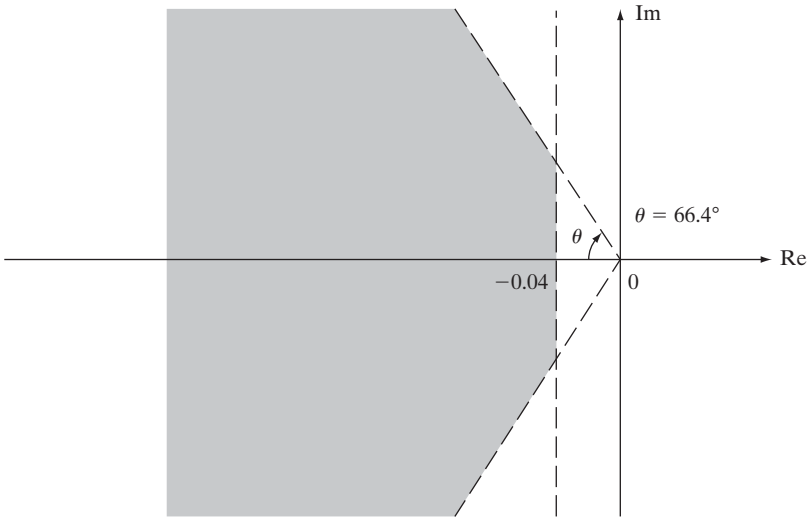



**FIGURA 9.12**
Plano complejo que muestra la región aceptable para la posición de los polos.

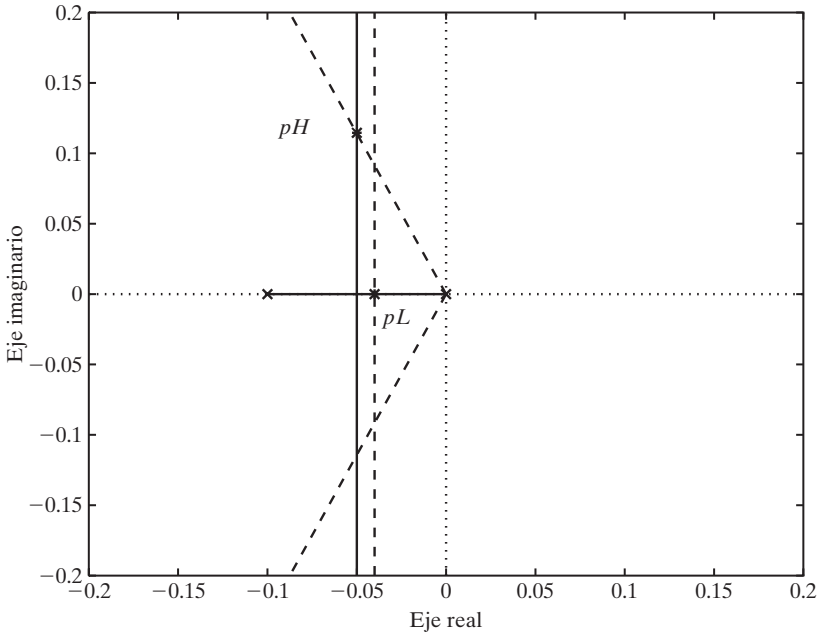



**FIGURA 9.13**
Lugar geométrico de las raíces correspondiente al ejemplo 9.9 y región aceptable para la posición de los polos.

Repita el procedimiento para encontrar la ganancia $K_H$ que arroje un polo de lazo cerrado en $p_H$. Al utilizar el criterio de magnitud sobre $p_H = -0.05 + j0.114$ obtenemos $K_H = 0.0156$. Debido a que la gráfica del lugar geométrico de las raíces es continua respecto a $K$, el intervalo de $K$ que satisface las especificaciones es $0.0024 \leq K \leq 0.0156$ o $0.00024 \leq K_P \leq 0.00156$.

La respuesta al escalón del sistema de lazo cerrado para $K = 0.0024$ se obtiene mediante los siguientes comandos de MATLAB:

```
K = 0.0024;
num = K; den = [1 .1 0];
P = tf(num,den);
Gcl = feedback(P,1);
step(Gcl)
```

El comando `feedback` calcula la función de transferencia de lazo cerrado a partir de $P(s)$. De manera alterna, también podemos utilizar Simulink para simular la respuesta, como vimos en la sección 9.2. Las respuestas al escalón resultantes para $K = K_L$ y $K = K_H$ aparecen en la figura 9.14. Observe que la respuesta transitoria para $K = K_L$ decae más lentamente que lo esperado para un sistema con una constante de tiempo de $\tau = 25$ segundos. Esto se debe a que los polos para $K = K_L$ están cerca uno del otro, un polo en $s = -0.04$ y el otro en $s = -0.06$.

En la aproximación $\tau \approx -1/\text{Re}(p)$, se supone que $p$ es el polo dominante y que el resto de los polos del sistema están muy a la izquierda, por lo que su efecto es despreciable. La respuesta transitoria resultante parece una exponencial pura con una tasa de decaimiento $\text{Re}(p)$. Cuando los polos están cercanos, como en este ejemplo, la respuesta transitoria resultante no es ni cercanamente exponencial, por lo que la aproximación $\tau \approx 1/0.04$ no es muy precisa. Con frecuencia se

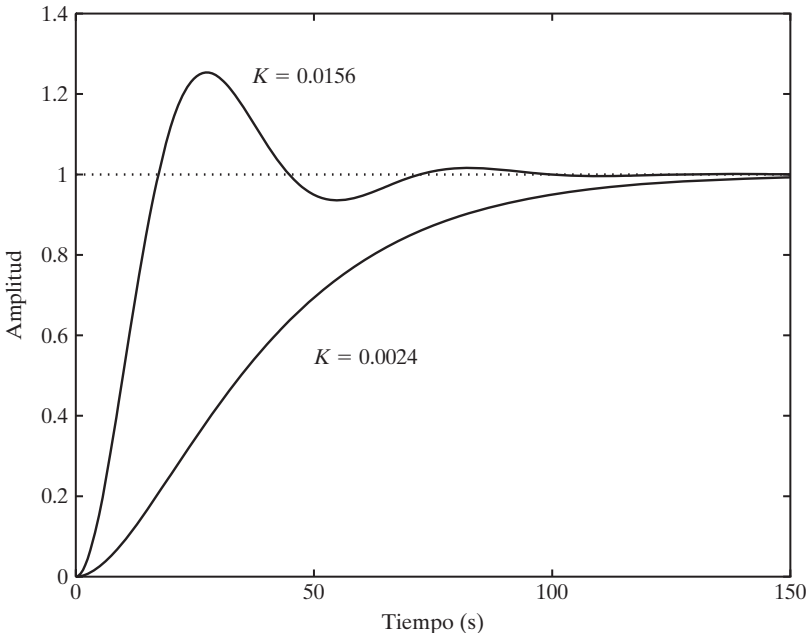



**FIGURA 9.14**
Respuestas al escalón para el sistema de lazo cerrado con control proporcional para $K = 0.0024$ y $K = 0.0156$.

utilizan aproximaciones como la de la constante de tiempo para obtener un diseño de control inicial que proporciona una respuesta de tiempo razonable, y después se utiliza la iteración para afinar los resultados. Invitamos al lector a investigar las respuestas al escalón para otros valores de $K$ entre $K_L$ y $K_H$.

Suponga que las especificaciones se modificaron tal que $\tau \leq 10$ segundos y $\zeta \geq 0.4$. Esto requiere que la parte real del polo dominante deba encontrarse a la izquierda de $-0.1$. Al examinar el lugar geométrico de las raíces con un controlador proporcional, vemos que no existe ganancia alguna como para que la ramificación dominante se encuentre a la izquierda de $-0.1$. Entonces, un controlador proporcional no puede satisfacer las especificaciones. En este caso, debemos elegir un controlador más complejo, como veremos a continuación.

---

Con frecuencia se da el caso de que un controlador proporcional no puede satisfacer las especificaciones. Debido a que el lugar geométrico de las raíces está definido por los polos y ceros de la función de transferencia $G_p(s)G_c(s)$, agregar ceros y polos a $G_c(s)$ modificará la forma del lugar geométrico. Una parte importante del diseño de control es determinar dónde colocar los polos y ceros del controlador para obtener la respuesta deseada. Una consideración adicional para el diseño de control es satisfacer las especificaciones en errores en el estado estable. La explicación aquí para los controladores PD, PI, y PID es limitada. A continuación analizaremos el efecto de cada uno de estos controladores sobre el lugar geométrico de las raíces.

Considere el controlador PD que presentamos en el ejemplo 9.5 y que está dado por

$$\begin{aligned} G_c(s) &= K_P + K_D s \\ &= K_D\left(s + \frac{K_P}{K_D}\right) \end{aligned}$$

Este tipo de controlador contribuye con un cero a la función racional $P(s)$. Al agregar este cero se tiende a atraer el lugar geométrico de las raíces hacia la izquierda, cuando se compara con un lugar geométrico con ganancia proporcional. Por lo tanto, el controlador PD se utiliza en general para acelerar la respuesta transitoria de un sistema sobre la respuesta que puede obtenerse con un controlador proporcional.

Existen dos parámetros de diseño para un controlador PD, $K_D$ y $K_P$. La relación $-K_P/K_D$ define la ubicación del cero del controlador. Un método práctico es elegir la ubicación del cero para que esté en el semiplano izquierdo y a la izquierda del polo que se encuentra más hacia la derecha. En algunos casos, puede elegirse el cero para cancelar un polo real estable, por lo general, el segundo polo de la derecha. Una vez que se ha determinado la ubicación del cero, puede utilizarse el método regular para diseñar el lugar geométrico de las raíces, que ilustramos en el ejemplo 9.9, para seleccionar $K_D$.

---

### Ejemplo 9.10 Diseño de un controlador PD

Considere el motor de cd de los ejemplos 9.5, 9.7 y 9.9. Ahora elija $G_c(s)$ como un controlador PD y sea $z = -K_P/K_D$. Entonces,

$$G_p(s)G_c(s) = \frac{10K_D(s - z)}{(s + 0.1)s} = K\frac{s - z}{(s + 0.1)s}$$

y por lo tanto,

$$K = 10K_D \quad \text{y} \quad P(s) = \frac{s - z}{(s + 0.1)s}$$

Considere cuatro diferentes valores para $z$: $= -0.05, -0.1, -0.2$ y $-1$. El lugar geométrico de las raíces para $z = -0.05$ se obtiene con los comandos de MATLAB

```
num = [1 0.05]; den = [1 .1 0];
P = tf(num,den);
rlocus(P)
```

Utilice `rootlocus` de la versión para el estudiante de MATLAB; `rootlocus` se encuentra en el sitio Web del libro. Los lugares geométricos de las raíces para los cuatro diferentes casos, $z = -0.05, z = -0.1, z = -0.2$, y $z = -1$, aparecen en la figura 9.15. Para $z = -0.05$, existe una ramificación desde $s = 0$ hasta $s = -0.05$. Conforme $K$ se incrementa, el polo de lazo cerrado sobre esta ramificación se acerca a cero en $-0.05$. De la sección 8.3 recuerde que si un cero se encuentra muy cerca de un polo, el residuo es pequeño y el polo no es dominante. Por lo tanto, conforme $K$ se incrementa, el residuo del polo de esta ramificación se hace más pequeño, haciéndolo menos dominante. La otra ramificación tiende a $-\infty$; por lo tanto, la respuesta puede hacerse lo suficientemente rápida eligiendo un valor grande de $K$. Para $z = -0.1$, el cero cancela un polo de la planta, lo que ocasiona que el sistema de lazo cerrado se comporte como una respuesta de primer orden. La ramificación resultante inicia en $s = 0$ y se mueve hacia $-\infty$, a lo largo del eje real

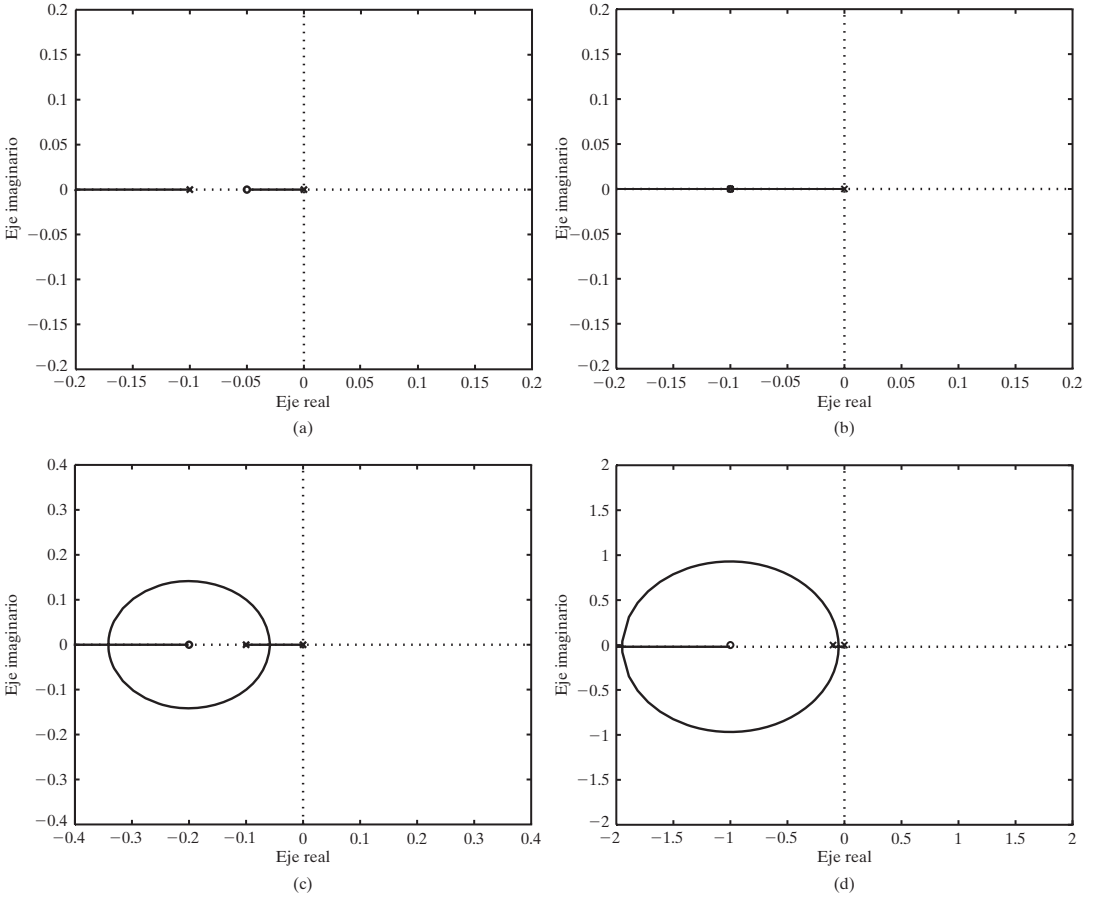



**FIGURA 9.15**
Lugares geométricos de las raíces correspondientes a los controladores PD del ejemplo 9.10: (a) $z = -0.05$; (b) $z = -0.1$; (c) $z = -0.2$; (d) $z = -1$.

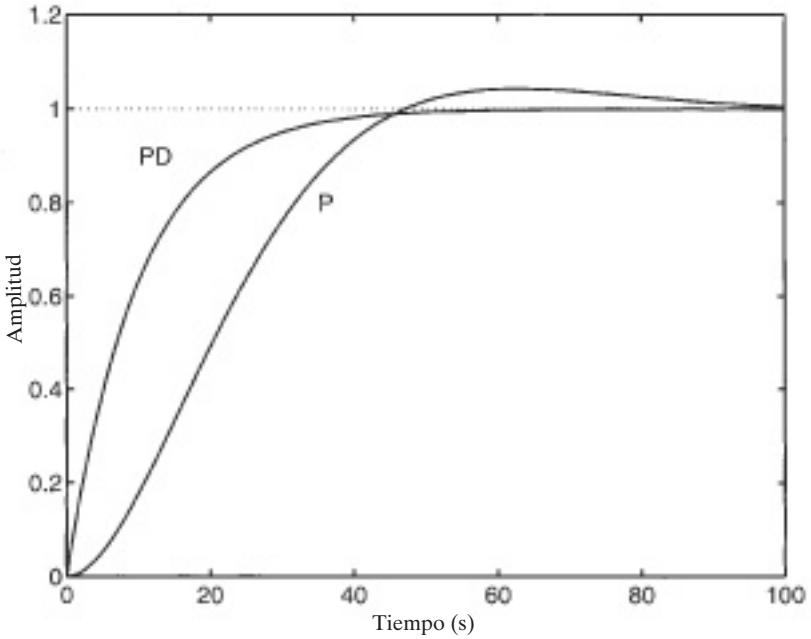



**FIGURA 9.16**
Respuesta al escalón de lazo cerrado para los controladores PD y P.

negativo cuando $K \to \infty$; entonces, la respuesta transitoria puede hacerse tan rápida como sea necesario si se incrementa el valor de $K$. Para $z = -0.2$, el lugar geométrico de las raíces tiene dos ramificaciones que inician en $s = 0$ y $s = -0.1$, las cuales vienen juntas a lo largo del eje real para encontrarse en $s = -0.06$, y después se dividen y forman un arco circular, que se introduce en el eje real en $s = -0.34$; después una ramificación se mueve hacia el cero en $-0.2$, y la otra ramificación hacia $-\infty$ a lo largo del eje real. El arco circular significa que esta elección de la ubicación del cero permite una respuesta subamortiguada. Los polos dominantes se encuentran más hacia la izquierda cuando los polos de lazo cerrado son iguales a $-0.34$. Para $z = -1$, el arco circular tiene un radio grande y cruza el eje real en un punto que se encuentra más hacia la izquierda que el obtenido para $z = -0.2$. En este caso la respuesta más rápida se obtiene para el valor de $K$ que arroja los polos de lazo cerrado en $s = -1.95$.

Ahora, sea $z = -0.1$ quien cancele un polo de la planta. Suponga que la especificación requiere que $\tau \leq 10$ segundos, por lo que el polo dominante debe encontrarse a la izquierda de $-0.1$. Elija un polo de lazo cerrado para que sea $p = -0.1$. Después utilice el criterio de magnitud (9.61) para resolver para la $K$ correspondiente, $K = 0.1$. El control resultante es $G_c(s) = 0.01(s + 0.1)$. La figura 9.16 muestra la respuesta al escalón de lazo cerrado del motor de cd con este controlador PD; para efectos de comparación, también aparece el motor de cd de lazo cerrado con un controlador proporcional $G_c(s) = 0.0005$. La ganancia para el control proporcional se eligió para dar polos de lazo cerrado en $-0.05 \pm j0.05$, los cuales se encuentran tan a la izquierda como es posible con un control proporcional. El factor de amortiguamiento de $\zeta = 0.707$ es lo suficientemente grande para dar una pequeña y razonable oscilación del transitorio.

---

Considere el controlador PI que presentamos en el ejemplo 9.5 dado por

$$G_c(s) = \frac{K_P s + K_I}{s} = K_P \frac{s + K_I/K_P}{s}$$

Este controlador incrementa el tipo del sistema y generalmente se utiliza para reducir el error en el estado estable, es decir, incrementa la precisión en el estado estable para el seguimiento entre $y(t)$ y $r(t)$. La adición de un polo en el origen y de un cero en $-K_I/K_P$ afecta la forma del lugar geométrico de las raíces y, por lo tanto, puede afectar la respuesta transitoria. En general, el controlador PI resulta en un lugar geométrico de las raíces que se encuentra a la derecha del lugar geométrico trazado para un controlador proporcional. Entonces, la respuesta transitoria generalmente es más lenta de lo que es posible con un controlador proporcional. La razón $K_I/K_P$ generalmente se elige para que el cero resultante se encuentre más cerca al origen que cualquier polo de la planta. Entre más pequeña sea la relación, y por lo tanto más cercano se encuentre el cero al origen, más pequeño será el efecto del compensador PI sobre el lugar geométrico de las raíces. Por lo tanto, si es posible encontrar un controlador proporcional que arroje una respuesta transitoria deseable, pero un error en estado estable inaceptable, se puede utilizar un controlador PI para obtener casi la misma ubicación del polo de lazo cerrado, pero con errores en estado estable mucho más pequeños.

---

**Ejemplo 9.11 Diseño de un controlador PI**

Considere un sistema con una función de transferencia

$$G_p(s) = \frac{1}{(s+1)(s+4)}$$

Diseñaremos un controlador tal que la salida $y(t)$ siga una entrada de referencia $r(t)$ con un pequeño error. El lugar geométrico de las raíces con un controlador proporcional aparece en la figura 9.17a. Para reducir el error en estado estable, diseñamos un control PI de la forma

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = K_P\frac{s-z}{s}$$

donde $z = -K_I/K_P$. En este caso,

$$K = K_P \quad \text{y} \quad P(s) = \frac{s-z}{s(s+1)(s+4)}$$

Considere tres opciones para $z$: $-0.01$, $-1$, y $-3$. Los lugares geométricos de las raíces aparecen en la figura 9.17b-d. Observe que las ramificaciones de los lugares geométricos de las raíces para el controlador proporcional están más hacia la izquierda que los correspondientes a cualquiera de los controladores PI. También observe que entre más cercano esté el cero $z$ al origen, más parecida es la gráfica del lugar geométrico de las raíces PI a la gráfica correspondiente para el lugar geométrico de las raíces P.

---

Un controlador proporcional más integral más derivativo (PID) combina los beneficios de un controlador PI y uno PD; es decir, incrementa el tipo del sistema de tal manera que disminuye el error en estado estable, y además mejora la respuesta transitoria moviendo el lugar geométrico de las raíces hacia la izquierda. La forma general de este controlador es

$$G_c(s) = K_P + K_D s + \frac{K_I}{s}$$

$$G_c(s) = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}$$

Este controlador tiene un polo en el origen y dos ceros. Si denotamos los ceros como $z_1$ y $z_2$, el controlador tiene la forma general

$$G_c(s) = K_D\frac{(s-z_1)(s-z_2)}{s}$$

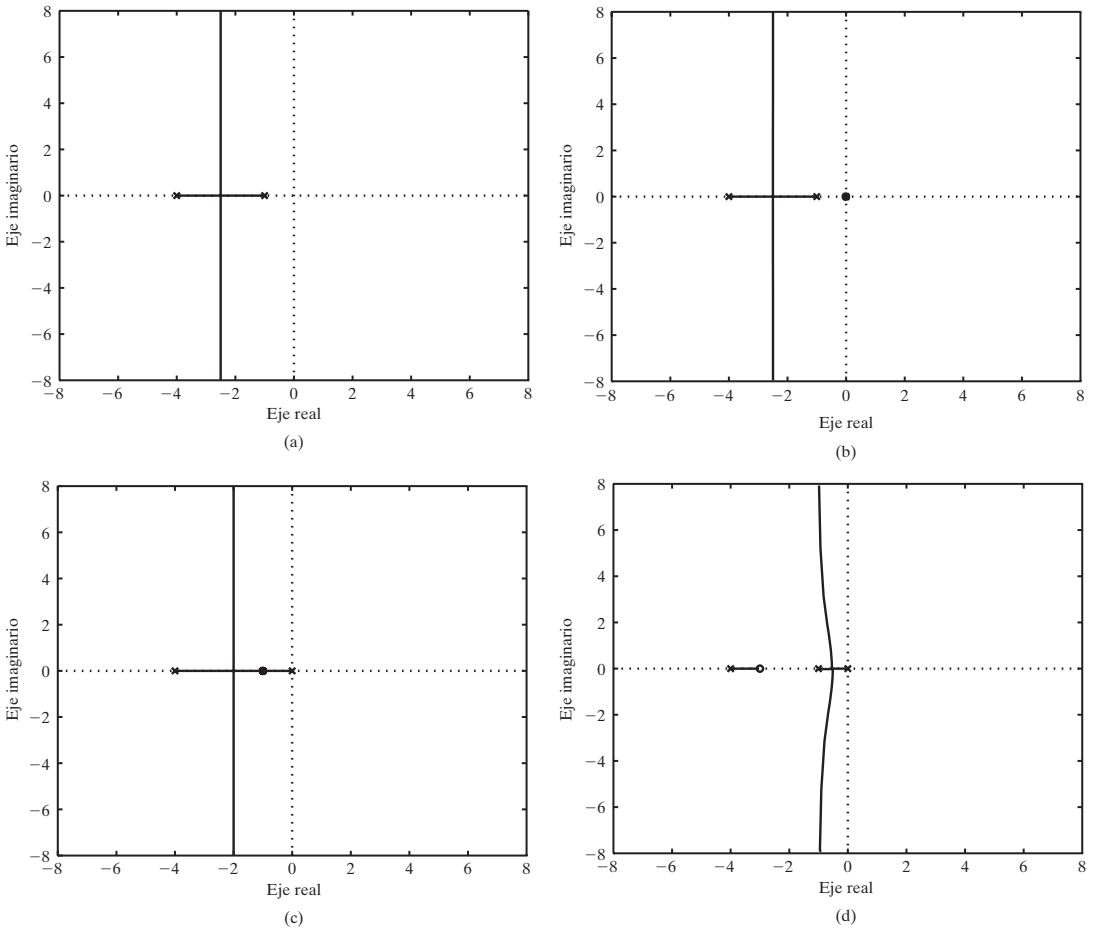



**FIGURA 9.17**
Lugares geométricos para el ejemplo 9.11: (a) Control P; (b) control PI con $z = -0.01$; (c) control PI con $z = -1$; (d) control PI con $z = -3$.

En general, uno de los ceros se elige para que se encuentre cerca del origen (como en el caso del controlador PI), y el otro se elige para que se encuentre muy hacia la izquierda (como en un controlador PD).

---

### Ejemplo 9.12 Diseño de un controlador PID

De nuevo considere el sistema dado por el ejemplo 9.11. En ese ejemplo diseñamos un controlador PI con $z_1 = -1$. Para este control, añada un controlador PD con un cero en $z_2 = -8$. Observe que el cero del controlador PD puede elegirse arbitrariamente, de tal manera que el lugar geométrico de las raíces pueda moverse arbitrariamente bastante hacia la izquierda. El controlador PID resultante tiene la forma

$$G_c(s) = K_D \frac{(s + 1)(s + 8)}{s}$$

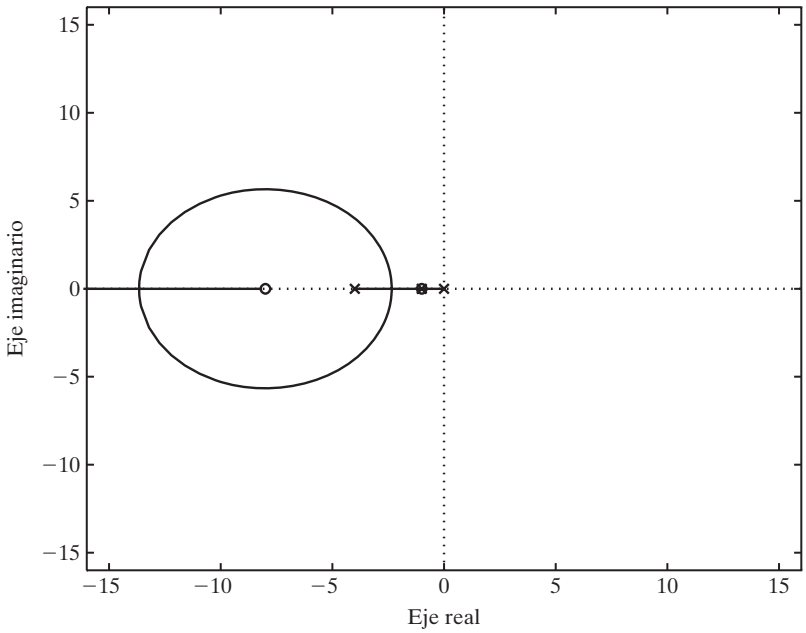



**FIGURA 9.18**
Lugar geométrico de las raíces para un controlador PID.

Entonces,

$$K = K_D \quad \text{y} \quad P(s) = \frac{s + 8}{(s + 4)s}$$

El lugar geométrico de las raíces, que aparece en la figura 9.18, se encuentra más hacia la izquierda que cualquier otro lugar geométrico trazado para un controlador PI, como se aprecia en la figura 9.17.

## 9.5 RESUMEN DEL CAPÍTULO

Este capítulo es una introducción a la teoría de control de tiempo continuo, la cual utiliza la representación de la función de transferencia de un sistema. El control se utiliza para cumplir las especificaciones sobre el rendimiento de un sistema dinámico. Un objetivo común en las aplicaciones de control es el seguimiento, donde la salida del sistema es forzada a seguir una señal deseada. En el caso de una señal constante, a esto se le conoce como control de punto de ajuste. El control de lazo abierto es un simple enfoque en el que una señal de entrada adecuada se determina para que resulte en la respuesta deseada del sistema. El control por retroalimentación, donde la señal de control depende de la señal de salida medida, es mucho más robusto para modelar errores y alteraciones externas que el control de lazo abierto. Además, el control por retroalimentación puede utilizarse para estabilizar una planta inestable.

Los cuatro tipos comunes son el control proporcional, el control PI, el control PD y el control PID. El primero es el más fácil de implementar, ya que consiste sólo en una ganancia. Sin embargo, este control es el más limitado en términos del rendimiento alcanzable. El

control PI se utiliza cuando se necesita precisión en la respuesta, sin embargo, este control tiende a hacer lenta la respuesta. El control PD se utiliza para acelerar la respuesta del sistema, mientras que el control PID se utiliza tanto para acelerar la respuesta como para mejorar la precisión.

Un lugar geométrico de las raíces, que es la gráfica de los polos de lazo cerrado como una función de la ganancia del sistema es una herramienta común que se utiliza para diseño de control. Las especificaciones de un sistema, tales como constante de tiempo y porcentaje de sobretiro, pueden trasladarse en posiciones deseadas de polos de lazo cerrado. El lugar geométrico de las raíces se utiliza para determinar el intervalo de valores de ganancia que cumplen con estas especificaciones. Si no existe ganancia alguna que cumpla con las especificaciones para el tipo de control seleccionado, la forma del lugar geométrico debe cambiarse mediante un control diferente. Por ejemplo, el lugar geométrico de las raíces de un sistema con un control PD tiene por lo regular ramificaciones del lugar geométrico, las cuales se encuentran hacia la izquierda de las ramificaciones del lugar geométrico correspondiente al sistema con control proporcional.

## PROBLEMAS

**9.1.** Considere la siguiente función de transferencia de un sistema:

$$G_p(s) = \frac{1}{s + 0.1}$$

**(a)** Un control de lazo abierto aparece en la figura P9.1a. Diseñe el control, $G_c(s)$, tal que la combinación de la planta y el controlador, $G_c(s)G_p(s)$, tenga un polo en $p = -2$, y la salida $y(t)$ siga una señal de referencia constante $r(t) = r_0u(t)$ con error en estado estable igual a cero, donde $e_{ss} = r_0 - y_{ss}$.

**(b)** Ahora suponga que el polo de la planta en $p = -0.1$ se modeló de manera incorrecta y que el polo real es $p = -0.2$. Aplique el control diseñado en el inciso (a) y la entrada $r(t) = r_0u(t)$ a la planta real, y calcule el error resultante en el estado estable.

**(c)** Un controlador por retroalimentación $G_c(s) = 2(s + 0.1)/s$ se utiliza en lugar de un control de lazo abierto, como muestra la figura P9.1b. Verifique que el polo de lazo cerrado del sistema nominal se encuentra en $p = -2$. (El sistema nominal tiene el polo de la planta en $p = -0.1$.) Sea la entrada al sistema de lazo cerrado $r(t) = r_0u(t)$. Verifique que el error en estado estable, $e_{ss} = r_0 - y_{ss}$ es cero.

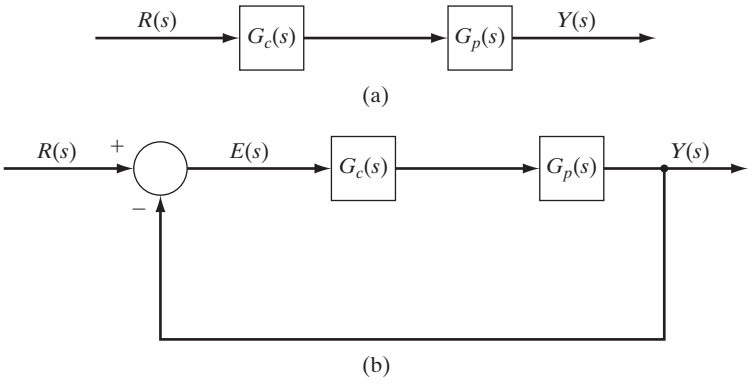



FIGURA P9.1

**(d)** Calcule el error en estado estable del sistema de lazo cerrado real (con el polo de la planta en $p = -0.2$) cuando $r(t) = r_0 u(t)$. Compare este error con el del sistema real de lazo abierto que calculó en el inciso (b).

**(e)** Simule las respuestas de los sistemas de los incisos (a) a (d), cuando $r_0 = 1$. Explique las diferencias (y similitudes) en las respuestas.

**9.2.** Examine el efecto de una perturbación en el rendimiento de sistemas de control de lazo abierto y cerrado realizando el siguiente análisis:

**(a)** Considere un sistema de control de lazo abierto con una perturbación $D(s)$, como muestra la figura P9.2a. Defina un error $E(s) = R(s) - Y(s)$, donde $R(s)$ es una señal de referencia. Deduzca una expresión para $E(s)$ en términos de $D(s)$, $X(s)$ y $R(s)$. Suponga que $D(s)$ es conocida. ¿Es posible eliminar este efecto de $E(s)$ al elegir de manera adecuada $X(s)$ o $G_c(s)$? Ahora suponga que $D(s)$ representa una perturbación desconocida. ¿Es posible eliminar (o reducir) este efecto de $E(s)$ al elegir de manera adecuada $X(s)$ o $G_c(s)$? Justifique sus respuestas.

**(b)** Ahora considere el sistema de retroalimentación que aparece en la figura P9.2b. Deduzca una expresión para $E(s)$ en términos de $D(s)$ y $R(s)$. Suponga que $D(s)$ representa una perturbación desconocida y $G_c(s) = K$. ¿Es posible eliminar (o reducir) el efecto de $D(s)$ sobre $E(s)$ al elegir de manera adecuada $K$? Justifique su respuesta.

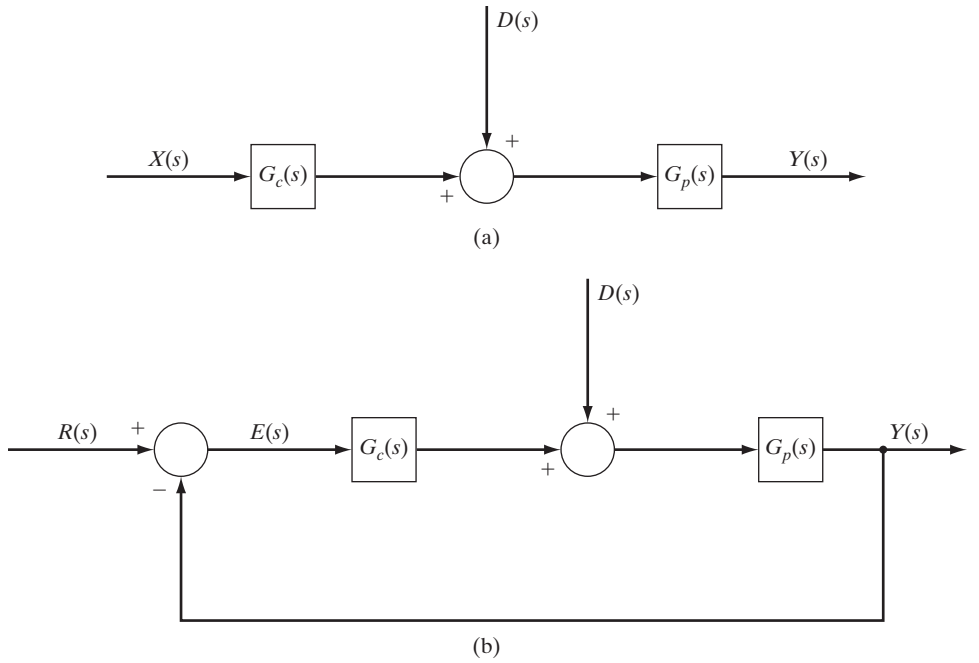



**FIGURA P9.2**

**9.3.** En la figura P9.3a dibujamos un cohete, donde $\theta(t)$ representa el ángulo entre la orientación del cohete y su velocidad, $\phi(t)$, representa el ángulo de los motores de empuje, y $w(t)$ representa ráfagas de viento, que actúan como una perturbación sobre el cohete. El objetivo del diseño de control es hacer que el ángulo $\theta(t)$ siga un ángulo de referencia $\theta_r(t)$. El ángulo de los motores de empuje puede ser directamente controlado mediante motores

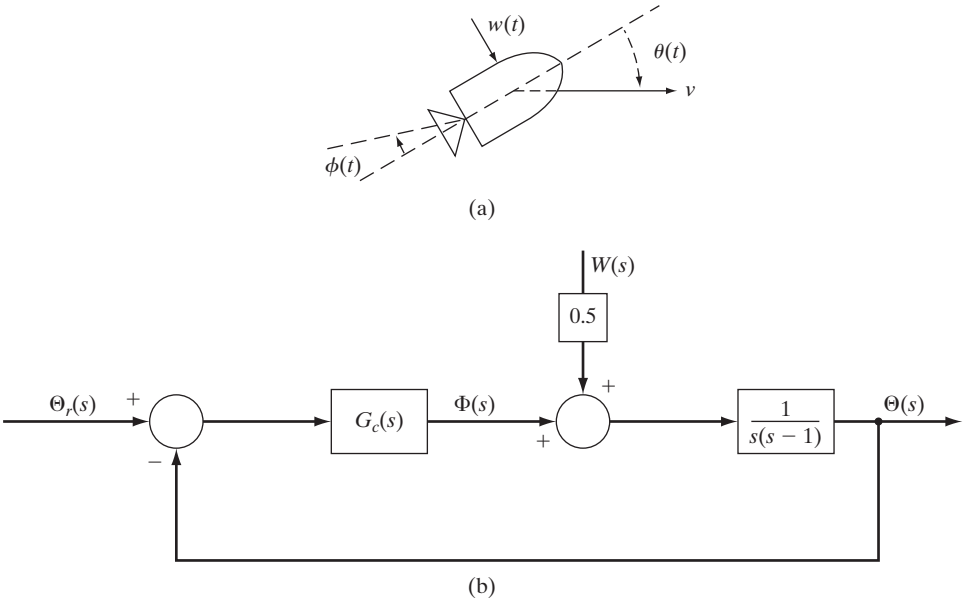



**FIGURA P9.3**

que posicionan los motores de empuje; por lo tanto, la salida de la planta es $\theta(t)$ y la entrada controlada es $\phi(t)$. El sistema puede modelarse mediante la siguiente ecuación:

$$\Theta(s) = \frac{1}{s(s-1)}\Phi(s) + \frac{0.5}{s(s-1)}W(s)$$

**(a)** Considere un control de lazo abierto $\Theta(s) = G_c(s)X(s)$, donde $G_c(s)$, la función de transferencia del controlador, y la señal de comando, $x(t)$, pueden elegirse como se desee. ¿Ésta es una práctica de control para hacer que $\theta(t)$ rastree $\theta_r(t)$? Justifique su respuesta.

**(b)** Ahora considere un controlador por retroalimentación, como muestra la figura P9.3b, donde

$$G_c(s) = K(s+2)$$

Encuentre una expresión para la salida $\Theta(s)$ del sistema de lazo cerrado, en términos de $W(s)$ y $\Theta_r(s)$. Considere la parte de la respuesta que se debe a $W(s)$; entre más bajo sea este valor, mejor será el rechazo a la perturbación. ¿Cómo depende la magnitud de esta respuesta respecto a la magnitud de $K$?

**(c)** Suponga que $\Theta_r(s) = 0$ y $w(t)$ es una señal aleatoria uniformemente distribuida entre 0 y 1. Defina un vector $w$ en MATLAB como `w = rand(201,1)`, y defina el vector tiempo como `t = 0:0.05:10`. Utilice $w$ como la entrada al sistema de lazo cerrado, y simule la respuesta para el intervalo de tiempo $0 \le t \le 10$. Realice la simulación para $K = 5, 10$ y $20$, y grafique las respuestas. Explique cómo se ve afectada la magnitud de la respuesta por la magnitud de $K$. ¿Coincide resultado con la predicción que hizo en el inciso (b)?

**9.4.** Considere el sistema de control por retroalimentación que muestra la figura P9.4. Suponga que las condiciones iniciales son cero.

**(a)** Deduzca una expresión para $E(s)$ en términos de $D(s)$ y $R(s)$, donde $E(s)$ es la transformada de Laplace de la señal de error $e(t) = r(t) - y(t)$.

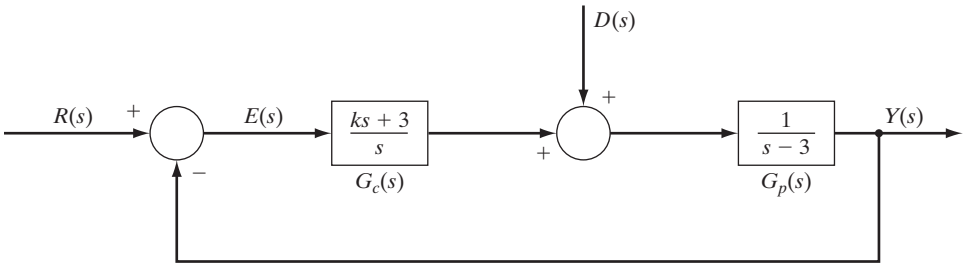



FIGURA P9.4

**(b)** Suponga que $r(t) = u(t)$ y $d(t) = 0$, para toda $t$. Determine todos los valores (reales) de $K$, tal que $e(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

**(c)** Suponga que $r(t) = u(t)$ y $d(t) = u(t)$. Determine todos los valores (reales) de $K$, tal que $e(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

**(d)** Suponga que $r(t) = u(t)$ y $d(t) = (\text{sen } t)u(t)$. Determine todos los valores (reales) de $K$, tal que $e(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

**(e)** De nuevo suponga que $r(t) = u(t)$ y $d(t) = (\text{sen } t)u(t)$. Con la función de transferencia del controlador dada por

$$G_c(s) = \frac{7s^3 + K_1 s + K_2}{s(s^2 + 1)}$$

determine todos los valores (reales) de $K_1$ y $K_2$, tal que $e(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

**9.5.** Considere una conexión de retroalimentación como la que muestra la figura P9.1(b). La respuesta al impulso del sistema con función de transferencia $G_p(s)$ es $h(t) = (\text{sen } t)u(t)$.

**(a)** Determine la función de transferencia $G_c(s)$, tal que la respuesta al impulso de la conexión de retroalimentación sea igual a $(\text{sen } t)e^{-t}u(t)$.

**(b)** Para $G_c(s)$ igual a la respuesta del inciso (a), calcule la respuesta al escalón de la conexión de retroalimentación.

**9.6.** Cada uno de los siguientes sistemas se controlará mediante retroalimentación:

**(i)** $G_p(s) = \dfrac{s + 5}{s + 1}$

**(ii)** $G_p(s) = \dfrac{1}{s(s + 4)}$

Para cada sistema, haga lo siguiente:

**(a)** Utilice la condición del ángulo para determinar qué parte del eje real se encuentra sobre el lugar geométrico de las raíces, cuando $G_c(s) = K$. Para el sistema en (ii), verifique mediante la condición del ángulo que $s = -2 + j\omega$ se encuentra en el lugar geométrico de las raíces, para toda $\omega$ real.

**(b)** Calcule los polos de lazo cerrado para valores específicos de $K > 0$, y después utilice esta información para graficar el lugar geométrico de las raíces.

**(c)** Verifique las respuestas a los incisos (a) y (b) mediante MATLAB para graficar el lugar geométrico de las raíces.

**9.7.** Utilice MATLAB para graficar el lugar geométrico de las raíces para cada uno de los siguientes sistemas:

**(a)** $G_p(s) = \dfrac{1}{(s + 1)(s + 10)}; \quad G_c(s) = K$

**(b)** $G_p(s) = \dfrac{1}{(s + 1)(s + 4)(s + 10)}; \quad G_c(s) = K$

**(c)** $G_p(s) = \dfrac{(s+4)^2+4}{[(s+2)^2+16](s+8)}; \quad G_c(s) = K$

**(d)** $G_p(s) = \dfrac{s+4}{(s+6)^2+64}; \quad G_c(s) = K$

**9.8.** Para cada uno de los sistemas del problema 9.7, determine lo siguiente:
**(a)** El intervalo de $K$ que arroje una respuesta estable.
**(b)** El valor de $K$ (si lo hay) que arroje una respuesta críticamente amortiguada.
**(c)** El (los) valor(es) de $K$ que arroje(n) la constante de tiempo más pequeña.

**9.9.** Para cada uno de los sistemas de lazo cerrado definidos en el problema 9.7, haga lo siguiente:
**(a)** Calcule el error en estado estable $e_{ss}$ para una entrada escalón unitario cuando $K = 100$.
**(b)** Verifique su respuesta anterior simulando las respuestas de los sistemas de lazo cerrado a una entrada escalón.

**9.10.** Utilice MATLAB para graficar el lugar geométrico de las raíces de cada uno de los siguientes sistemas:

Lugar geométrico de las raíces interactivo

**(a)** $G_p(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+10)}; \quad G_c(s) = \dfrac{K(s+1.5)}{s}$

**(b)** $G(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+10)}; \quad G_c(s) = K(s+15)$

**(c)** $G_p(s) = \dfrac{1}{s(s-2)}; \quad G_c(s) = K(s+4)$

**(d)** $G_p(s) = \dfrac{1}{(s+2)^2+9}; \quad G_c(s) = \dfrac{K(s+4)}{s+10}$

**(e)** $G_p(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+3)}; \quad G_c(s) = \dfrac{K(s+6)}{s+10}$

**9.11.** Repita el problema 9.9 para los sistemas de lazo cerrado, definidos en el problema 9.10.

**9.12.** La función de transferencia de un motor de cd es

$$G_p(s) = \frac{\Theta(s)}{V_a(s)} = \frac{60}{s(s+50)}$$

Lugar geométrico de las raíces interactivo

donde $\theta(t)$ es el ángulo del eje del motor, y $v_a(t)$ es el voltaje de entrada a la armadura. Se utiliza un sistema de lazo cerrado para intentar que el ángulo del eje del motor siga un ángulo deseado del motor $\theta_r(t)$. Se utiliza retroalimentación unitaria, como muestra la figura P9.12, donde $G_c(s) = K_P$ es la ganancia de un amplificador. Sea $K = K_P(60)$.

**(a)** Grafique el lugar geométrico de las raíces para el sistema.
**(b)** Calcule la función de transferencia de lazo cerrado para los siguientes valores de $K$: $K = 500, 625, 5000$, y $10{,}000$. Para cada valor de $K$, identifique los polos de lazo cerrado correspondientes sobre el lugar geométrico de las raíces graficado en el inciso (a).

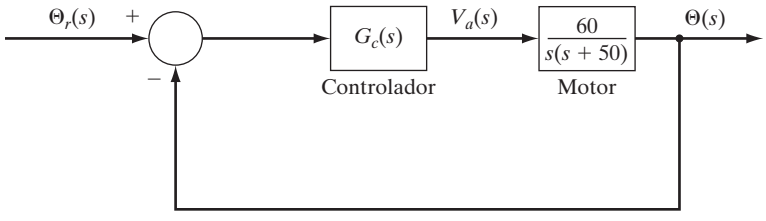



**FIGURA P9.12**

**(c)** Grafique la respuesta al escalón para cada valor de $K$ en el inciso (b). ¿Para qué valor de $K$ la respuesta de lazo cerrado tiene la constante de tiempo más pequeña? ¿Y el sobretiro más pequeño?

**9.13.** Un sistema tiene la función de transferencia

$$G_p(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 7)}$$

Lugar geométrico de las raíces interactivo

**(a)** Trace el lugar geométrico de las raíces para un sistema de lazo cerrado, con un controlador proporcional $G_c(s) = K_P$.

**(b)** Calcule los polos de lazo cerrado para $K_P = 5, 9, 73, 409$, y marque estas posiciones de los polos sobre el lugar geométrico de las raíces. Describa qué tipo de comportamiento de lazo cerrado esperaría para cada una de estas selecciones de $K_P$. Calcule el error en estado estable para una función escalón unitario, para cada uno de estos valores de $K_P$.

**(c)** Verifique los resultados de la parte (b) utilizando MATLAB para calcular y graficar la respuesta al escalón de lazo cerrado, para cada valor de $K_P$.

**9.14.** Un sistema tiene la función de transferencia

$$G_p(s) = \frac{s + 4}{s(s + 2)(s + 8)}$$

Lugar geométrico de las raíces interactivo

**(a)** Trace el lugar geométrico de las raíces, utilizando MATLAB para un controlador proporcional $G_c(s) = K_P$.

**(b)** Encuentre un valor de $K_P$ que arroje un factor de amortiguamiento de lazo cerrado de $\zeta = 0.707$ para polos dominantes. Proporcione el polo de lazo cerrado correspondiente.

**(c)** Utilice MATLAB para calcular y graficar la respuesta al escalón de lazo cerrado para el valor de $K_P$ que encontró en el inciso (a).

**9.15.** Un sistema de tercer orden tiene la función de transferencia

$$G_p(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 3)(s + 5)}$$

Lugar geométrico de las raíces interactivo

Las especificaciones de rendimiento son que los polos dominantes de segundo orden tienen una razón de amortiguamiento de $0.4 \leq \zeta \leq 0.707$ y $\zeta\omega_n > 1$.

**(a)** Grafique el lugar geométrico de las raíces para $G_c(s) = K_P$.

**(b)** A partir del lugar geométrico de las raíces, encuentre los valores de $K_P$ que satisfagan los criterios.

**9.16.** Un sistema tiene la función de transferencia

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2}$$

Lugar geométrico de las raíces interactivo

**(a)** Trace el lugar geométrico de las raíces para un sistema de lazo cerrado, con un controlador proporcional $G_c(s) = K_P$. Describa qué tipo de respuesta de lazo cerrado esperaría.

**(b)** Trace el lugar geométrico de las raíces para un controlador PD de la forma $G_c(s) = K_D s + K_P = K_D(s + 2)$. Describa qué tipo de respuesta de lazo cerrado esperaría cuando $K_D$ varía.

**(c)** Proporcione el error en estado estable del sistema de lazo cerrado con un controlador PD para una entrada escalón, cuando $K_D = 10$.

**(d)** Verifique el resultado del inciso (c) simulando el sistema.

Lugar geométrico de las raíces interactivo

**9.17.** Un sistema tiene la función de transferencia

$$G_p(s) = \frac{s + 4}{(s + 1)(s + 2)}$$

**(a)** Trace el lugar geométrico de las raíces para un sistema de lazo cerrado, con un controlador proporcional $G_c(s) = K_P$. Determine el valor de $K_P$ que proporcionará los polos de lazo cerrado con una constante de tiempo $\tau = 0.5$ segundos.

**(b)** Calcule el error en estado estable de la respuesta al escalón para el valor de $K_P$ elegido en el inciso (a).

**(c)** Diseñe un controlador PI tal que el sistema de lazo cerrado tenga una constante de tiempo de aproximadamente 0.5 segundos. Por simplicidad en el diseño, seleccione el cero del controlador para cancelar el polo del sistema. ¿Cuál es el error en estado estable esperado para una entrada escalón?

**(d)** Simule el sistema de lazo cerrado con los dos diferentes controladores diseñados en los incisos (a) y (c), para verificar los resultados de los incisos (b) y (c).

Lugar geométrico de las raíces interactivo

**9.18.** El sistema que aparece en la figura P9.18 es un sistema de control de temperatura donde la temperatura de salida $T(t)$ debe seguir una temperatura de punto de ajuste deseada $r(t)$. El sistema de lazo abierto tiene la función de transferencia

$$G_p(s) = \frac{0.05}{s + 0.05}$$

**(a)** Trace el lugar geométrico de las raíces para un sistema de lazo cerrado, con un controlador proporcional $G_c(s) = K_P$. Suponga que la temperatura deseada es 70°F. Sea $r(t) = 70u(t)$, y calcule la ganancia requerida para arrojar un error en estado estable de 2°. ¿Cuál es la constante de tiempo del sistema de lazo cerrado?

**(b)** Diseñe un controlador PI, tal que el sistema de lazo cerrado tenga la misma constante de tiempo que la que calculó en el inciso (a). Por simplicidad del diseño, seleccione el cero del controlador para cancelar el polo del sistema.

**(c)** Para verificar los resultados, simule la respuesta del sistema de lazo cerrado a $r(t) = 70u(t)$ para los dos diferentes controladores diseñados en los incisos (a) y (b).

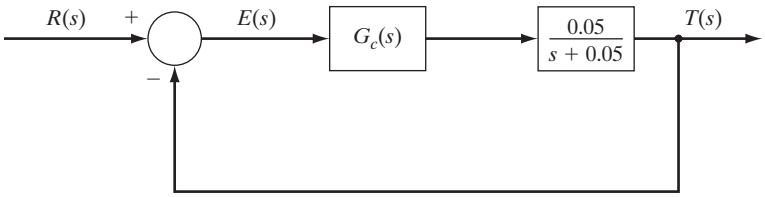



FIGURA P9.18

**9.19.** Un sistema está dado por la función de transferencia

$$G_p = \frac{10}{s(s + 1)}$$

Suponga que los polos de lazo cerrado deseados se encuentran en $-3 \pm j3$.

**(a)** Diseñe un controlador PD para obtener los polos deseados. Utilice el criterio del ángulo (9.60) evaluado en el polo de lazo cerrado deseado (es decir, $p = -3 + j3$), para determinar la posición del cero.

**(b)** Simule la respuesta al escalón del sistema de lazo cerrado.

**9.20.** Un motor de cd tiene la función de transferencia

$$\frac{\Omega(s)}{V_i(s)} = G_p(s) = \frac{2}{(s + 2)(s + 10)}$$

donde $\Omega(s)$ representa la velocidad del motor y $V_i(s)$ representa el voltaje de entrada.

**(a)** Diseñe un controlador proporcional para hacer que el factor de amortiguamiento de lazo cerrado sea $\zeta = 0.707$. Para este valor de $K_P$, determine el error en estado estable para una entrada escalón unitario.

**(b)** Diseñe un controlador PID para que los polos dominantes de lazo cerrado se encuentren en $-10 \pm 10j$. Por simplicidad, seleccione uno de los ceros del controlador para cancelar el polo en $-2$. Después utilice el criterio del ángulo (9.60) con $p = -10 + j10$

para determinar la otra posición del cero. ¿Cuál es el error en estado estable esperado para una entrada escalón?

**(c)** Para verificar sus resultados, simule la respuesta al escalón del sistema de lazo cerrado, con los dos diferentes controladores diseñados en los incisos (a) y (b).

**9.21.** Considere el cohete descrito en el problema 9.3. Un lazo de retroalimentación mide el ángulo $\theta(t)$ y determina las correcciones a los motores de empuje.

**(a)** Diseñe un controlador PD para hacer que los polos de lazo cerrado se encuentren en $-0.5 \pm 0.5j$. (*Pista*: vea el comentario relacionado con el uso del criterio del ángulo en el problema 9.19).

**(b)** Simule la respuesta del sistema de lazo cerrado a una entrada impulso unitario.

Lugar geométrico de las raíces interactivo

**9.22.** El péndulo invertido que aparece en la figura P9.22 tiene la función de transferencia

$$G_p(s) = \frac{\Theta(s)}{T(s)} = \frac{2}{s^2 - 2}$$

donde $\theta(s)$ representa el ángulo de la barra y $T(s)$ representa la torca aplicada por un motor a la base.

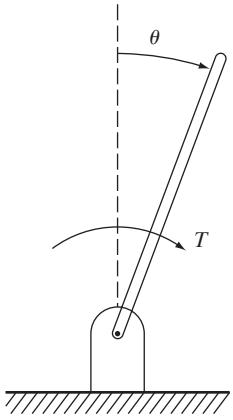



FIGURA P9.22

**(a)** Trace el lugar geométrico de las raíces para un controlador proporcional, $G_c(s) = K_P$. ¿Qué tipo de respuesta de lazo cerrado esperaría para diferentes valores de $K_P$?

**(b)** Diseñe un controlador de la forma

$$G_c(s) = K_L \frac{s - z_c}{s - p_c}$$

Elija $z_c = -3$, y resuelva para $p_c$ a partir del criterio del ángulo de tal forma que los polos dominantes de lazo cerrado se encuentren en $-3 \pm 3j$. (*Nota:* el controlador resultante se conoce como *control del péndulo*). Dibuje el lugar geométrico de las raíces resultante para este sistema, y calcule la ganancia $K_L$ que resulta en los polos de lazo cerrado deseados.

**(c)** Simule la respuesta al impulso del sistema de lazo cerrado con el controlador diseñado en el inciso (b). (El impulso es equivalente a que alguien empuje el péndulo).

**9.23.** Un sistema tiene la función de transferencia

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s + 2)}$$

Lugar geométrico de las raíces interactivo

**(a)** Trace el lugar geométrico para las raíces de un controlador proporcional, $G_c(s) = K_P$.
**(b)** Diseñe un controlador de la forma

$$G_c(s) = K_L \frac{s - z_c}{s - p_c}$$

Seleccione el cero del controlador para cancelar el polo en $-2$. Resuelva para $p_c$ a partir del criterio del ángulo, tal que los polos dominantes de lazo cerrado se encuentren en $-2 \pm 3j$. Dibuje el lugar geométrico resultante para este sistema, y calcule la ganancia $K_L$ que resulta en los polos deseados de lazo cerrado.
**(c)** Diseñe otro controlador utilizando el método descrito en el inciso (b); evite elegir que el cero se encuentre en $z_c = -3$. Dibuje el lugar geométrico resultante para este sistema, y calcule la ganancia $K_L$ que resulta en los polos deseados de lazo cerrado.
**(d)** Compare los dos controladores diseñados en los incisos (b) y (c) simulando la respuesta al escalón de los dos sistemas resultantes. Debido a que ambos sistemas tienen los mismos polos dominantes en $-2 \pm 3j$, especule sobre la razón de la diferencia en la respuesta real.

**9.24.** Diseñe un controlador por retroalimentación que establezca la posición de una pelota de ping pong suspendida en un tubo de plástico, como muestra la figura P9.24. Aquí, $M$ es la masa de la pelota, $g$ la constante de gravitación, $y(t)$ es la posición de la pelota en el tiempo $t$, y $x(t)$ es la fuerza del viento sobre la pelota debido al ventilador. La posición $y(t)$ de la pelota continuamente se mide en tiempo real por medio de un sensor ultrasónico. El sistema es modelado por la ecuación diferencial

$$M\ddot{y}(t) = x(t) - Mg$$

El objetivo es diseñar un controlador por retroalimentación, tal que $y(t) \to y_0$ cuando $t \to \infty$, donde $y_0$ es la posición deseada (el punto de ajuste).
**(a)** ¿Es posible lograr el objetivo de control mediante un controlador proporcional dado por $G_c(s) = K_P$? Justifique su respuesta.
**(b)** ¿Es posible lograr el objetivo de control mediante un controlador PI dado por $G_c(s) = K_P + K_I/s$? Justifique su respuesta.
**(c)** Diseñe un controlador que logre el objetivo deseado cuando $M = 1$ y $g = 9.8$.

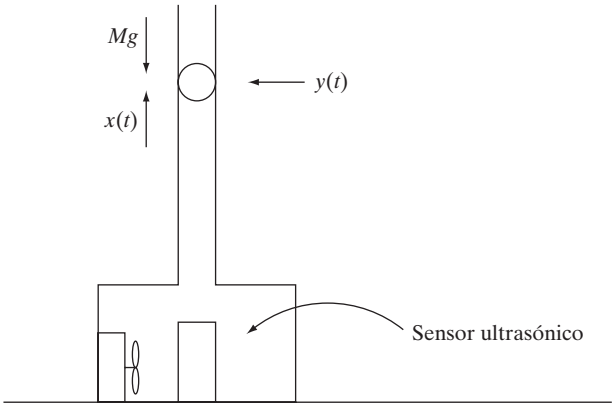


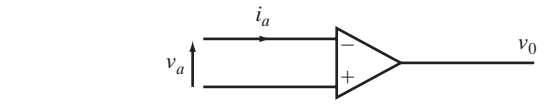

FIGURA P9.24

**9.25.** Un controlador proporcional puede implementarse utilizando un amplificador simple. Sin embargo, los controladores PD, PI y PID requieren una red de compensación. Con frecuencia, esto se logra para señales analógicas con el uso de amplificadores operacionales. Considere el amplificador operacional ideal de la figura P9.25a. Este amplificador es un elemento del circuito con impedancia infinita, por lo que $v_a = 0$ e $i_a = 0$. Estas relaciones también se mantienen cuando el amplificador operacional se incrusta en un circuito, como muestra la figura P9.25b.

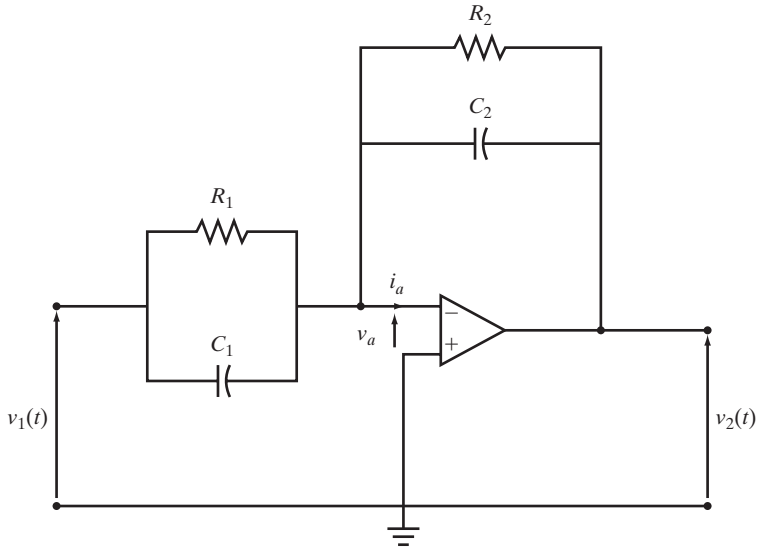
**(a)** Suponga que $R_1 = 1000, \Omega\, R_2 = 2000\ \Omega, C_1 = C_2 = 0$, en la figura P9.25b. Calcule la función de transferencia entre la entrada $v_1$ y la salida $v_2$. (Este circuito se conoce como un circuito inversor).

**(b)** Suponga que en la figura P9.25b, $R_1 = 10\ k\Omega, R_2 = 20\ k\Omega, C_1 = 10\ \mu$F, y $C_2 = 0$. El circuito resultante es un controlador PD. Calcule la función de transferencia del circuito.

**(c)** Suponga que en la figura P9.25b, $R_1 = 10\ k\Omega, R_2 = \infty$ (eliminado del circuito), $C_1 = 200\ \mu$F, y $C_2 = 10\ \mu$F. El circuito resultante es un controlador PI. Calcule la función de transferencia del circuito.




(a)




(b)

FIGURA P9.25

CAPÍTULO

10

# Diseño de filtros y controladores digitales

En este capítulo utilizaremos las técnicas de tiempo continuo y tiempo discreto que desarrollamos en los capítulos 5 a 9 para diseñar filtros y controladores digitales. El desarrollo comienza en la sección 10.1 con el estudio de la discretización de señales y sistemas de tiempo continuo. Aquí planteamos el análisis de Fourier aplicado a la discretización de señales analógicas, lo que después utilizaremos para generar una condición en el dominio de frecuencia para la discretización de sistemas de tiempo continuo. En la sección 10.2 diseñamos filtros digitales en términos de la discretización de filtros analógicos prototipo. Así como con los filtros analógicos que explicamos en el capítulo 8, los filtros digitales pueden ser pasa bajas, pasa altas, pasa banda y rechaza banda, o pueden tomar cualquier función característica de respuesta en frecuencia. Como vimos en la sección 7.5, los filtros digitales pueden tener una respuesta al impulso de duración infinita (es decir, un pulso unitario), en cuyo caso se conocen como filtros IIR, o la respuesta al impulso puede decaer a cero en un número finito de pasos, en cuyo caso el filtro se conoce como filtro FIR. En la sección 10.2 desarrollamos el diseño de filtros IIR en términos de prototipos analógicos que después se mapean en filtros digitales mediante la transformación bilineal. En la sección 10.3 utilizamos MATLAB para llevar a cabo este proceso de diseño. Después, en la sección 10.4 realizamos el diseño de filtros FIR, truncando o ventaneando la respuesta al impulso de un filtro IIR.

El concepto de mapeo que explicamos en la sección 10.1 para transformar filtros analógicos en filtros digitales también puede utilizarse para mapear controladores de tiempo continuo en controladores de tiempo discreto (digitales). Esto lo explicamos en la sección 10.5, junto con un breve desarrollo de la técnica de igualación de respuestas. Aquí, parte del énfasis lo hacemos sobre la igualación a la respuesta al escalón, la cual se utiliza por lo regular en control digital. El mapeo de un controlador analógico en un controlador digital se ilustra con la aplicación del motor de cd que vimos en el capítulo 9. La sección 10.5 incluye la descripción de un proyecto de laboratorio que involucra el control digital de un motor de cd basado en un kit LEGO MINDSTORMS. La sección 10.6 presenta el resumen del capítulo.

## 10.1 DISCRETIZACIÓN

Sea $x(t)$ una señal de tiempo continuo que será muestreada, y sea $X(\omega)$ quien denote la transformada de Fourier de $x(t)$. Como explicamos en la sección 3.4, las gráficas de magnitud $|X(\omega)|$ y ángulo $\angle X(\omega)$ contra $\omega$ despliegan los espectros de amplitud y fase de la señal $x(t)$. Ahora, con el intervalo de muestreo igual a $T$, como vimos en la sección 5.4, la señal muestreada $x_s(t)$ puede ser representada como la multiplicación de la señal $x(t)$ por el tren de impulsos $p(t)$; es decir, $x_s(t) = x(t)p(t)$, donde

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

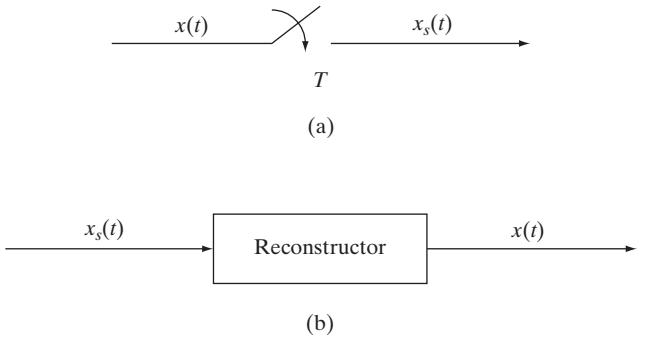



**FIGURA 10.1**
(a) Muestreador y (b) reconstructor de señales.

La operación de muestreo se ilustra en la figura 10.1a. Recuerde que la frecuencia de muestreo $\omega_s$ es igual a $2\pi/T$.

En la sección 5.4 mostramos que la transformada de Fourier $X_s(\omega)$ de la señal muestreada $x_s(t)$ está dada por

$$X_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(\omega - n\omega_s) \tag{10.1}$$

Observe que $X_s(\omega)$ consiste en réplicas escaladas de $X(\omega)$, desplazadas en frecuencia por múltiplos de la frecuencia de muestreo $\omega_s$. Observe también que $X_s(\omega)$ es una función periódica de $\omega$, con periodo igual a $\omega_s$.

Físicamente, el muestreo se logra a través de un convertidor analógico a digital (A/D), el cual primero muestrea la señal para obtener $x_s(t)$ y después la convierte en una cadena de pulsos con amplitud 0 o 1. El proceso de muestrear una señal analógica $x(t)$ y después convertir la señal muestreada $x_s(t)$ en una señal de amplitud binaria también se conoce como *modulación por código de pulsos*. La señal de amplitud binaria se construye cuantizando y después codificando la señal muestreada $x_s(t)$. Dejamos la descripción detallada del proceso para un análisis más avanzado del muestreo.

La señal de tiempo continuo $x(t)$ puede regenerarse a partir de la señal muestreada $x_s(t) = x(t)p(t)$ mediante un *reconstructor de señales*, que ilustra la figura 10.1b. Como muestra la figura, la salida del reconstructor de señales es exactamente igual a $x(t)$, en cuyo caso se dice que el reconstructor de señales es "ideal". Observe que, si un reconstructor de señales (ideal) se coloca en cascada con un muestreador, el resultado es la señal analógica $x(t)$. De modo más preciso, para la conexión en cascada que muestra la figura 10.2, si la entrada es $x(t)$, la salida es $x(t)$. Esto muestra que la reconstrucción de señales es lo inverso al muestreo de señales, y viceversa.

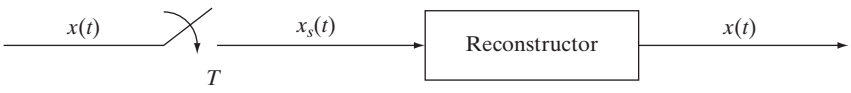



**FIGURA 10.2**
Cascada de un muestreador y un reconstructor de señales.

En la sección 5.4 mostramos que, si la señal $x(t)$ es de banda limitada con un ancho de banda $B$, es decir, $|X(\omega)| = 0$ para $\omega > B$, y si la frecuencia de muestreo $\omega_s$ es mayor o igual que $2B$, entonces $x(t)$ puede recuperarse de manera exacta a partir de la señal muestreada $x_s(t)$, al aplicar $x_s(t)$ a un filtro pasa bajas ideal con ancho de banda $B$. En situaciones más prácticas, las señales no son completamente de banda limitada, y como resultado puede darse el aliasing. Sin embargo, como explicamos en la sección 5.4, la distorsión debida al aliasing puede reducirse de manera significativa si la señal se filtra con un filtro pasa bajas antes de muestrearla. En particular, si el contenido de frecuencia de la señal no es muy pequeño para frecuencias mayores que la mitad de la frecuencia de muestreo $\omega_s$, el efecto del aliasing puede reducirse si primero se filtra un filtro pasa bajas con uno analógico, en general conocido como *filtro anti-aliasing*, con un ancho de banda menor o igual que $\omega_s/2$.

### 10.1.1 Operación de retención

En lugar de filtrar con un pasa bajas, existen otros métodos para reconstruir una señal de tiempo continuo, $x(t)$, a partir de la señal muestreada $x_s(t)$. Uno de éstos es la operación de retención que aparece en la figura 10.3. La salida $\tilde{x}(t)$ del dispositivo de retención está dada por

$$\tilde{x}(t) = x(nT), \quad nT \leq t < nT + T \tag{10.2}$$

De (10.2) vemos que la operación de retención, "retiene" el valor de la señal muestreada al tiempo $nT$ hasta que recibe el siguiente valor de la señal muestreada al tiempo $nT + T$. La salida $\tilde{x}(t)$ del dispositivo de retención es una señal analógica parcialmente constante; es decir, $\tilde{x}(t)$ es constante sobre cada intervalo de $T$ segundos, $nT \leq t \leq nT + T$. Debido a que la amplitud de $\tilde{x}(t)$ es constante sobre cada intervalo de $T$ segundos, al dispositivo en ocasiones se le conoce como *retenedor de orden cero*.

Es evidente que el dispositivo de retención corresponde a cierto tipo de filtro pasa bajas. Para ver esto, calcularemos la función de respuesta en frecuencia del dispositivo de retención. Primero, expresaremos la transformada de Fourier, $X_s(\omega)$, de la señal muestreada, $x_s(t) = x(t)p(t)$, de manera diferente a la dada por (10.1): al utilizar la definición de transformada de Fourier tenemos

$$\begin{aligned} X_s(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t)e^{-j\omega t}\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT)e^{-j\omega t}\,dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT)e^{-j\omega t}\,dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-j\omega nT} \end{aligned} \tag{10.3}$$

**FIGURA 10.3**
Operación de retención.

Ahora, la transformada de Fourier $\widetilde{X}(\omega)$ de la salida $\tilde{x}(t)$ del dispositivo de retención, está dada por

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t) e^{-j\omega t}\, dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{nT}^{nT+T} x(nT) e^{-j\omega t}\, dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \int_{nT}^{nT+T} e^{-j\omega t}\, dt \right] x(nT) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \right]_{t=nT}^{t=nT+T} x(nT) \\
&= \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega nT} x(nT) \qquad (10.4)
\end{aligned}$$

Entonces, al utilizar (10.3) en (10.4), tenemos

$$\widetilde{X}(\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} X_s(\omega) \qquad (10.5)$$

De (10.5) vemos que la función en frecuencia $H_{\text{hd}}(\omega)$ del dispositivo de retención está dada por

$$H_{\text{hd}}(\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega}$$

La figura 10.4 muestra una gráfica de la función de magnitud $|H_{\text{hd}}(\omega)|$, para el caso en que $T = 0.2$. Como aparece en la gráfica, la función de respuesta en frecuencia del dispositivo de retención corresponde a un filtro pasa bajas. En general, el dispositivo de retención se utiliza en control digital, lo cual consideraremos brevemente en la sección 10.5.

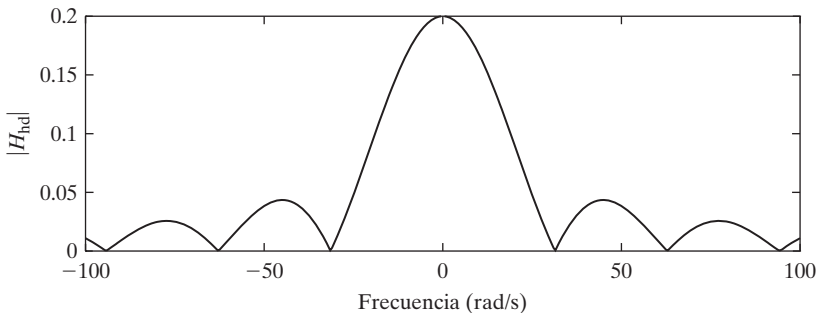



**FIGURA 10.4**
Magnitud de la función de respuesta en frecuencia del dispositivo de retención con $T = 0.2$.

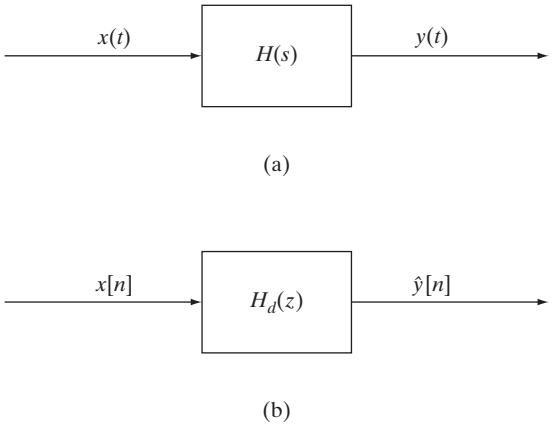



**FIGURA 10.5**
(a) Un sistema de tiempo continuo dado y (b) discretización.

### 10.1.2 Discretización de un sistema

Ahora considere un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo, con función de transferencia $H(s)$. Como muestra la figura 10.5a, $y(t)$ es la respuesta de salida del sistema que resulta de una entrada $x(t)$ con condiciones iniciales iguales a cero, antes de aplicar la entrada. Ahora, dado que $T > 0$, sea $x[n]$ y $y[n]$ quienes denoten las señales de tiempo discreto, formadas a partir de los valores de $x(t)$ y $y(t)$ en los tiempos $t = nT$; es decir,

$$x[n] = x(t)|_{t=nT} \quad \text{y} \qquad y[n] = y(t)|_{t=nT}$$

La discretización del sistema de tiempo continuo dado con función de transferencia $H(s)$, es un sistema lineal e invariante en el tiempo discreto con entrada $x[n]$, salida $\hat{y}[n]$, y función de transferencia $H_d(z)$, donde el subíndice "$d$" significa "discreto".

La figura 10.5b muestra el sistema de tiempo discreto. Para que sea una discretización, el comportamiento del sistema de tiempo discreto debe corresponder al sistema de tiempo continuo en los tiempos de muestreo $t = nT$. Una manera de especificar esta correspondencia es solicitar que la salida $\hat{y}[n]$ del sistema de tiempo discreto satisfaga la condición

$$\hat{y}[n] = y[n] = y(nT), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{10.6}$$

En otras palabras, la salida de la discretización debe ser exactamente igual a (es decir, debe coincidir con) los valores del sistema de tiempo continuo en los tiempos de muestreo $t = nT$. Como veremos a continuación, esta condición de igualación puede expresarse en el dominio de la frecuencia.

Sea $\hat{Y}(\Omega)$ quien denote la transformada de Fourier de tiempo discreto (DTFT) de $\hat{y}(n)$, dada por

$$\hat{Y}(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{y}[n] e^{-j\Omega n}$$

Entonces, para que (10.6) se satisfaga, debe ser cierto que

$$\hat{Y}(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nT) e^{-j\Omega n} \tag{10.7}$$

Ahora, sea $Y_s(\omega)$ quien denote la transformada de Fourier de la señal de salida muestreada $y_s(t) = y(t)p(t)$. Entonces, al sustituir $x$ por $y$ en (10.3) arroja

$$Y_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nT)e^{-j\omega nT} \tag{10.8}$$

y si establecemos $\omega = \Omega/T$ en (10.8) obtenemos

$$Y_s(\omega)|_{\omega=\Omega/T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nT)e^{-j\Omega n} \tag{10.9}$$

Pero el lado derecho tanto de (10.7) como de (10.9) son idénticos y, por lo tanto, para que (10.6) se satisfaga debe ser cierto que

$$\hat{Y}(\Omega) = Y_s(\omega)|_{\omega=\Omega/T} = Y_s\left(\frac{\Omega}{T}\right) \tag{10.10}$$

Debido a que $\hat{Y}(\Omega)$es periódica en $\Omega$ con periodo $2\pi$, sólo es necesario considerar (10.10) para $-\pi \leq \Omega \leq \pi$; es decir,

$$\hat{Y}(\Omega) = Y_s(\omega)|_{\omega=\Omega/T} = Y_s\left(\frac{\Omega}{T}\right), \quad -\pi \leq \Omega \leq \pi \tag{10.11}$$

De (10.11) vemos que la DTFT $\hat{Y}(\Omega)$ de la salida del sistema de tiempo discreto $\hat{y}[n]$ debe ser igual a la transformada de Fourier $Y_s(\omega)$ de la salida muestreada $y_s(t)$, con $Y_s(\omega)$ evaluada en $\omega = \Omega/T$. Ésta es la "condición de igualación" clave en el dominio de la frecuencia.

Para encontrar una discretización, $H_d(\Omega)$, de un sistema de tiempo continuo, $H(\omega)$, que satisfaga la condición de igualación, primero observe que en el dominio $\omega$

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \tag{10.12}$$

A lo largo de esta sección suponemos que el sistema de tiempo continuo es estable, tal que $H(\omega)$ sea igual a la función de transferencia $H(s)$ con $s = j\omega$. Para evitar la distorsión debida al aliasing, también suponemos que

$$|H(\omega)| \leq c \quad \text{para } \omega > \omega_s/2 \tag{10.13}$$

para algún valor finito $c$, y

$$|X(\omega)| = 0 \quad \text{para } \omega > \omega_s/2 \tag{10.14}$$

donde, de nuevo, $\omega_s = 2\pi/T$ es la frecuencia de muestreo.

Con la condición (10.14), se desprende que

$$Y_s(\omega) = H(\omega)X_s(\omega) \text{ para } -\omega_s/2 \leq \omega \leq \omega_s/2 \tag{10.15}$$

donde $Y_s(\omega)$ es la transformada de Fourier de la salida muestreada $y_s(t)$ y $X_s(\omega)$ es la transformada de Fourier de la entrada muestreada $x_s(t)$.

Al combinar la condición de igualación en frecuencia (10.11) y (10.15), se revela que la DTFT $\hat{Y}(\Omega)$ de la salida del sistema de tiempo discreto, $\hat{y}[n]$ está dada por

$$\begin{aligned}\hat{Y}(\Omega) &= [H(\omega)X_s(\omega)]_{\omega=\Omega/T}, \quad -\pi \le \Omega \le \pi \\ &= H\left(\frac{\Omega}{T}\right)X_s\left(\frac{\Omega}{T}\right), \quad -\pi \le \Omega \le \pi \end{aligned} \tag{10.16}$$

Pero,

$$X_s\left(\frac{\Omega}{T}\right) = X_d(\Omega) \tag{10.17}$$

donde $X_d(\Omega)$ es la DTFT de $x[n]$. Logramos la demostración de (10.17) al establecer $\omega = \Omega/T$ en (10.3).

Después, si sustituimos (10.17) en (10.16) obtenemos

$$\hat{Y}(\Omega) = H\left(\frac{\Omega}{T}\right)X_d(\Omega), \quad -\pi \le \Omega \le \pi \tag{10.18}$$

Sin embargo, de los resultados del capítulo 5 [vea (5.60)], vemos que

$$\hat{Y}(\Omega) = H_d(\Omega)X_d(\Omega), \quad -\pi \le \Omega \le \pi \tag{10.19}$$

donde

$$H_d(\Omega) = H_d(z)|_{z=e^{j\Omega}}$$

es la función de respuesta en frecuencia del sistema de tiempo discreto. Por último, si comparamos (10.18) y (10.19) se revela que

$$H_d(\Omega) = H\left(\frac{\Omega}{T}\right), \quad -\pi \le \Omega \le \pi \tag{10.20}$$

Éste es el requerimiento fundamental de diseño especificado en el dominio de frecuencia. Observe que (10.20) define una transformación que mapea el filtro de tiempo continuo con función de frecuencia $H(\omega)$, en el sistema de tiempo discreto con función de frecuencia $H_d(\Omega)$. De manera más precisa, como vemos de (10.20), construimos $H_d(\Omega)$ con sólo establecer $\omega = \Omega/T$ en $H(\omega)$.

La transformación dada por (10.20) puede expresarse en términos de la variable $s$ de la transformada de Laplace, y la variable $z$ de la transformada $z$ de la siguiente forma:

$$H_d(z) = H(s)|_{s=(1/T)\ln z} \tag{10.21}$$

Aquí, ln $z$ es el logaritmo natural de la variable compleja $z$. Para verificar que (10.21) implica (10.20), sólo establezca $z = e^{j\Omega}$ en ambos lados de (10.21). La relación (10.21) muestra cómo el sistema de tiempo continuo con función de transferencia $H(s)$ puede transformarse en el sistema de tiempo discreto con función de transferencia $H_d(z)$. Desafortunadamente, debido a la naturaleza de la función $(1/T)\ln z$, no es posible utilizar (10.21) para derivar una expresión para $H_d(z)$ que es racional en $z$ (es decir, una razón de polinomios en $z$). Sin embargo, la función logarítmica $(1/T)\ln z$ puede aproximarse mediante

$$\frac{1}{T}\ln z \approx \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \tag{10.22}$$

Esto nos lleva a la siguiente transformación del dominio $z$ al dominio $s$:

$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \tag{10.23}$$

Si resolvemos (10.23) para $s$, en términos de $z$, arroja la transformación inversa dada por

$$z = \frac{1+(T/2)s}{1-(T/2)s} \tag{10.24}$$

La transformación definida por (10.24) se conoce como *transformación bilineal* del plano complejo en sí mismo. El término *bilineal* significa que la relación en (10.24) es una función bilineal de $z$ y $s$. Para una explicación detallada de las transformaciones bilineales en la teoría de la función compleja, lea a Churchill y Brown [2003]. Para deducir la transformación bilineal mediante la integración trapezoidal, vea el problema 10.3.

La transformación bilineal (10.24) tiene la propiedad de que mapea el semiplano izquierdo abierto en el disco unitario abierto. En otras palabras, si Re $s < 0$, entonces la $z$ dada por (10.24) se ubica en el disco unitario abierto del plano complejo; es decir, $|z| < 1$. Además, la transformación mapea el eje $j\omega$ del plano complejo en el círculo unitario del plano complejo.

Ahora, si utilizamos la aproximación (10.22) en (10.21) resulta

$$H_d(z) = H\left(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\right) \tag{10.25}$$

Por (10.25), la función de transferencia del filtro digital es (aproximadamente) igual a la función de transferencia del sistema de tiempo continuo dado, con $s$ remplazada por $(2/T)$ $[(z-1)/(z+1)]$.

Observe que, debido a que la transformación bilineal mapea el semiplano abierto izquierdo en el disco unitario abierto, los polos de $H_d(z)$ dados por (10.25) se encuentran en el disco unitario abierto si y sólo si el sistema de tiempo continuo dado es estable (lo cual se asume de aquí en adelante). Por lo tanto, el sistema de tiempo discreto resultante es estable, lo que muestra que la transformación bilineal preserva la estabilidad. Ésta es una propiedad muy deseable para cualquier proceso de discretización.

La transformación bilineal se utiliza comúnmente en el diseño de filtros digitales, como veremos en la siguiente sección, y en el diseño de controladores digitales, como veremos en la sección 10.5. Es importante destacar que en aplicaciones prácticas como el filtrado y control digital, la suposición hecha en (10.14) rara vez se satisface. En cambio, suponemos que $|X(\omega)| \approx 0$ para $\omega > \omega_s/2$, tal que el efecto del aliasing es despreciable.

## 10.2 DISEÑO DE FILTROS IIR

Si un filtro digital va a utilizarse para filtrar señales de tiempo continuo, las especificaciones de diseño por lo general se dan en términos del espectro de frecuencia de tiempo continuo, por ejemplo, ancho de banda y rizo de la banda de paso. Los métodos de diseño están bien establecidos para satisfacer estas especificaciones, con filtros analógicos prototipos pasa bajas, pasa altas, pasa banda, o rechaza banda. Dos ejemplos de estos filtros son los filtros Butterworth y Chebyshev explicados en la sección 8.6.

Por lo tanto, una estrategia razonable es primero diseñar un filtro analógico prototipo con función de respuesta en frecuencia $H(\omega)$, y después seleccionar el filtro digital que mejor se aproxime al comportamiento del filtro analógico deseado. Para obtener una buena aproximación, la función de respuesta en frecuencia, $H_d(\Omega)$, del filtro digital debe diseñarse

de manera que se satisfaga la condición dada en (10.20), es decir, $H_d(\Omega) = H(\omega)$ en el intervalo $-\pi \leq \Omega \leq \pi$, donde $\omega = \Omega/T$. Sin embargo, la aproximación no resulta en un filtro digital $H_d(z)$ que es racional en $z$. La transformación bilineal definida en (10.23) se utiliza en su lugar, lo cual resulta en la aproximación dada por (10.25) que satisface la condición en (10.20) sólo de manera aproximada. El filtro digital resultante tendrá una respuesta al impulso infinita (IIR), y por lo tanto este método de diseño arroja un filtro IIR. Existen otros métodos para diseñar filtros IIR; sin embargo, aquí sólo consideraremos la transformación analógica a digital. Para una explicación sobre otros métodos de diseño, en especial métodos numéricos, consulte a Oppenheim y Schafer [1989].

---

### Ejemplo 10.1 Filtro Butterworth de dos polos

Considere el filtro Butterworth de dos polos con función de transferencia

$$H(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_c s + \omega_c^2}$$

Al construir la discretización $Hd(z)$ definida por (10.25), obtenemos

$$\begin{aligned} H_d(z) &= H\left(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\right) \\ &= \frac{\omega_c^2}{\left(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + \sqrt{2}\omega_c\left(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\right) + \omega_c^2} \\ &= \frac{(T^2/4)(z+1)^2\omega_c^2}{(z-1)^2 + \left(T/\sqrt{2}\right)\omega_c(z+1)(z-1) + (T^2/4)(z+1)^2\omega_c^2} \\ &= \frac{(T^2\omega_c^2/4)(z^2+2z+1)}{\left(1 + \frac{\omega_c T}{\sqrt{2}} + \frac{T^2\omega_c^2}{4}\right)z^2 + \left(\frac{T^2\omega_c^2}{2} - 2\right)z + \left(1 - \frac{\omega_c T}{\sqrt{2}} + \frac{T^2\omega_c^2}{4}\right)} \end{aligned}$$

Para $\omega_c = 2$ y $T = 0.2$, la función de transferencia está dada por

$$H_d(z) = \frac{0.0302(z^2 + 2z + 1)}{z^2 - 1.4514z + 0.5724}$$

La función de magnitud $|H_d(\Omega)|$, graficada en la figura 10.6, se obtiene mediante los siguientes comandos de MATLAB:

```
OMEGA = -pi:2*pi/300:pi;
z = exp(j*OMEGA);
H = 0.0302*(z.^2 + 2*z + 1)./(z.^2 - 1.4514*z + 0.5724);
plot(OMEGA,abs(H))
```

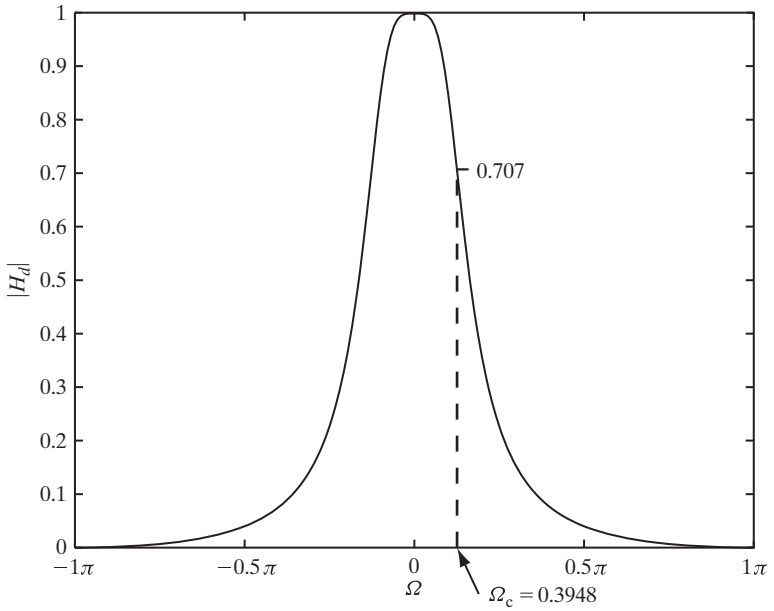



**FIGURA 10.6**
Función de magnitud de la discretización.

En este caso, la frecuencia de corte de la discretización es

$$\Omega_c = 2\tan^{-1}\frac{(2)(0.2)}{2} = 0.3948$$

la cual se acerca mucho al valor deseado $\omega_c T = 0.4$.

---

Para el filtro digital con función de transferencia $H_d(z)$ dada por (10.25), en general, la condición de igualación (10.20) no se satisface, ya que la transformación bilineal es una aproximación a $s = (1/T)\ln z$. Como resultado, si $H(s)$ es la función de transferencia de un filtro analógico pasa bajas con frecuencia de corte $\omega_c$, en general, la frecuencia de corte correspondiente a la discretización $H_d(z)$ no será igual a $\omega_c T$. Se dice que la frecuencia de corte de la discretización es una *deformación* del valor deseado $\omega_c T$, lo cual resulta en un error en la fabricación del filtro digital, del filtro analógico dado. La cantidad de deformación puede calcularse de la siguiente forma.

Establecer $z = e^{j\Omega}$ en (10.25) arroja

$$H_d(\Omega) = H_d(z)|_{z=e^{j\Omega}} = H\left(\frac{2}{T}\frac{e^{j\Omega}-1}{e^{j\Omega}+1}\right) \tag{10.26}$$

Ahora, debido a que la inversa de la transformación bilineal mapea el círculo unitario en el eje $j\omega$, el punto $(2/T)[(e^{j\Omega}-1)/(e^{j\Omega}+1)]$ debe ser igual a algún punto en el eje $j\omega$, es decir,

$$j\omega = \frac{2}{T}\frac{e^{j\Omega}-1}{e^{j\Omega}+1} \tag{10.27}$$

para algún valor de $\omega$. Entonces,

$$\omega = \frac{2}{T}\frac{(1/j)(e^{j\Omega} - 1)}{e^{j\Omega} + 1}$$

$$= \frac{2}{T}\frac{(1/j2)(e^{j(\Omega/2)} - e^{-j(\Omega/2)})}{(1/2)(e^{j(\Omega/2)} + e^{-j(\Omega/2)})}$$

$$= \frac{2}{T}\tan\frac{\Omega}{2} \tag{10.28}$$

La relación inversa es

$$\Omega = 2\tan^{-1}\frac{\omega T}{2} \tag{10.29}$$

Si combinamos (10.26) y (10.27) tenemos

$$H_d(\Omega) = H(\omega)$$

donde $\Omega$ está dada por (10.29).

Por lo tanto, si $\omega_c$ es la frecuencia de corte del filtro analógico dado [con función de transferencia $H(s)$], la frecuencia de corte correspondiente $\Omega_c$ de la discretización $H_d(z)$ está dada por

$$\Omega_c = 2\tan^{-1}\frac{\omega_c T}{2}$$

La cantidad de deformación del valor deseado $\Omega_c = \omega_c T$ depende de la magnitud de $(\omega_c T)/2$. Si $(\omega_c T)/2$ es pequeño, tal que $\tan^{-1}[\omega_c T)/2] \approx (\omega_c T)/2$, entonces

$$\Omega_c \approx 2\left(\frac{\omega_c T}{2}\right) = \omega_c T$$

Así, en este caso, la deformación es pequeña.

Podemos eliminar el efecto de la deformación si *predeformamos* el filtro analógico anterior antes de aplicar la transformación bilineal. En este proceso la frecuencia de corte del filtro analógico se diseña de tal manera que la frecuencia de corte correspondiente, $\Omega_c$, del filtro digital sea igual a $\omega_c T$, donde $\omega_c$ es el valor deseado para la frecuencia de corte del filtro analógico. La relación $\Omega_c = \omega_c T$ se desprende directamente de la condición de igualación deseada (10.20). Así, de (10.29) vemos que la frecuencia de corte analógica predeformada, denotada por $\omega_p$, debe seleccionarse como

$$\omega_p = \frac{2}{T}\tan\frac{\Omega_c}{2} \tag{10.30}$$

Entonces, el filtro analógico debe diseñarse para tener la frecuencia de corte analógica $\omega_p$ (en lugar de $\omega_c$), tal que la distorsión introducida por la transformación bilineal será cancelada por la predeformación. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento:

**Ejemplo 10.2 Predeformación**

Podemos rediseñar el filtro pasa bajas de dos polos del ejemplo 10.1, tal que la frecuencia de corte coincida mediante la predeformación de la frecuencia analógica que explicamos antes. Para una frecuencia de corte analógica deseada de $\omega_c = 2$ y $T = 0.2$, la frecuencia de corte digital deseada es $\Omega_c = 0.4$. La frecuencia analógica predeformada se calcula a partir de (10.30) para que sea $\omega_p = 2.027$. Si sustituimos $\omega_p$ por $\omega_c$ en la función de transferencia del filtro digital construido en el ejemplo 10.1 obtenemos el filtro rediseñado con función de transferencia

$$H_d(z) = \frac{0.0309(z^2 + 2z + 1)}{z^2 - 1.444z + 0.5682} \tag{10.31}$$

### 10.2.1 Aplicación para la eliminación de ruido

Considere el problema de filtrar (o reducir en magnitud) el ruido $e[n]$ contenido en una señal $x[n] = s[n] + e[n]$, donde $s[n]$ es la parte suave de $x[n]$. En las secciones 5.6 y 7.5 consideramos algunos diseños simples para reducir el ruido que puede estar presente en una señal $x[n]$. Debido a que la frecuencia de corte digital $\Omega_c$ del filtro digital IIR dado por (10.31) es igual a 0.4 radianes por unidad de tiempo, este filtro debe ser muy efectivo para reducir cualquier ruido de alta frecuencia que pudiese estar presente en una señal. Para ver si éste es el caso, en el siguiente ejemplo aplicamos el filtro a la información de precios de cierre para el fondo índice de acciones QQQQ.

**Ejemplo 10.3 Aplicación del diseño de un filtro IIR a información de precios de acciones**

El filtro con función de transferencia (10.31) puede aplicarse al precio de cierre $c[n]$ del fondo índice de acciones QQQQ para el periodo de 50 días hábiles, del 1 de marzo de 2004 al 10 de mayo de 2004, mediante los siguientes comandos de MATLAB:

```
c = csvread('QQQQdata2.csv',1,4,[1 4 50 4]);
y(1)=c(1);y(2)=c(2);
for i=3:50;
  y(i)=1.444*y(i-1)-0.5682*y(i-2)+0.0309*[c(i)+2*c(i-1)+c(i-2)];
end;
```

El resultado aparece en la figura 10.7, donde el precio de cierre $c[n]$ se graficó con 'o' y la salida del filtro $y[n]$ se graficó con '*'. Observe que $y[n]$ es muy suave, pero está retrasada, en comparación con $c[n]$, por tres o cuatro días. Sin embargo, podemos reducir el tiempo de retraso a través del filtro por dos días si primero multiplicamos la función de transferencia del filtro por $z^2$. A partir de las propiedades de la transformada $z$ (vea la tabla 7.2), esto corresponde a realizar un desplazamiento por la izquierda de dos escalones a la respuesta al impulso del filtro. Esto resulta en la función de transferencia

$$\frac{0.0309(z^2 + 2z + 1)z^2}{z^2 - 1.444z + 0.5682}$$

Al expandirla mediante la división larga obtenemos

$$\frac{0.0309(z^2 + 2z + 1)z^2}{z^2 - 1.444z + 0.5682} = 0.0309z^2 + 0.1064z + \frac{0.2021z^2 - 0.0605z}{z^2 - 1.444z + 0.5682} \tag{10.32}$$

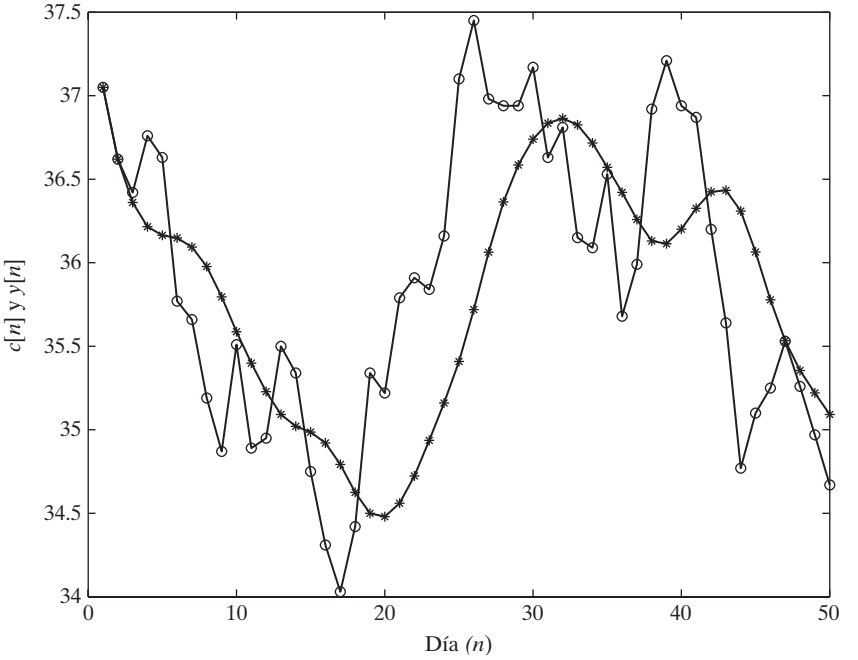



**FIGURA 10.7**
Entrada y salida del filtro del ejemplo 10.3.

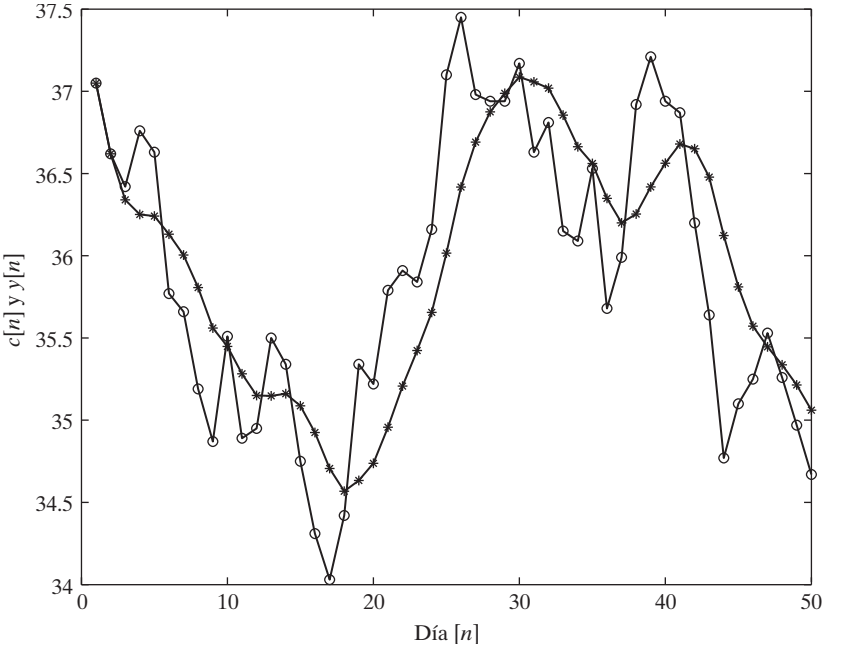



**FIGURA 10.8**
Entrada y salida del filtro modificado.

Los dos primeros términos del lado derecho de (10.32) corresponden a los valores de la respuesta al impulso del filtro en los tiempos $n = -2$ y $n = -1$. Debido a que el filtro que intentamos diseñar debe ser causal, estos dos valores deben eliminarse, y por lo tanto la función de transferencia del filtro se vuelve

$$\frac{0.2021z^2 - 0.0605z}{z^2 - 1.444z + 0.5682} \tag{10.33}$$

Por último, la función de transferencia $H(z)$ del filtro debe ser igual a 1 cuando $z = 1$, ya que no debe existir ganancia o atenuación a través del filtro cuando la entrada es igual a una constante. Al establecer $z = 1$ en (10.33), tenemos $H(1) = 0.1416/0.1242 = 1.401$. Así, la función de transferencia del filtro deseado es

$$\frac{\left(\frac{1}{1.1401}\right)\left(0.2021z^2 - 0.0605z\right)}{z^2 - 1.444z + 0.5682} \tag{10.34}$$

La salida $y[n]$ de este filtro, junto con la entrada $c[n]$, aparecen en la figura 10.8. De nuevo, graficamos $c[n]$ con 'o' y $y[n]$ con '*'. De la figura 10.8 vemos que el retraso en el tiempo a través del filtro modificado es de aproximadamente dos días, a diferencia de los tres o cuatro días en el filtro con la función de transferencia (10.31). Sin embargo, al comparar las figuras 10.7 y 10.8 se revela que la salida del filtro modificado no es tan suave como la salida del filtro con la función de transferencia (10.31), por lo que se paga un precio por reducir dos días el tiempo de retraso.

**Aplicación al mercado de acciones.** En la sección 7.5, consideramos el método MACD para comerciar mediante el uso de filtros IIR PMPE con diferentes valores del parámetro $b$. Recuerde que la "señal MACD" es la diferencia entre la salida del "filtro más rápido" y la salida del "filtro más lento". En lugar de utilizar filtros IIR PMPE, podemos formar la señal de diferencia si restamos la salida del filtro con función de transferencia (10.31) de la salida del filtro con función de transferencia (10.34). Es posible que esta señal de diferencia arroje un beneficio más alto para ciertos periodos que el obtenido mediante la señal MACD formada a partir de las salidas de los filtros PMPE. Existen también otros ejemplos de filtros digitales que podrían utilizarse para formar una señal de diferencia para el comercio. Invitamos a los lectores interesados a que investiguen esto, a través de información histórica de QQQQ o de alguna otra acción.

## 10.3 DISEÑO DE FILTROS IIR MEDIANTE MATLAB

En esta sección mostraremos que el Signal Processing Toolbox de MATLAB puede utilizarse para diseñar un filtro digital mediante los prototipos analógicos de Butterworth y Chebyshev, que explicamos en la sección 8.6. Debemos destacar que existen otros filtros analógicos prototipo que están disponibles en MATLAB, pero no los consideramos en este libro. Para diseñar un filtro IIR vía MATLAB, el primer paso es utilizarlo para diseñar un filtro analógico que satisfaga los criterios deseados, y después mapearlo en un filtro de tiempo discreto (digital) mediante la transformación bilineal. Recuerde, del capítulo 8, que el diseño de un filtro analógico mediante MATLAB comienza con el diseño de un filtro pasa bajas de $N$ polos con ancho de banda normalizado a 1 rad/s. Si el filtro analógico es un Butterworth, se utiliza el comando `buttap`, mientras que el comando para un Chebyshev es

`cheb1ap`. Después el filtro se transforma mediante transformaciones de frecuencia en un filtro pasa bajas con un ancho de banda diferente o en un pasa altas, pasa banda o rechaza banda, con los requerimientos de frecuencia deseados. En MATLAB, la función de transferencia resultante del filtro analógico se almacena con los coeficientes del numerador y del denominador en vectores. Esta función de transferencia puede mapearse en una función de transferencia de un filtro digital mediante el comando `bilinear`.

### Ejemplo 10.4 Diseño de un filtro Butterworth mediante MATLAB

Filtrado digital de señales de tiempo continuo

El filtro pasa bajas de dos polos Butterworth con $\omega_c = 2$ y $T = 0.2$, diseñado en el ejemplo 10.1, puede encontrarse a través de los siguientes comandos:

```
[z,p,k] = buttap(2); % crea un filtro de 2 polos
[num,den] = zp2tf(z,p,k);
wc = 2;  % frecuencia de corte deseada
[num,den] = lp2lp(num,den,wc);
T = 0.2;
[numd,dend] = bilinear(num,den,1/T)
```

El programa diseña un filtro Butterworth pasa bajas de dos polos con frecuencia de corte de 1 rad/s, y después lo transforma en un filtro pasa bajas con $\omega_c = 2$. Recuerde de la sección 8.6 que la transformación de frecuencia se lleva a cabo con el comando `lp2lp`. Después, la transformación bilineal se utiliza para mapear el filtro al dominio $z$. Los vectores resultantes que contienen los coeficientes del filtro digital están dados por

```
numd = [0.0302 0.0605 0.0302]
dend = [1 -1.4514 0.5724]
```

Este resultado corresponde exactamente al filtro generado en el ejemplo 10.1.

El Signal Processing Toolbox incluye los archivos M, `butter` y `cheby1`, que ya contienen todos los pasos necesarios para diseñar sobre la base de los prototipos analógicos. Estos comandos primero diseñan el filtro analógico adecuado, y después lo transforman al tiempo discreto mediante la transformación bilineal. Los tipos de filtros disponibles son pasa bajas, pasa altas y rechaza banda. Los archivos M requieren que el número de polos sea determinado, y que las frecuencias de corte sean especificadas. Recuerde que la frecuencia de tiempo continuo, $\omega$, está relacionada con la frecuencia de tiempo discreto, $\Omega$, mediante $\Omega = \omega T$. Así, la frecuencia de corte digital es $\Omega_c = \omega_c T$, donde $\omega_c$ es la frecuencia de corte analógica. Los archivos M también requieren que la frecuencia de corte sea normalizada por $\pi$.

### Ejemplo 10.5 Diseño alterno

Considere el filtro pasa bajas que diseñamos en el ejemplo 10.1. Este diseño puede realizarse con los siguientes comandos:

```
N = 2;      % número de polos
T = 0.2;    % tiempo de muestreo
wc = 2;     % frecuencia de corte analógica
Wc = wc*T/pi;    % frecuencia de corte digital normalizada
[numd,dend] = butter(N,Wc)
```

El filtro resultante es definido por los coeficientes del numerador y del denominador

```
numd = [0.0309 0.0619 0.0309];
dend = [1 -1.444 0.5682];
```

Esto coincide con los resultados que encontramos en el ejemplo 10.2, que utiliza el método de predeformación.

### Ejemplo 10.6 Filtro Chebyshev tipo 1 pasa altas

Filtrado digital de señales de tiempo continuo

Ahora el objetivo es diseñar un filtro Chebyshev pasa altas de tipo 1, con frecuencia de corte analógica de $\omega_c = 2$ rad/s e intervalo de muestreo $T = 0.2$, y un rizo en la banda de paso de 3dB. Los comandos de MATLAB son

```
N = 2;    % número de polos
Rp = 3;   % rizo de la banda de paso
T = .2;   % periodo de muestreo
wc = 2;   % frecuencia de corte analógica
Wc = wc*T/pi;  % frecuencia de corte digital normalizada
[numd,dend] = cheby1(N,Rp,Wc,'high')
```

El filtro está dado por

```
numd = [0.5697 -1.1394 0.5697]
dend = [1 -1.516 0.7028]
```

La respuesta en frecuencia del filtro digital aparece en la figura 10.9.

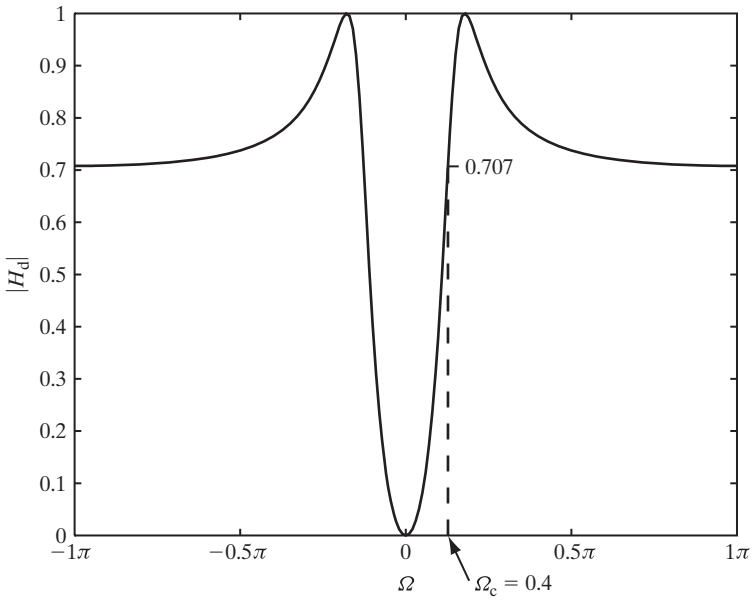



**FIGURA 10.9**
Respuesta en frecuencia del filtro digital del ejemplo 10.6.

Filtrado digital de señales de tiempo continuo

### Ejemplo 10.7 Frecuencias específicas de filtrado

Para la señal

$$x(t) = 1 + \cos t + \cos 5t$$

el objetivo es eliminar el componente cos 5*t* mediante un filtro Butterworth digital pasa bajas de dos polos. Debido a que la componente de más alta frecuencia de $x(t)$ es 5 rad/s, para evitar el aliasing, la frecuencia de muestreo debe ser de por lo menos 10 rad/s. Así, un periodo de muestreo de $T = 0.2$ es lo suficientemente pequeño para evitar el aliasing (lo que equivale a $\omega_s = 2\pi/T = 10\pi$ rad/s). Además, una frecuencia de corte $\omega_c$ de 2 rad/s debe resultar en la atenuación de la componente cos 5*t*, con poca atenuación de 1 + cos *t*. Entonces, el filtro diseñado en los ejemplos 10.4 y 10.5 deben ser adecuados para la tarea de filtrado.

Los siguientes comandos crean la versión muestreada de $x(t)$, y después la filtran mediante el comando `filter`:

```
numd = [0.0309 0.0619 0.0309]; % define el filtro digital
dend = [1 -1.444 0.5682];
n = 0:80;
T = 0.2;
x = 1 + cos(T*n) + cos(T*5*n);
y = filter(numd,dend,x);
% grafica x(t) con mayor resolución
t = 0:0.06:15;
xa = 1 + cos(t) + cos(5*t);
subplot(211),plot(t,xa); % entrada analógica x(t)
subplot(212),plot(n*T,y); % salida analógica y(t)
pause
subplot(211),stem(n*T,x); % entrada muestreada x[n]
subplot(212),stem(n*T,y); % salida del filtro y[n]
```

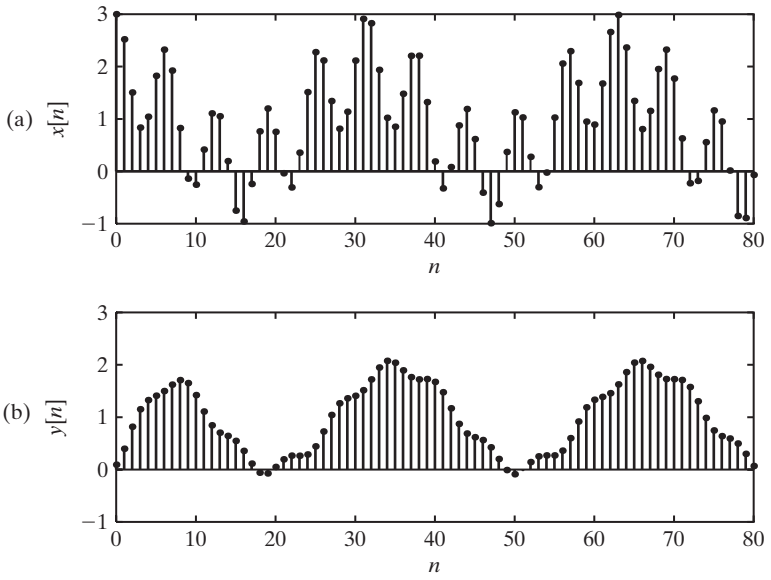



**FIGURA 10.10**
Gráfica de (a) una señal de tiempo discreto, $x[n]$, y (b) salida $y[n]$ del filtro digital.

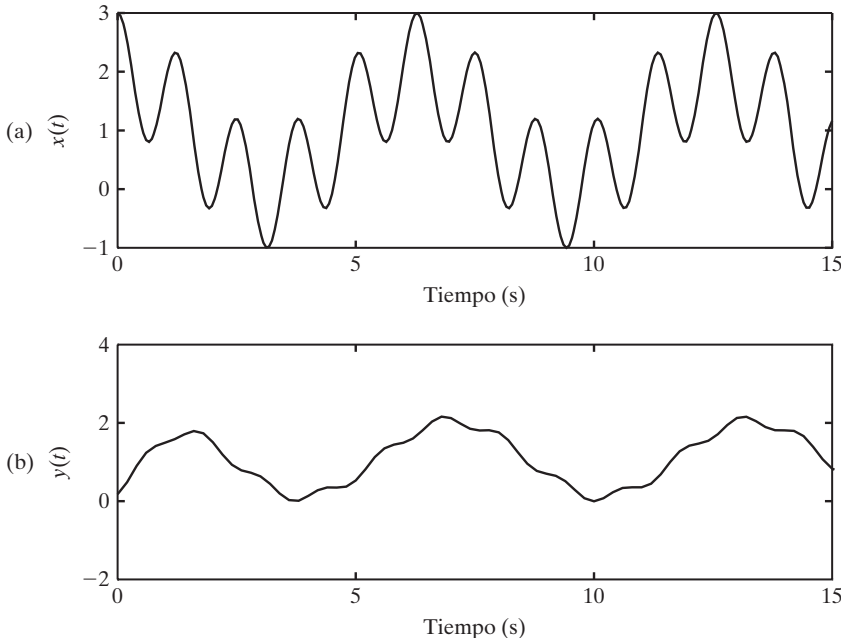



**FIGURA 10.11**
Gráfica de (a) señal analógica $x(t)$ y (b) salida analógica $y(t)$.

La señal de tiempo discreto, $x[n]$, y la salida del filtro digital, $y[n]$, aparecen en la figura 10.10. En el programa anterior, la salida analógica $y(t)$ se genera mediante el comando `plot`, el cual aproxima la salida a la de un reconstructor ideal. Las gráficas de la entrada analógica $x(t)$, y la salida analógica $y(t)$ aparecen en la figura 10.11. Observe que existe un transitorio inicial en $y(t)$, debido al efecto de las condiciones iniciales, y conforme $t$ se incrementa, la salida analógica $y(t)$ rápidamente se establece en un comportamiento de estado estable, ya que los polos del filtro digital se encuentran dentro del círculo unitario y por lo tanto, el filtro es estable. De la gráfica de $y(t)$, en la figura 10.11b, resulta claro que la componente de frecuencia cos $5t$ se ha atenuado de manera importante; sin embargo, $y(t)$ aún presenta una pequeña componente de cos $5t$. Podríamos haber obtenido un mejor resultado al utilizar un filtro de mayor orden, ya que polos adicionales pueden arrojar una transición más pronunciada entre la banda de paso y la banda de rechazo (vea el capítulo 8). Para lograr un mejor rechazo del término cos $5t$, invitamos al lector a rescribir el programa anterior con un filtro de 5 polos en lugar de uno con dos.

### Ejemplo 10.8 Cómo eliminar componentes de una señal

De nuevo considere la señal $x(t)$ definida en el ejemplo 10.7:

$$x(t) = 1 + \cos t + \cos 5t$$

En este ejemplo, deseamos eliminar la componente $1 + \cos t$, mediante el filtro pasa altas digital que diseñamos en el ejemplo 10.6. Los siguientes comandos implementan el filtro digital y grafican los resultados:

```
numd = [0.5697 -1.1394 0.5697]; % define el filtro digital
dend = [1 -1.516 0.7028];
n = 0:75;
T = 0.2;
x = 1 + cos(T*n) + cos(T*5*n);
y = filter(numd,dend,x);
% grafica x(t) con mayor resolución
t = 0:0.1:15;
xa = 1 + cos(t) + cos(5*t);
subplot(211),plot(t,xa); % entrada analógica x(t)
subplot(212),plot(n*T,y); % salida analógica y(t)
```

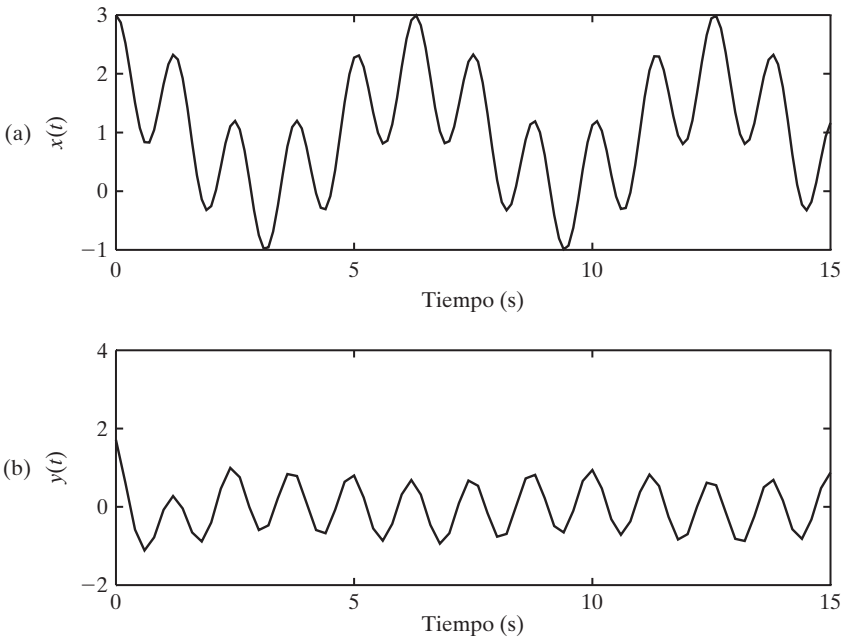



**FIGURA 10.12**
Gráfica de (a) señal analógica $x(t)$, y (b) salida analógica $y(t)$ del ejemplo 10.8.

Las gráficas de $x(t)$ y $y(t)$ aparecen en la figura 10.12. En la gráfica de $y(t)$, observe que la componente cd de $x(t)$ se filtró y la componente cos $t$ se redujo en aproximadamente 85%, mientras que la componente cos $5t$ permaneció intacta. Si el filtro se hubiese diseñado con una frecuencia de corte analógica de mayor valor, digamos $\omega_c = 3$, la componente cos $t$ se habría reducido junto con algo de atenuación de cos $5t$. Invitamos al lector a intentar esto como ejercicio.

Filtrado digital de señales de tiempo continuo

## Ejemplo 10.9 Filtrado de señales aleatorias

Considere la señal aleatoria de tiempo continuo $x(t)$ que aparece en la figura 10.13a. Supongamos que la señal es de banda limitada a $5\pi$ rad/s, tal que el tiempo de muestreo de $T = 0.2$ sea aceptable. La señal muestreada se envía primero a través del filtro digital pasa bajas diseñado en el ejemplo 10.5. La salida analógica resultante $y(t)$ aparece en la figura 10.13b. Observe que la se-

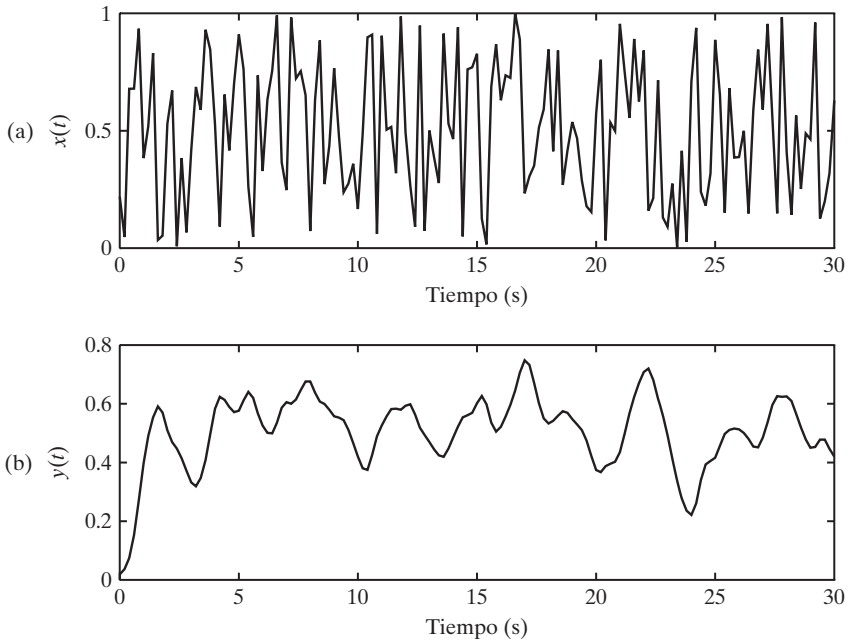



**FIGURA 10.13**
Gráficas de (a) la señal $x(t)$, y (b) la salida analógica filtrada con un pasa bajas, $y(t)$, del ejemplo 10.9.

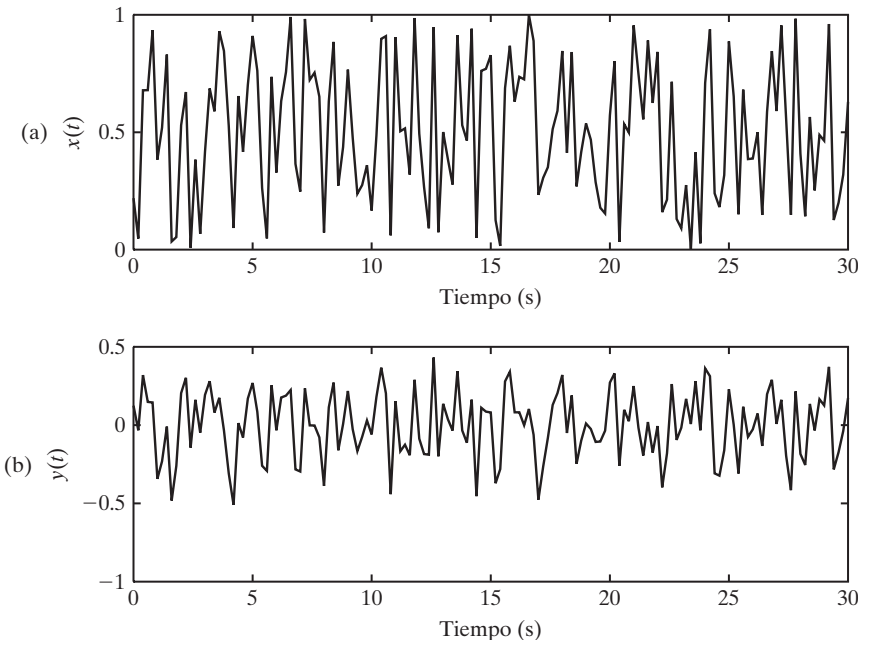



**FIGURA 10.14**
Gráficas de (a) la señal $x(t)$, y (b) la salida analógica filtrada con un pasa altas, $y(t)$, del ejemplo 10.9.

ñal filtrada $y(t)$ es más suave que la señal de entrada $x(t)$, lo cual es resultado de la eliminación de las componentes de más alta frecuencia en $x(t)$.

La señal muestreada después se envía a través del filtro pasa altas digital diseñado en el ejemplo 10.6, y la salida analógica resultante aparece en la figura 10.14b. Observe que la componente de cd se eliminó, mientras que la amplitud pico a pico de la señal $x(t)$ permanece aproximadamente igual a 1.

Para generar la salida filtrada $y(t)$, sustituya la definición de $x(t)$ en los archivos M correspondientes a los ejemplos 10.7 y 10.8, por el comando `x = rand(1,length(n));`. Esto genera un vector con números aleatorios que se distribuyen de manera uniforme entre 0 y 1.

## 10.4 DISEÑO DE FILTROS FIR

Como vimos antes, en contraste con un filtro IIR, un filtro FIR es un filtro digital, donde la respuesta al impulso (es decir, la respuesta al pulso unitario) $h[n]$ es cero para toda $n \geq N$. Podemos diseñar un filtro FIR si truncamos la respuesta al impulso de un filtro IIR. En particular, sea $H(\Omega)$ quien represente al filtro IIR deseado, con la respuesta al impulso $h[n]$. Un filtro FIR correspondiente está dado por

$$h_d[n] = \begin{cases} h[n], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{cualquier otra} \end{cases}$$

donde $N$ es la longitud del filtro. La función de transferencia del filtro FIR está dada por

$$H_d(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h_d[n] z^{-n}$$

La respuesta en frecuencia correspondiente puede calcularse de manera directa a partir de la definición de la DTFT:

$$H_d(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h_d[n] e^{-jn\Omega} \tag{10.35}$$

Lo ideal sería que $H_d(\Omega)$ fuera una aproximación cercana a la DTFT de $h[n]$ (el filtro IIR deseado); es decir, $H_d(\Omega) \approx H(\Omega)$. Sin embargo, al truncar $h[n]$ se introducen algunos errores en la respuesta en frecuencia, tal que $H_d(\Omega)$ pueda ser bastante diferente de $H(\Omega)$.

De manera analítica, el truncar una respuesta al impulso infinita puede expresarse como una multiplicación por una señal $w[n]$ llamada ventana:

$$h_d[n] = \omega[n] h[n] \tag{10.36}$$

En este caso,

$$\omega[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{10.37}$$

Recuerde del capítulo 4 que la multiplicación en el dominio del tiempo corresponde a la convolución en el dominio de frecuencia. Por tanto, al tomar la DTFT de ambos lados de (10.36) arroja

$$H_d(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\Omega - \lambda) W(\lambda) d\lambda \tag{10.38}$$

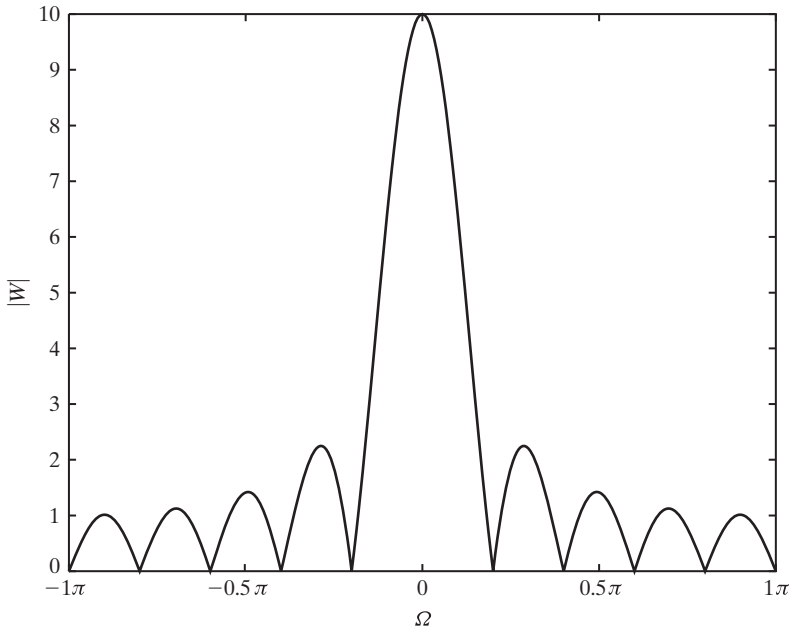



**FIGURA 10.15**
Gráfica de la magnitud $|W(\Omega)|$ de la DTFT de $w[n]$.

donde la DTFT, $W(\Omega)$, de $w[n]$ está dada por

$$W(\Omega) = \frac{\text{sen}(\Omega N/2)}{\text{sen}(\Omega/2)} e^{-j\Omega(N-1)/2}$$

La gráfica de $|W(\Omega)|$ se muestra en la figura 10.15 para $N = 10$. Observe que existe un lóbulo principal y lóbulos laterales con cruces en cero espaciados regularmente en $\Omega = 2\pi m/N$, para $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Para lograr una igualación perfecta entre $H_d(\Omega)$ y $H(\Omega)$, vemos de (10.38) que $W(\Omega)$ tendría que ser igual al impulso $2\pi\delta(\Omega)$. Esto corresponde a $w[n] = 1$ para toda $n$ y, por lo tanto, para tal $w[n]$ no hay corte de señal y el filtro dado por (10.36) sería IIR.

Sin embargo, es posible hacer que $W(\Omega)$ sea una aproximación cercana a la función impulso; en particular, entre más estrecho sea el lóbulo principal y más pequeño sea el tamaño de los lóbulos laterales de $|W(\Omega)|$, más se aproximará $W(\Omega)$ a la función impulso. Conforme $N$ se incrementa, la amplitud del lóbulo principal de $|W(\Omega)|$ se vuelve más estrecha. Debido a que $N$ es la longitud del filtro, entonces entre mayor sea el valor de $N$, más cercana será la aproximación de $W(\Omega)$ a un impulso y, por lo tanto, más se aproximará $H_d(\Omega)$ a $H(\Omega)$. Sin embargo, desde un punto de vista práctico, puede resultar demasiado complejo implementar un filtro con una longitud muy grande.

Un procedimiento para diseñar un filtro FIR se resume en los siguientes pasos: primero, seleccione una función de respuesta en frecuencia $H_i(\Omega)$ para un filtro ideal valuado en reales, con las características de frecuencia deseadas. A partir de los resultados del capí-

tulo 5, si tomamos la DTFT inversa de una función en frecuencia valuada en reales, $H_i(\Omega)$, producirá una función de tiempo $h_i[n]$ que es simétrica alrededor de $n = 0$; es decir,

$$h_i[n] = h_i[-n], n = 0, 1, 2, \ldots \tag{10.39}$$

Entonces, $h_i[n]$ debe tener valores diferentes de cero para $n < 0$ y, por lo tanto, el filtro ideal es no causal. Para producir un filtro causal, la respuesta al impulso $h_i[n]$ debe retrasarse un número suficiente de unidades de tiempo, tal que las características importantes de la $h_i[n]$ retrasada ocurran para $n \geq 0$. Sea el retraso igual a un entero $m$, tal que la respuesta al impulso retrasada sea igual a $h_i[n - m]$. Después, trunque $h_i[n - m]$ para $n < 0$, y para $n > N - 1$, donde $N = 2m + 1$, para obtener el filtro FIR con la siguiente respuesta al impulso:

$$h_d[n] = \begin{cases} h_i[n - m] & \text{para } 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{10.40}$$

Observe que la simetría en $h_i[n]$ alrededor de $n = 0$, como está dada por (10.39), resulta en una $h_d[n]$ simétrica alrededor de $n = m$, tal que $h_d[n] = h_d[2m - n], n = 0,1,\ldots, N - 1$. La figura 10.16 muestra ejemplos de simetría en $h_d[n]$.

Debido a la simetría en $h_d[n]$, vemos que la función de respuesta en frecuencia $H_d(\Omega)$ puede expresarse de la forma

$$H_d(\Omega) = A(\Omega)e^{-jm\Omega} \tag{10.41}$$

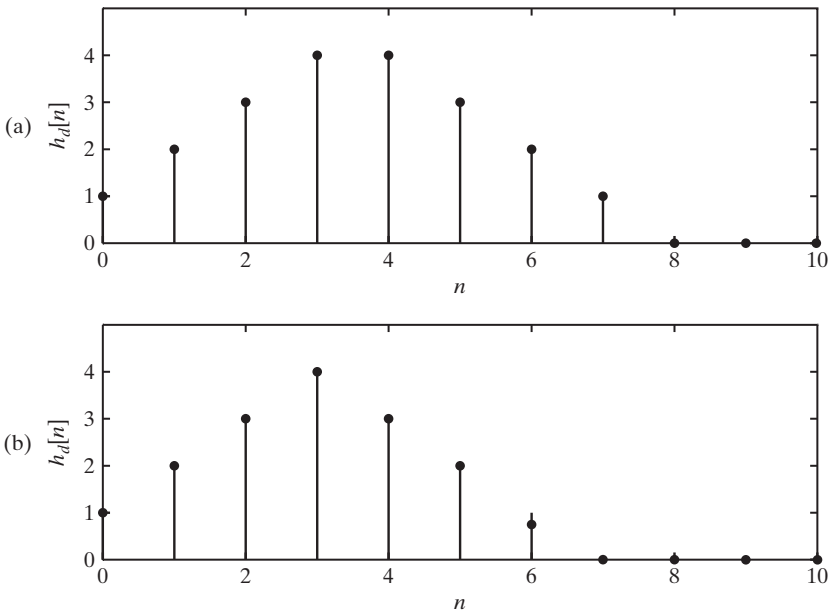



**FIGURA 10.16**
Filtros FIR con simetría en el caso en que (a) $m = 7/2, n = 8$, y (b) $m = 3, N = 7$.

donde $A(\Omega)$ es una función de $\Omega$, valuada en reales. Si $A(\Omega) \geq 0$ para $0 \leq \Omega \leq \pi$, entonces de (10.41) vemos que el filtro FIR tiene una función de fase lineal dada por $\angle A(\Omega) = -m\Omega$ para $0 \leq \Omega \leq \pi$. Por lo tanto, en este caso el filtro retrasa cualquier entrada en $m$ unidades de tiempo. Si $A(\Omega) < 0$ para $0 < \Omega_1 < \Omega < \Omega_2 < \pi$, entonces $\angle A(\Omega) = \pi - m\Omega$ para $\Omega_1 < \Omega < \Omega_2$. En este caso, el filtro cambia el signo de cualquier entrada sinusoidal cuya frecuencia $\Omega$ se encuentre en el intervalo $\Omega_1 < \Omega < \Omega_2$.

En el desarrollo anterior, supusimos que el retraso $m$ era un entero que resultó en un filtro de longitud impar (es decir, $N = 2m + 1$ es impar). Un filtro FIR de longitud par también puede diseñarse si seleccionamos $m$ tal que sea la mitad de un entero. El filtro aún estaría definido como en (10.40), pero ya no sería una versión truncada y retrasada del filtro ideal.

### 10.4.1 Procedimiento alterno para diseñar un FIR

Un procedimiento de diseño más estándar, pero equivalente para diseñar un filtro FIR es reordenar los pasos del procedimiento anterior de la siguiente manera. Debido a que el desplazamiento de $m$ muestras en el dominio del tiempo equivale a multiplicar por $e^{-j\Omega m}$ en el dominio de frecuencia, podemos realizar el desplazamiento en el tiempo antes de tomar la DTFT inversa. La diferencia en los métodos se basa en la preferencia entre trabajar en el dominio del tiempo o en el de frecuencia. Este procedimiento de diseño puede resumirse en los siguientes pasos: seleccione un filtro ideal con función de frecuencia valuada en reales $H_i(\Omega)$, y después multiplíquela por $e^{-j\Omega m}$, donde $m$ es un entero o un entero dividido entre 2. Posteriormente, se calcula la DTFT inversa del producto $e^{-j\Omega m}H_i(\Omega)$, y la secuencia resultante se trunca para $n < 0$ y $n > N - 1$, donde $N = 2m + 1$. Si $m$ se selecciona para que sea un entero, el filtro resultante coincide con la forma de (10.40) y tiene una longitud impar (es decir, $N = 2m + 1$). Si $m$ se selecciona para que sea la mitad de un entero, se obtiene un filtro FIR de longitud par que ya no sería una versión truncada y retrasada del filtro ideal. Así, mientras el primer procedimiento de diseño descrito anteriormente es muy intuitivo, el procedimiento alterno es más general y da como resultado filtros de longitud par o impar.

---

**Ejemplo 10.10 Filtro FIR pasa bajas**

Considere el filtro ideal pasa bajas con función de respuesta en frecuencia $H_i(\Omega)$ que aparece en la figura 10.17. Observe que la frecuencia de corte es $\Omega_c$. Para hacer que el filtro sea causal, introduzca un desplazamiento de fase de $e^{-j\Omega m}$ en $H_i(\Omega)$. La función de respuesta en frecuencia $H(\Omega)$ del filtro resultante está dada entonces por $H(\Omega) = H_i(\Omega)e^{-j\Omega m}$. A partir de la definición de $H_i(\Omega)$, $H(\Omega)$ puede escribirse en la forma

$$H(\Omega) = \begin{cases} e^{-j\Omega m} & \text{si } |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0 & \text{si } |\Omega| > \Omega_c \end{cases} \tag{10.42}$$

Podemos calcular la respuesta al impulso $h[n]$ de este filtro si tomamos la DTFT inversa de (10.42), a través de los resultados del capítulo 5. Esto arroja

$$h[n] = \frac{\text{sen}(\Omega_c(n - m))}{\pi(n - m)} = \frac{\Omega_c}{\pi}\text{senc}\left[\frac{\Omega_c(n - m)}{\pi}\right]$$

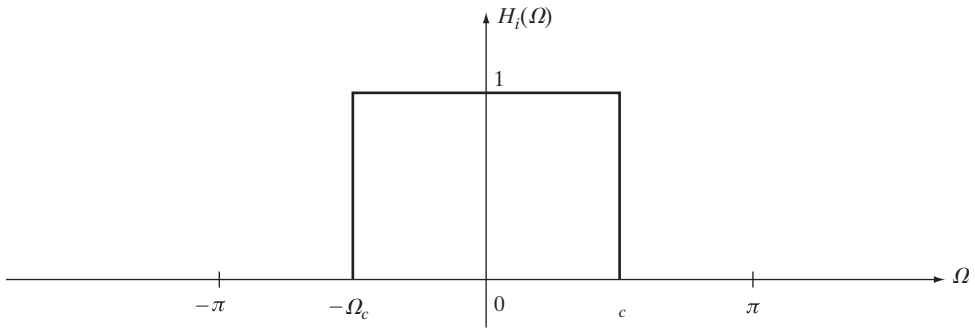



**FIGURA 10.17**
Función de respuesta en frecuencia $H_i(\Omega)$ del filtro ideal pasa bajas del ejemplo 10.10.

Obtenemos el filtro FIR al truncar la respuesta $h[n]$ para $n < 0$ y para $n > N - 1 = 2m$, lo que arroja

$$h_d[n] = \begin{cases} \dfrac{\Omega_c}{\pi}\text{senc}\left[\dfrac{\Omega_c(n - m)}{\pi}\right] & \text{para } 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases} \tag{10.43}$$

Para $\Omega_c = 0.4$, la respuesta al impulso del filtro ideal con un desplazamiento de fase igual a cero (es decir, en el caso $m = 0$) aparece en la figura 10.18. Observe los valores diferentes de cero de la respuesta al impulso para $n < 0$, los cuales resultan de la naturaleza no causal de este filtro. En la figura 10.19 aparece la respuesta al impulso del filtro FIR resultante, definido por (10.43) para los casos en que $m = 10$ y $m = \frac{21}{2}$. Observe que las longitudes del filtro FIR son $N = 21$ y $N = 22$, respectivamente.

La función de respuesta en frecuencia $H_d(\Omega)$ del filtro FIR con respuesta al impulso $h_d[n]$, se encuentra mediante el cálculo directo de la definición dada por (10.35). Esto arroja la función de magnitud $|H_d(\Omega)|$ que aparece en la figura 10.20a para el caso en que $N = 21$. Si comparamos las figuras 10.17 y 10.20a se revela que, en contraste con la función de frecuencia $H(\Omega)$ del filtro ideal IIR, la función en frecuencia $H_d(\Omega)$ del filtro FIR no tiene una transición pronunciada en-

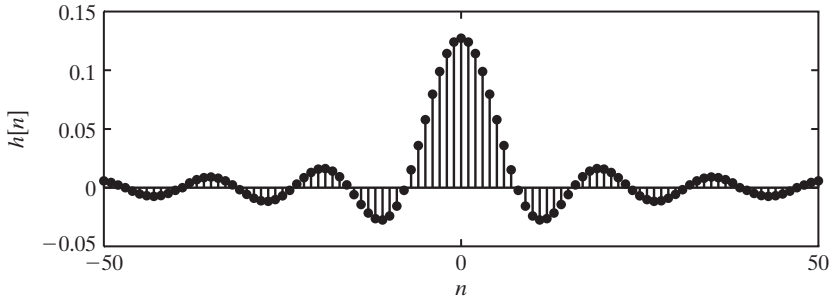



**FIGURA 10.18**
Respuesta al impulso del filtro ideal del ejemplo 10.10.

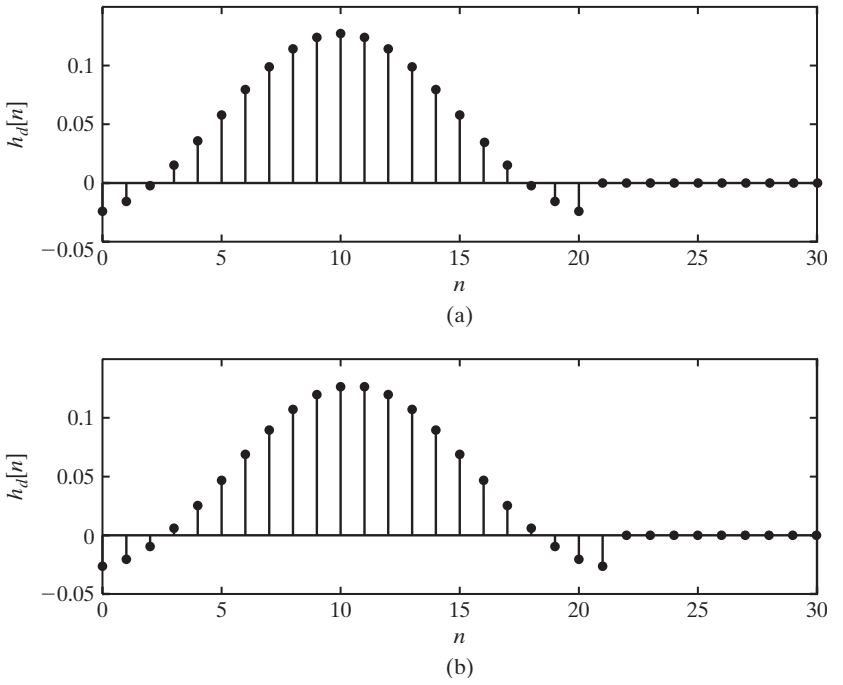



**FIGURA 10.19**
Respuestas al impulso del filtro FIR para (a) $N = 21$, y (b) $N = 22$.

tre la banda de paso y la banda de rechazo. Además, existe cierto rizo en la gráfica de magnitud de $H_d(\Omega)$, lo cual es resultado del proceso de truncado. Para $N = 41$, la magnitud de $H_d(\Omega)$ aparece en la figura 10.20b. Observe que el rizo tiene aproximadamente la misma magnitud que en el caso en que $N = 21$, pero ahora la transición es mucho mejor.

Los comandos de MATLAB para calcular la función de respuesta en frecuencia del filtro FIR para $N = 21$ son

```
Wc = .4; % frecuencia de corte digital
N = 21; % longitud del filtro
m = (N-1)/2; % desplazamiento de la fase
n = 0:2*m + 10; % define los puntos a graficar
h = Wc/pi*sinc(Wc*(n-m)/pi); % filtro ideal retrasado
w = [ones(1,N) zeros(1,length(n)-N)]; % ventana
hd = h.*w;
W = -pi:2*pi/300:pi; % grafica la respuesta en frecuencia
Hd = freqz(hd,1,W);
plot(W,abs(Hd));
```

Para concluir este ejemplo, considere la señal analógica $x(t)$ que aparece en la figura 10.21a. Recuerde que utilizamos esta señal en los ejemplos 10.7 y 10.8. El filtro FIR pasa bajas que diseñamos antes para $N = 21$ puede utilizarse para filtrar la señal y eliminar la componente cos $5t$. El filtro pasa bajas que construimos antes fue diseñado con $\Omega_c = 0.4$, la cual es la misma

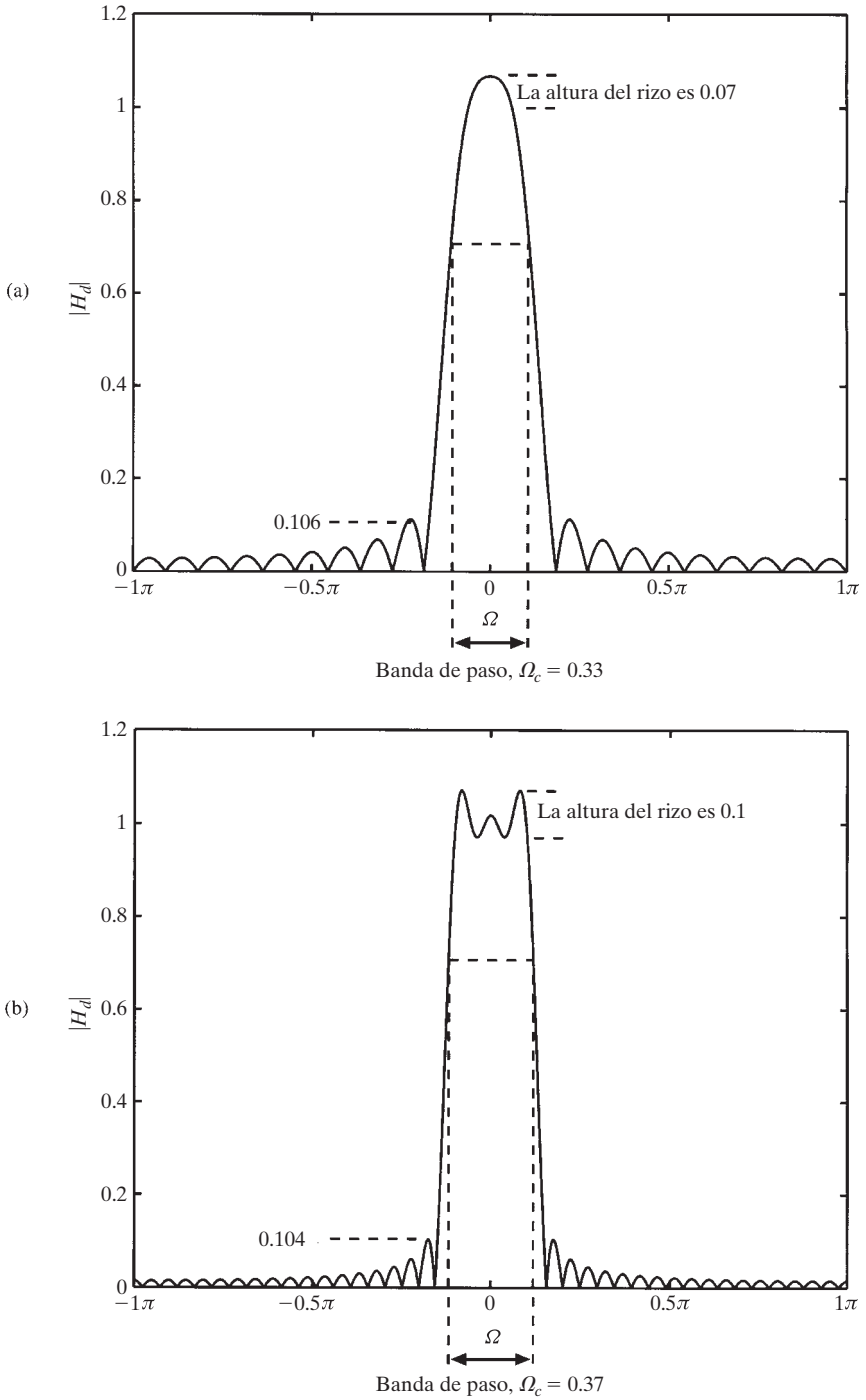



**FIGURA 10.20**
Magnitud del filtro FIR $|H_d(\Omega)|$ para el caso (a) $N = 21$, y (b) $N = 41$.

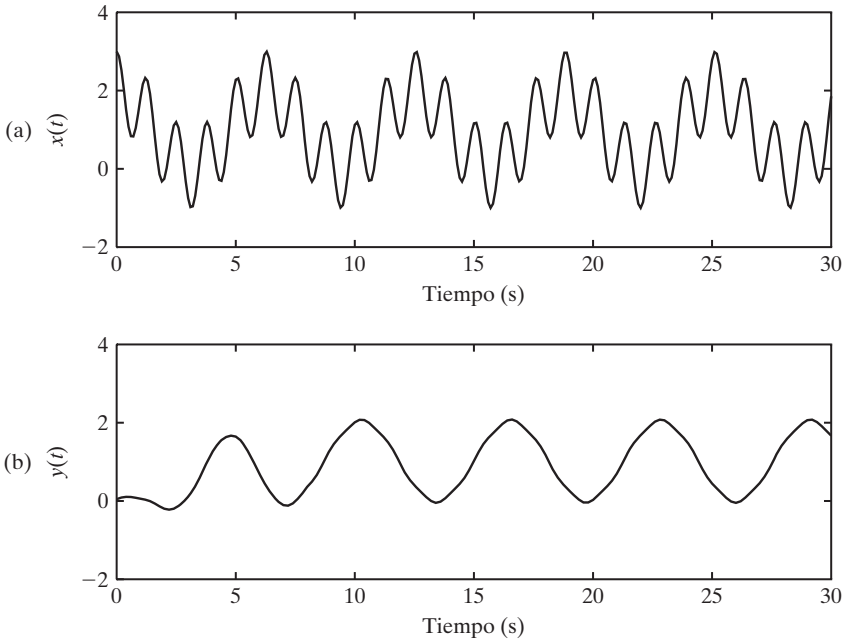



**FIGURA 10.21**
Gráficas de (a) la señal $x(t)$, y (b) la salida analógica $y(t)$.

frecuencia de corte que para el filtro IIR que diseñamos en el ejemplo 10.7. Los siguientes comandos de MATLAB muestran cómo la señal $x(t)$ es filtrada por el filtro FIR diseñado antes:

```
n = 0:150;
T = .2;
x = 1 + cos(n*T) + cos(5*T*n); % entrada muestreada x[n]
y = filter(hd,1,x); % salida muestreada y[n]
t = 0:.1:30; % grafica x(t) con mayor resolución
x = 1 + cos(t) + cos(5*t);
subplot(211),plot(t,x) % entrada x(t)
subplot(212),plot(n*T,y) % salida y(t)
```

La salida analógica resultante $y(t)$ aparece en la figura 10.21b. Observe que la componente cos $5t$ de $x(t)$ es filtrada, y el valor cd y la componente de baja frecuencia pasan sin atenuación alguna. Si en el diseño anterior del filtro FIR hubiéramos utilizado un valor más grande para $N$, la respuesta analógica $y(t)$ hubiera sido todavía más suave que la que aparece en la figura 10.21b, ya que se habría filtrado más de la componente de alta frecuencia. Invitamos al lector a repetir el problema de filtrar $x(t)$ con un filtro FIR que tenga una longitud $N = 41$.

### 10.4.2 Ventanas

Como explicamos antes, al diseñar filtros FIR la respuesta al impulso de longitud infinita $h[n]$ se multiplica por una ventana $w[n]$ para obtener la respuesta al impulso trunca dada

por $h_d[n] = w[n]h[n]$. La ventana particular $w[n]$ definida por (10.37) se conoce como *ventana rectangular*, ya que produce un corte abrupto de $h[n]$. Es evidente que el rizo en $H_d(\Omega)$ resultante del uso de la ventana rectangular (por ejemplo, vea la figura 10.20), puede disminuirse mediante una ventana que se adelgace de manera gradual. Existen diversos tipos de ventana que tienen una transición gradual, cada una con un efecto diferente en el filtro FIR resultante. Dos ejemplos son las ventanas Hanning y Hamming, las cuales definimos a continuación, junto con la ventana rectangular.

*Rectangular:*

$$w[n], \qquad 0 \leq n \leq N - 1$$

*Hanning:*

$$w[n] = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi n}{N-1}\right), \qquad 0 \leq n \leq N - 1$$

*Hamming:*

$$w[n] = 0.54 - 0.46\cos\frac{2\pi n}{N-1}, \qquad 0 \leq n \leq N - 1$$

La figura 10.22 muestra estas tres ventanas para $N = 21$ (evitamos utilizar una gráfica de líneas para que las comparaciones entre estas funciones fueran más claras).

El logaritmo de la magnitud de la DTFT de la función ventana, $w[n]$, se graficó en decibeles para las ventanas rectangular, Hanning y Hamming en la figura 10.23 para $N = 21$. Como explicamos en la primera parte de esta sección, la función de respuesta en frecuencia, $H_d[\Omega)$, para un filtro FIR con respuesta al impulso $h_d[n] = h[n]w[n]$ es una mejor aproximación a la respuesta en frecuencia deseada $H(\Omega)$, cuando el lóbulo principal de

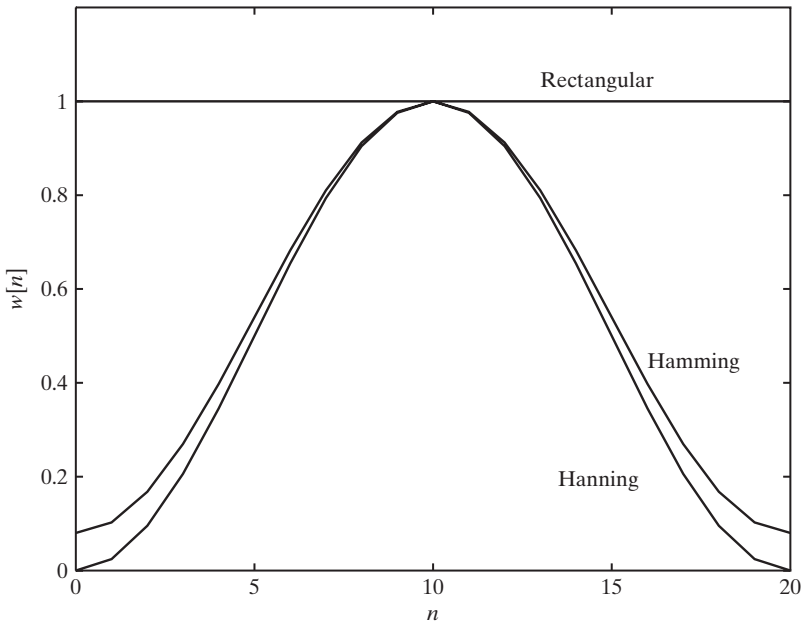



**FIGURA 10.22**
Funciones ventana rectangular, Hanning y Hamming para $N = 21$.

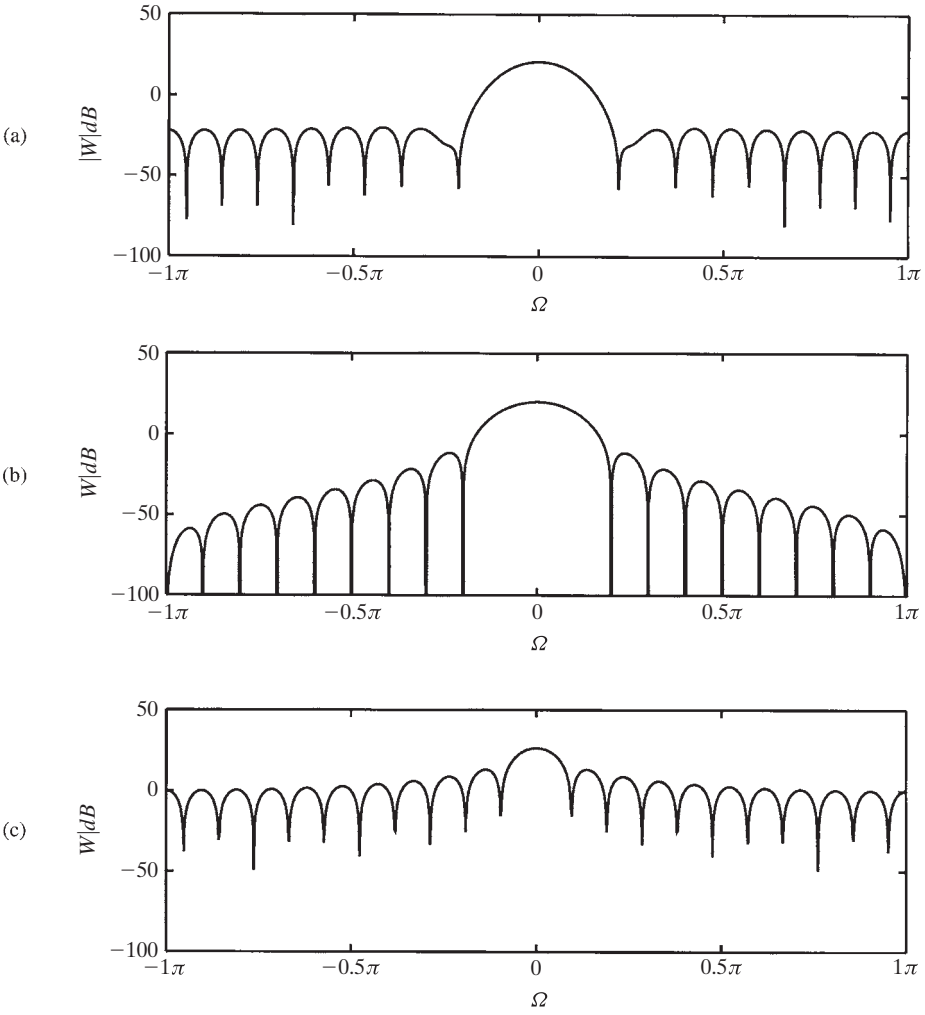



**FIGURA 10.23**
Logaritmo de la magnitud de la DTFT de la ventana (a) rectangular, (b) Hanning, y (c) Hamming.

$|W(\Omega)|$ es estrecho y los valores de los lóbulos laterales son pequeños. El tipo de función ventana $w[n]$ que se utiliza se basa en estos criterios. En particular, las ventanas no rectangulares tienen lóbulos laterales mucho más pequeños que la rectangular y, como resultado, existe mucho menor rizo en la función de respuesta en frecuencia del filtro FIR.

Sin embargo, para ventanas no rectangulares, los lóbulos principales son más amplios, lo que significa que la región de transición entre la banda de paso y la banda de rechazo del filtro FIR es más gradual. Por lo general se utiliza una ventana más sofisticada, conocida como *ventana Kaiser*, para diseñar filtros prácticos, ya que proporciona al diseñador la libertad de compensar la agudeza de las transiciones entre la banda de paso y la de rechazo, con la magnitud de los rizos. Para una explicación más detallada sobre ventanas, consulte Oppenheim y Schafer [1989].

### Ejemplo 10.11 Filtrado pasa bajas mediante ventanas Hanning y Hamming

Considere el filtro pasa bajas que diseñamos en el ejemplo 10.10. En lugar de utilizar una ventana rectangular para truncar la respuesta al impulso infinita, utilizaremos ventanas Hanning y Hamming. Pueden volver a utilizarse los comandos de MATLAB que empleamos en el ejemplo 10.10, pero con la sustitución de la definición de *w* por la siguiente instrucción de la ventana Hanning:

```
w = [0 hanning(N-2)' zeros (1,length(n)-N+1)];
```

y por la siguiente instrucción para la ventana Hamming:

```
w = [hamming(N)' zeros(1,length(n)-N)];
```

Con $N = 41$ ($m = 20$), la respuesta al impulso para el filtro FIR diseñado mediante la ventana rectangular aparece en la figura 10.24a, mientras que la figura 10.24b muestra la función en frecuencia correspondiente. Las figuras 10.25 y 10.26 muestran la respuesta al impulso y la respuesta en frecuencia del filtro diseñado mediante las ventanas Hanning y Hamming, respectivamente. Observe que el rizo en la respuesta en frecuencia del filtro diseñado mediante la ventana rectangular es muy notorio, mientras que el rizo en las otras respuestas en frecuencia es insignificante. También observe que la región de transición entre la banda de paso y la banda de rechazo es más gradual para las ventanas no rectangulares.

El Signal Processing Toolbox contiene el comando `fir1`, el cual ejecuta de manera automática los comandos requeridos en los ejemplos 10.10 y 10.11. Vea el tutorial que se encuentra en el sitio Web.

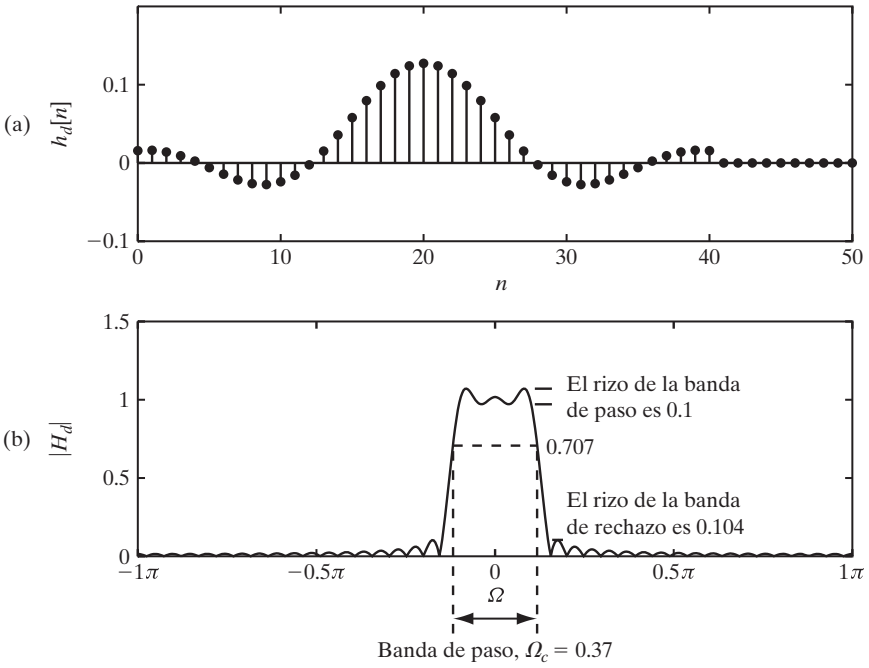



**FIGURA 10.24**
Gráfica de (a) la respuesta al impulso, y (b) la respuesta en frecuencia del filtro para la ventana rectangular.

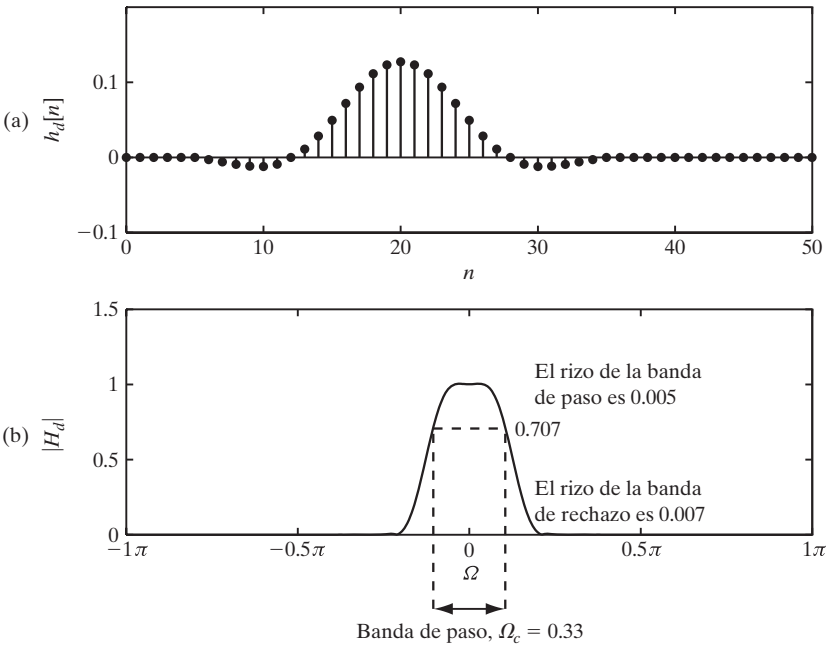



**FIGURA 10.25**
Gráfica de (a) la respuesta al impulso, y (b) la respuesta en frecuencia del filtro para la ventana Hanning.

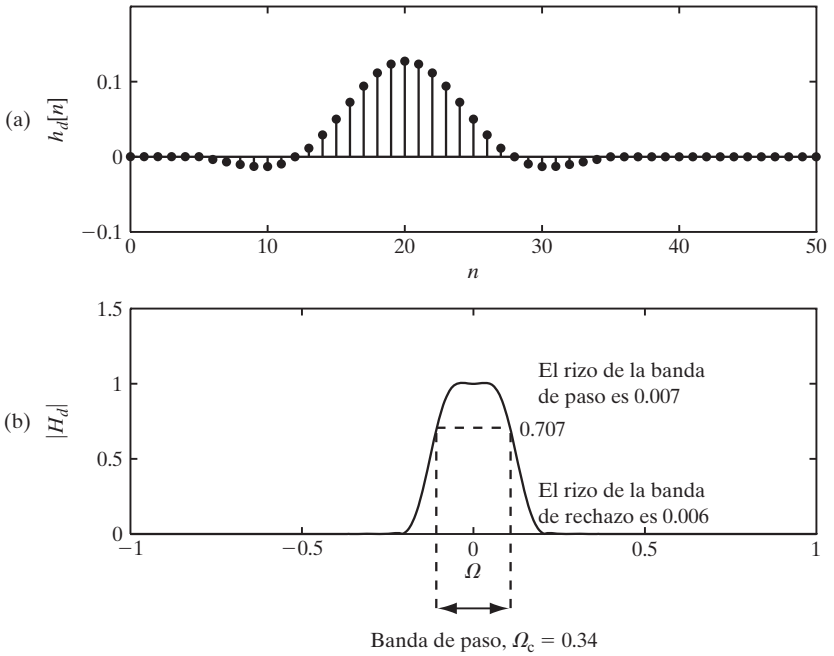



**FIGURA 10.26**
Gráfica de (a) la respuesta al impulso, y (b) la respuesta en frecuencia del filtro para la ventana Hamming.

Una forma alterna de diseñar filtros FIR es utilizar técnicas numéricas para derivar los coeficientes del filtro, para que coincidan con cualquier característica en frecuencia. Por ejemplo MATLAB incluye un comando que utiliza el algoritmo Parks-McClellan, pero este tema está más allá del alcance de este libro. Para una explicación de diversas técnicas algorítmicas, consulte Oppenheim y Schafer [1989].

## 10.5 DISEÑO DE CONTROLADORES DIGITALES

El control digital de un sistema de tiempo continuo se ha vuelto muy común en años recientes, a medida que los procesadores se han vuelto más pequeños, económicos y más poderosos. Es posible implementar estructuras de control muy complicadas mediante un procesador de señales digitales, mientras que un controlador analógico equivalente puede necesitar hardware muy complejo. Las aplicaciones en las que se ha utilizado el control digital son los controladores de motores de diversos automóviles, controles de vuelo en aeronáutica, control de equipo en sistemas de manufactura, robótica, control de clima en edificios y controladores de procesos en plantas químicas.

El control digital comenzó a ser muy común en la década de los 70 y a principios de los 80, cuando las computadoras se volvieron más económicas y más pequeñas. La teoría del diseño de control de tiempo continuo ya estaba madura en ese entonces, por lo que el primer método para diseñar un controlador digital se desarrolló sobre la base de la discretización de un controlador estándar de tiempo continuo, y después la implementación de la discretización mediante el uso de un circuito de muestreo y retención. La figura 10.27b ilustra un sistema de tiempo continuo (o planta) con un controlador digital, mientras que la figura 10.27a muestra la configuración de un controlador analógico estándar, la cual estudiamos en el capítulo 9.

El método para diseñar controladores digitales en el que se discretiza un controlador de tiempo continuo (es decir, que se mapea en un controlador de tiempo discreto) con frecuencia se conoce como *emulación analógica*. Recientemente, los métodos de diseño directo se han vuelto más comunes que mapear la planta de tiempo continuo en el dominio de tiempo discreto, y después diseñar el controlador mediante las contrapartes de tiempo discreto al método del lugar geométrico de las raíces que explicamos en el capítulo 9, así como las técnicas de diseño en el dominio de frecuencia basado en gráficas de Bode. La explicación de esta sección se limita al método de diseño de emulación analógica. Para detalles sobre métodos directos de diseño, consulte a Franklin *et al*. [1997].

El método de emulación analógica para diseñar controladores digitales es muy parecido al diseño de filtros digitales mediante prototipos analógicos. De hecho, en ambos métodos primero se diseña un sistema de tiempo continuo (ya sea un filtro o un controlador), y después se mapea a una función de transferencia de tiempo discreto. La transformación bilineal que desarrollamos en la sección 10.1 puede utilizarse para mapear un controlador analógico con función de transferencia $G_c(s)$ en un controlador digital con función de transferencia $G_d(z)$. La implementación del controlador digital se logra mediante el uso de una computadora o un procesador de señales digitales, cuya salida se convierte en una señal de tiempo continuo mediante un convertidor D/A. Éste es el mismo proceso que se utiliza para implementar un filtro digital.

Además de la transformación bilineal desarrollada en la sección 10.1, en aplicaciones que involucran el control digital existen diversas técnicas que con frecuencia se utilizan para transformar una función de transferencia de tiempo continuo en una función de tiempo

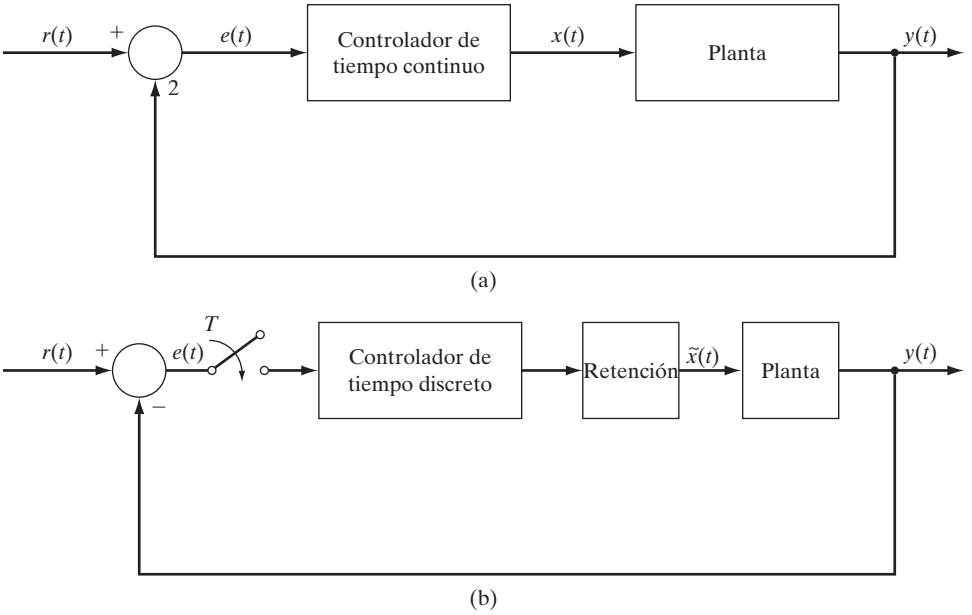



**FIGURA 10.27**
Diagrama de bloques del sistema de control con (a) un controlador analógico, y (b) con un controlador digital.

discreto. Uno de estos métodos, llamado *igualación de respuestas*, involucra la igualación de la salida de un sistema de tiempo continuo con la salida de un sistema de tiempo discreto, cuando la entrada es una función específica $x(t)$. En particular, considere un sistema de tiempo continuo con función de transferencia $G(s)$, y sea $y(t)$ la salida resultante de una entrada específica $x(t)$, con condiciones iniciales iguales a cero en el sistema. En la igualación de respuestas, el objetivo es construir un sistema de tiempo discreto con función de transferencia $G_d(z)$ tal que cuando la entrada $x[n]$ al sistema de tiempo discreto sea $x[n] = x(nT) = x(t)|_{t=nT}$, la salida $y[n]$ del sistema de tiempo discreto sea $y[n] = y(nT) = y(t)|_{t=nT}$, donde $T$ es el intervalo de muestreo. En otras palabras, para la entrada específica bajo consideración, la salida $y(t)$ del sistema de tiempo continuo coincide con la salida $y[n]$ del sistema de tiempo discreto en los tiempos de muestreo $t = nT$. Es evidente que la función de transferencia $G_d(z)$ del sistema de tiempo discreto deseado está dada por

$$G_d(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

donde $X(z)$ y $Y(z)$ son las transformadas $z$ de la entrada $x(nT)$ y la salida $y(nT)$ discretizadas, respectivamente.

En un control digital es de particular interés la igualación con la respuesta al escalón, donde la entrada $x(t)$ es una función escalón. En este caso, calculamos la salida $y(t)$ tomando la transformada inversa de Laplace de $Y(s) = G(s)/s$, donde $G(s)$ es la función de transferencia del sistema de tiempo continuo dado. Para determinar el sistema de tiempo discreto

correspondiente, discretizamos $y(t)$ para obtener $y[n] = y(nT)$, y después calculamos la transformada $z$, $Y(z)$, de $y[n]$. La función de transferencia $G_d(z)$ del sistema de tiempo discreto está dada por

$$G_d(z) = Y(z)\frac{z-1}{z} \tag{10.44}$$

El siguiente ejemplo ilustra el proceso.

---

**Ejemplo 10.12 Igualación con la respuesta al escalón**

Considere el sistema de tiempo continuo con función de transferencia

$$G(s) = 0.2\frac{s+0.1}{s+2}$$

La transformada de la respuesta al escalón de este sistema es

$$\begin{aligned} Y(s) &= 0.2\frac{s+0.1}{s(s+2)} \\ &= \frac{0.01}{s} + \frac{0.19}{s+2} \end{aligned} \tag{10.45}$$

y al tomar la transformada inversa de Laplace de (10.45), obtenemos la siguiente respuesta al escalón:

$$y(t) = 0.01 + 0.19e^{-2t}, t \geq 0$$

La versión discretizada de $y(t)$ es

$$y[n] = 0.01 + 0.19e^{-2nT}, n \geq 0 \tag{10.46}$$

y si tomamos la transformada $z$ de (10.46), tenemos

$$\begin{aligned} Y(z) &= 0.01\frac{z}{z-1} + 0.19\frac{z}{z-e^{-2T}} \\ &= \frac{0.2z^2 - (0.01e^{-2T} + 0.19)z}{(z-1)(z-e^{-2T})} \end{aligned}$$

Así, si utilizamos (10.44) obtenemos la siguiente función de transferencia para el sistema de tiempo discreto correspondiente:

$$G_d(z) = \frac{0.2z - (0.01e^{-2T} + 0.19)}{z - e^{-2T}}$$

---

Puede utilizarse el Signal Processing Toolbox de MATLAB para realizar la igualación con la respuesta al escalón. Digamos, para el sistema del ejemplo 10.12, los coeficientes de la función de transferencia $G(s)$ se almacenan en `num` y `den`, se define un valor para el tiempo de muestreo $T$, y se utiliza el comando `c2dm` de la siguiente forma:

```
num = .2*[1 .1];
den = [1 2];
[numd,dend] = c2dm(num,den,T,'zoh');
```

Invitamos al lector a ejecutar esto y a comparar los resultados con los obtenidos en el ejemplo 10.12. Es importante observar que en el comando `c2dm`, si se remplaza la opción `'zoh'` por `'tustin'`, el cálculo por computadora resultante utiliza la transformación bilineal para obtener el sistema de tiempo discreto.

Las principales diferencias entre el diseño de filtros digitales y el diseño de controladores digitales son que en un control digital, para determinar el periodo de muestreo hay que tomar en cuenta el efecto de la retroalimentación, y que un retraso introducido por un controlador digital puede afectar la estabilidad en el ciclo de retroalimentación. A continuación explicamos con más detalle estas consideraciones.

Dada una planta de tiempo continuo con función de transferencia $G_p(s)$, suponga que un controlador analógico con función de transferencia $G_c(s)$ se ha diseñado mediante un método, como la técnica del lugar geométrico de las raíces que explicamos en la sección 9.3. Para mapear $G_c(s)$ en un equivalente digital $G_d(z)$ mediante la transformación bilineal de la técnica de igualación de respuestas, debemos determinar el periodo de muestreo adecuado, $T$. En general, entre más pequeño sea el periodo de muestreo, mejor será la igualación entre el controlador de tiempo continuo deseado y el controlador digital que será implementado. Mejorar la eficiencia del programa de cómputo que realiza los cálculos de tiempo discreto puede reducir el tiempo de muestreo; sin embargo, una reducción en el tiempo de muestreo por lo general requiere el uso de convertidores A/D más rápidos (y más caros), y procesadores digitales de señales. Por lo tanto, es importante que calculemos el tiempo máximo de muestreo que arroje una buena aproximación cuando utilicemos el controlador digital en lugar del controlador analógico. Podemos determinar una frecuencia de muestreo adecuada mediante el siguiente análisis.

En el diagrama de bloques de la figura 10.27b, observe que la señal por muestrearse es el error $e(t) = r(t) - y(t)$, donde $r(t)$ es la referencia, y $y(t)$ es la señal de salida medida. La señal de referencia tiene un contenido de frecuencia que generalmente es conocido; sin embargo, el contenido de frecuencia de $y(t)$ depende del controlador dado por la función de transferencia $G_d(z)$. En general, $y(t)$ no es estrictamente de banda limitada, pero frecuencias más altas se atenúan lo suficiente de manera que el muestreo no causará errores importantes de aliasing. Para determinar una frecuencia de muestreo adecuada, el contenido de frecuencia de $y(t)$ para el sistema con el controlador analógico puede encontrarse primero aplicando la relación en el dominio $\omega$:

$$Y(\omega) = G_{\text{cl}}(\omega)R(\omega) \tag{10.47}$$

Aquí, la función de respuesta en frecuencia del lazo cerrado $G_{cl}(\omega)$ está dada por

$$G_{\text{cl}}(\omega) = \frac{G_c(\omega)G_p(\omega)}{1 + G_c(\omega)G_p(\omega)}$$

Por lo tanto, de (10.47) vemos que el contenido de frecuencias de $y(t)$ depende de las características de la respuesta en frecuencia del sistema de lazo cerrado, y del contenido de frecuencias de la entrada de referencia $r(t)$. Ahora, para tiempos de muestreo suficientemente pequeños, la implementación digital del controlador se aproxima bastante al controlador analógico diseñado tal que el contenido de frecuencia de la salida medida $y(t)$ (cuando se utiliza el controlador digital) se aproxima bastante mediante (10.47). Así, la frecuencia de muestreo debe elegirse para que sea más alta que dos veces la componente de frecuencia

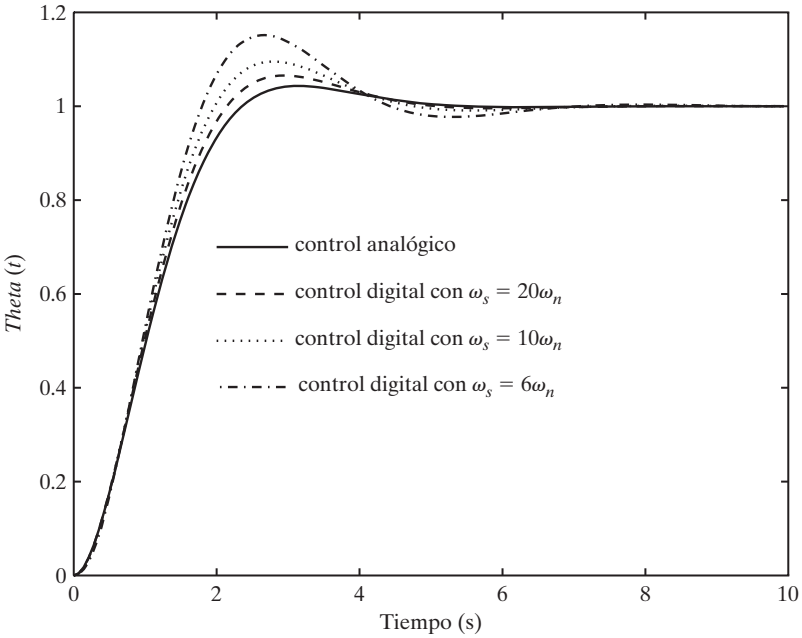



**FIGURA 10.28**
Respuesta a la señal de referencia escalón del ejemplo 10.13.

más alta de $Y(\omega)$ dada por (10.47), y debe ser lo suficientemente grande tal que (10.47) arroje una buena aproximación del contenido de frecuencias de la salida, cuando se utilice el controlador digital. Un método práctico es elegir la frecuencia de muestreo para que sea mayor que 10 o 20 veces el ancho de banda del sistema analógico de lazo cerrado.

Una vez elegido un intervalo de muestreo $T$, el controlador de tiempo continuo $G_c(s)$ puede mapearse en un equivalente de tiempo discreto mediante el método de igualación con la respuesta al escalón o de la transformación bilineal. Como dijimos antes, también están disponibles otros métodos de mapeo. La mayoría arrojará casi la misma respuesta si el periodo de muestreo es pequeño respecto a las frecuencias naturales del sistema. A continuación mostraremos el proceso de discretización.

---

### Ejemplo 10.13 Control digital de un motor de cd

La implementación de un controlador digital estará dada para el controlador analógico del motor de cd definido en el ejemplo 9.5. Aquí, la planta (el motor de cd) está dada por

$$G_p(s) = \frac{10}{(s + 0.1)s}$$

y el controlador analógico tiene la función de transferencia

$$G_c(s) = 0.2\frac{s + 0.1}{s + 2}$$

La función de transferencia de lazo cerrado correspondiente está dada por

$$G_{\text{cl}}(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 2}$$

La frecuencia natural del sistema de lazo cerrado es $\omega_n = \sqrt{2} \approx 1.41$ rad/s. Debido a que éste es un sistema de segundo orden, sin ceros, la frecuencia natural es aproximadamente la misma que el ancho de banda. Por lo tanto, para obtener un buen rendimiento del controlador digital, la frecuencia de muestreo se elige para que sea $\omega_s \approx 20\omega_n$ o $T = 0.22$ segundos.

De los resultados en el ejemplo 10.12, vemos que el controlador digital encontrado mediante la igualación con la respuesta al escalón para $T = 0.22$ es

$$G_d(z) = 0.2\frac{z - 0.982}{z - 0.644} \tag{10.48}$$

Para utilizar la transformación bilineal para encontrar el controlador digital, en $G_c(s)$, sustituya $s = 2(z - 1)/T(z + 1)$ por $s$:

$$G_d(z) = G_c(s)\big|_{s=2(z-1)/T(z+1)} = \frac{0.166(z - 0.978)}{z - 0.639} \tag{10.49}$$

Debido al pequeño tiempo de muestreo, los controladores digitales en (10.48) y (10.49) encontrados mediante los dos diferentes métodos de mapeo son muy similares.

Para simular la respuesta de la planta con control digital podemos utilizar el archivo M `hybrid`. Este archivo está disponible desde el sitio Web. Los comandos para deducir $G_d(z)$ a partir de $G_c(s)$ mediante la transformación bilineal, y para simular la respuesta a una entrada escalón son los siguientes:

```
T = 0.22;
Nc = .2*[1 .1]; % controlador analógico
Dc = [1 2];
[Nd,Dd] = bilinear(Nc,Dc,1/T); % controlador digital
t = 0:.5*T:10;
u = ones(1,length(t)); % entrada escalón
Np = 10; % planta
Dp = [1 .1 0];
[theta,uc] = hybrid(Np,Dp,Nd,Dd,T,t,u);
```

Las respuestas a una referencia escalón aparecen en la figura 10.28 para tres controladores digitales diferentes que se implementan con frecuencias de muestreo distintas. Además, la figura 10.28 muestra la respuesta al escalón que encontramos mediante el controlador analógico. Observe que existe muy poca degradación en la respuesta, debido a la implementación digital cuando $\omega_s = 20\omega_n$, pero la degradación es más notoria con frecuencias de muestreo más pequeñas, tal como $\omega_s = 10\omega_n$ y $\omega_s = 6\omega_n$.

También podemos realizar una simulación de la planta y del controlador digital mediante el modelo Simulink que aparece en la figura 10.29. Obtenemos la función de transferencia de la planta haciendo un clic y arrastrando el icono Transfer Function que se encuentra en el menú Continuous del navegador de la biblioteca. De manera similar, la función de transferencia para el controlador digital se encuentra en el menú Discrete, el osciloscopio se encuentra en el menú Links, la función escalón se encuentra en el menú Sources, y la unión de suma se encuentra en Math Operations. Los parámetros para un objeto en particular se establecen haciendo doble clic sobre el objeto para abrir una Function Block Parameter Window. El tiempo de muestreo se elige para que sea 0.22 y debe introducirse como un parámetro de diversos bloques.

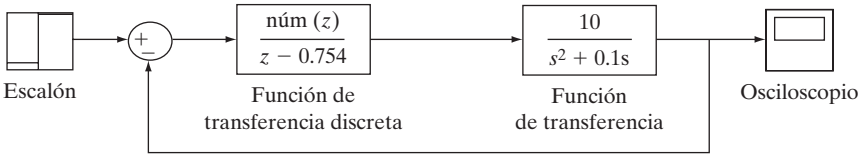



**FIGURA 10.29**
Modelo Simulink del controlador digital y de la planta de tiempo continuo del ejemplo 10.13.

Para implementar un controlador digital en un sistema físico utilizando un lenguaje de programación estándar como C, es necesario convertir la función de transferencia de control en una ecuación diferencial. La ecuación diferencial puede implementarse de manera recursiva mediante el uso de un ciclo. El procedimiento de implementación descrito en el siguiente ejemplo aplica a filtros digitales, así como a controladores digitales:

### Ejemplo 10.14 Implementación de un control digital o de un filtro digital

Para implementar un controlador digital definido por la función de transferencia $G_d(z)$, primero tome la transformada $z$ inversa de la función de transferencia del controlador para obtener una ecuación en diferencias con entrada $e[n]$ y salida $u[n]$. Aquí, $u[n]$ representa un comando para el motor, y no una señal escalón. Considere el controlador para el motor de cd del ejemplo 10.13. Multiplique $Gd(z)$ por $z^{-1}/z^{-1}$, e iguálela con $U(z)/E(z)$ para obtener

$$U(z) = \frac{0.166(1 - 0.978z^{-1})}{1 - 0.639z^{-1}}E(z)$$

$$(1 - 0.639z^{-1})U(z) = 0.166(1 - 0.978z^{-1})E(z)$$

$$U(z) - 0.639z^{-1}U(z) = 0.166E(z) - 0.162z^{-1}E(z)$$

Tome la transformada $z$ inversa de la última expresión para obtener la ecuación en diferencias del controlador:

$$u[n] = 0.166e[n] - 0.162e[n - 1] + 0.639u[n - 1]$$

El siguiente pseudocódigo puede utilizarse para escribir un programa para implementar el control:

```
última_u = 0;
última_e = 0;
lazo {
    y = entrada(sensor);
    e = r − y;
    u = 0.166*e − 0.162* última_e + 0.639* última_u;
    salida(u);
    última_u = u;
    última_e = e;
}
```

En esta implementación, el tiempo de muestreo es la cantidad de tiempo que se lleva ejecutar el ciclo una vez. Un programa más sofisticado pondría los cálculos del controlador en un procedimiento que es llamado periódicamente, para garantizar tiempos de muestreo constantes.

Un filtro digital IIR puede implementarse con la misma metodología. Considere el filtro IIR de segundo orden, diseñado en el ejemplo 10.1 y dado por una función de transferencia denotada como $H_d(z)$. Sea la entrada $x[n]$ y la salida $y[n]$. Debido a los polos y ceros de segundo orden, la ecuación en diferencias dependerá de los dos últimos valores de la entrada y la salida, es decir, $x[n-1], x[n-2], y[n-1]$, y $y[n-2]$, los cuales tendrán que guardarse para la recursividad.

### 10.5.1 Proyecto de control digital

En esta subsección describiremos un experimento que utiliza el kit LEGO® MINDSTORMS®. El experimento puede utilizarse para un proyecto si los estudiantes o el maestro cuentan con los kits LEGO, o esta sección puede utilizarse como un caso de estudio para la implementación de controladores.

El kit LEGO MINDSTORMS proporciona una plataforma experimental portátil y barata para proyectos sencillos de control y filtrado digital. Diversos experimentos de control digital se describen en la IEEE Control Systems Magazine, Special Issue on Innovations in Undergraduate Education, vol. 24, núm. 5, octubre de 2004. Un experimento en particular es lo suficientemente sencillo para los estudiantes que están llevando algún curso de introducción a los sistemas y control (vea Heck *et al.* [2004]). El experimento es un control por retroalimentación para un motor de cd, diseñado para controlar el ángulo de un eje de salida. El costo y la portabilidad de este experimento hace posible que los estudiantes realicen un montaje en casa, pero sólo algunos montajes experimentales pueden utilizarse para un grupo completo.

El montaje experimental descrito en Heck *et al.* [2004] aparece en la figura 10.30, y consiste en un motor de cd, un sensor de rotación, piezas de construcción LEGO, y el ladrillo LEGO RCX. El ladrillo LEGO consiste en un microcontrolador y puertos de entrada y salida. Esta plataforma proporciona todos los componentes esenciales para los *controladores embebidos*, es decir, los sistemas de control implementados mediante *computadoras embebidas*. Las computadoras embebidas, a diferencia de las de escritorio, son procesadores que son parte de sistemas más grandes, donde el procesador no es el punto central del sistema. En los controladores embebidos, se escribe un programa de computadora para realizar

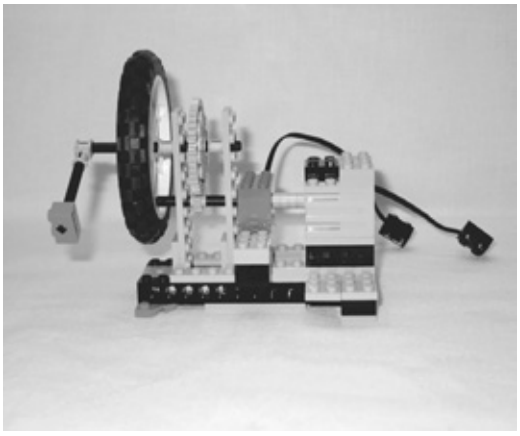


**FIGURA 10.30**
Experimento basado en LEGO para el control digital de un motor.

los cálculos de control digital. Por lo general, este programa se escribe y compila en una máquina de escritorio o en una portátil y después se descarga a la máquina objetivo el ladrillo LEGO en esta aplicación. Como en muchas aplicaciones de cómputo embebidas, las capacidades del ladrillo LEGO son limitadas. Por ejemplo, el ladrillo RCX corre a una baja velocidad de reloj (8MHz), es un procesador de 8 bits, y no tiene un procesador de punto flotante. Una versión más reciente del ladrillo LEGO, el ladrillo NXT, tiene más capacidades.

El objetivo de este proyecto es controlar el ángulo de un eje de salida que está unido al eje del motor mediante ruedas dentadas. El ángulo del eje del motor se mide con un sensor de rotación. La función de transferencia para el montaje del motor está dada por

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{A}{Ts^2 + s}\frac{1}{N}$$

donde $y$ es el ángulo del eje de salida, $v$ es el voltaje del motor, $T$ es la constante de tiempo del sistema de carga del motor, $A$ es una constante, y $N$ es la relación del engranaje. Para el sistema que aparece en la figura 10.29, $N = 5$.

El control más sencillo es un control proporcional, el cual se implementa en forma digital a partir del siguiente pseudocódigo:

```
lazo{
    y = entrada(sensor de rotación);
    e = r − y;
    u = K*u;
    salida(u);
}
```

Este programa puede implementarse en C. El programa, así como las instrucciones detalladas para construir este aparato, están disponibles en el sitio Web de este libro.

Se instruye a los estudiantes para construir el aparato y utilizarlo como proyecto, y para programar el ladrillo LEGO con el controlador proporcional, utilizando diversos valores de $K$, como $K = \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$. Ejecute el programa con una referencia $r$ igual a un valor específico, como 32. Mientras se está ejecutando, intente apartar manualmente el eje de salida de su punto de ajuste. El controlador se resiste a este movimiento y actúa para regresar el eje a su posición de punto de ajuste. Ésta es la principal diferencia entre el control de lazo abierto y el control de lazo cerrado: el controlador de lazo cerrado es más fuerte ante alteraciones que actúan sobre el sistema. Utilice la función datalog para guardar la información del sensor para una respuesta al escalón, y suba la información a una computadora para graficarla.

La siguiente parte del proyecto es diseñar e implementar un controlador principal de la forma

$$G_c(s) = K\frac{s + b}{s + a}$$

donde $b < a$. El diseño de control requiere primero identificar los parámetros $A$ y $T$ de la función de transferencia del montaje del motor. Con frecuencia, podemos lograr la identificación del sistema introduciendo una función escalón en el sistema, y determinando la constante de tiempo y el factor de amortiguamiento de la respuesta. Los polos dominantes de segundo orden pueden determinarse a partir de la respuesta al escalón mediante el método dado en la sección 8.3. Sin embargo, en este caso, la función de transferencia de lazo

abierto tiene un polo en el origen y, por tanto, la respuesta al escalón incluiría una rampa que dificultaría la identificación del sistema. Una alternativa es aplicar el control proporcional al sistema para estabilizarlo, y después realizar la identificación del sistema de lazo cerrado. Un valor de $K = \frac{1}{3}$ funciona bien para este sistema. Encuentre los polos y el valor de cd del sistema de lazo cerrado a partir de la respuesta al escalón. Encuentre los parámetros $T$ y $A$ de la función de transferencia de la planta, ya sea de manera analítica a partir de la función de transferencia de lazo cerrado, o utilizando el lugar geométrico de las raíces.

Una vez identificado el sistema de lazo abierto, se diseña el controlador principal para tener una constante de tiempo más rápida que el controlador proporcional. Un método práctico es elegir el cero en $-b$ para cancelar el segundo polo de la planta de la derecha, y después utilizar el método del lugar geométrico de las raíces para seleccionar un valor adecuado para $a$. Ubicar $-a$ lo más a la izquierda en el plano $s$ empuja el lugar geométrico de las raíces hacia la izquierda, lo que hace más rápida la respuesta de lazo cerrado. Una limitación práctica es el tiempo de muestreo. En la implementación del controlador proporcional descrito por el pseudocódigo, el tiempo de muestreo es el tiempo real que toma calcular el ciclo. Considere que el controlador principal es más complicado y que tomará más tiempo calcularlo, lo que implica que el tiempo de muestreo será ligeramente más lento. Por lo tanto, elegir $a$ arbitrariamente grande resultaría en una respuesta de lazo cerrado muy rápida, lo que requeriría un tiempo de muestreo más pequeño de lo posible con este hardware. La velocidad de respuesta de un sistema de lazo cerrado en este proyecto es limitado, debido a las restricciones del tiempo de muestreo.

Una vez que el controlador $G_c(s)$ es elegido y da una respuesta de lazo cerrado aceptable, el controlador puede discretizarse mediante el método de transformación bilineal o con el de igualación a la respuesta al escalón. Estos métodos requieren el tiempo de muestreo real. El límite más bajo en el tiempo de muestreo es el tiempo de ejecución del procesador para el ciclo que realiza los cálculos mostrados en el ejemplo 10.14. Determine el tiempo de muestreo con un conjunto de coeficientes de prueba en el controlador. Con el tiempo de muestreo real registrado, discretice el controlador para determinar los coeficientes reales. Programe el ladrillo RCX con el controlador principal, y registre la respuesta al escalón. De nuevo, intente apartar el eje de su punto de ajuste, y observe la resistencia debida a la acción de retroalimentación.

## 10.6 RESUMEN DEL CAPÍTULO

Este capítulo demuestra el uso de los conceptos fundamentales descritos en los capítulos 5 a 9 para diseñar filtros y controladores digitales, los cuales son muy utilizados en aplicaciones de ingeniería. En estas aplicaciones prácticas, interconectamos una computadora con un sistema físico mediante el muestreo de una señal analógica y después mediante el proceso en forma numérica de la señal muestreada, usualmente con un procesador de señales digitales o un microcontrolador.

El capítulo comienza con la discretización de una señal mediante el muestreo. La reconstrucción de la señal muestreada en una señal analógica puede hacerse a través de un filtro ideal pasa bajas si no ocurre aliasing en el proceso de muestreo. Esta condición se garantiza si la señal analógica original era de banda limitada, y si la frecuencia de muestreo era de por lo menos el doble de alta que la frecuencia más alta de la señal analógica. Un método práctico para reconstruir una señal analógica a partir de una señal digital es una operación de retención, la cual se emplea en los convertidores digitales a analógicos. En el dominio de frecuencia, la operación de retención corresponde a un filtro no ideal pasa bajas.

Logramos la discretización de un sistema al encontrar una transformación entre el dominio de tiempo continuo y el domino de tiempo discreto. Una transformación exacta

que satisface la condición de igualación está dada por $\omega = \Omega/T$, o de manera correspondiente, $s = (1/T)\ln z$. Sin embargo, una aplicación de esta transformación en una función de transferencia $H(s)$ arroja una función de transferencia $H_d(z)$ que no es racional en $z$. Una aproximación comúnmente utilizada para la transformación exacta es la transformación bilineal, donde encontramos la función de transferencia del sistema de tiempo discreto remplazando $s$ con $(2/T)[(z-1)/(z+1)]$ en el sistema de tiempo continuo. La transformación bilineal comúnmente se utiliza tanto en el diseño de filtros digitales como en el diseño de control digital para obtener un sistema digital que emule un filtro analógico o un controlador analógico. Un método de discretización alterno que se utiliza en el diseño de control digital es la igualación a la respuesta al escalón. Mientras que la condición de igualación exacta garantiza que la respuesta muestreada del sistema analógico coincida con la respuesta del sistema digital para todas las entradas, la igualación a la respuesta al escalón sólo garantiza que las salidas coinciden cuando las entradas son funciones escalón. Esta relajación de la condición de igualación resulta en una discretización racional en $z$.

Los filtros digitales se clasifican por tener una respuesta al impulso infinita o finita. Un filtro IIR, que se caracteriza por tener polos diferentes de cero en la función de transferencia $H(z)$, se obtiene cuando se discretiza un filtro analógico prototipo. Los filtros digitales comunes basados en prototipos analógicos incluyen los filtros Butterworth y Chebyshev. La respuesta al impulso infinita resulta de una dependencia de los valores anteriores de salida, $y$, para calcular el valor real de la salida. En contraste, los filtros FIR no dependen de valores anteriores de la salida. La función de transferencia resultante sólo tiene polos en el origen. Podemos obtener un filtro FIR al truncar y desplazar la respuesta al impulso de un filtro IIR que tiene características propicias en el dominio de frecuencia. De modo equivalente, podemos obtener un filtro FIR multiplicando un filtro $H_i(\Omega)$ que tenga las características deseadas, por $e^{-j\Omega m}$, donde $m$ es un entero. Obtenemos el filtro FIR al truncar la DTFT inversa de $e^{-j\Omega m}H_i(\Omega)$. Ambos métodos de diseño requieren un corte, lo que resulta en un rizo en la respuesta en frecuencia del filtro FIR. Podemos disminuir este rizo si realizamos un corte más gradual, el cual logramos mediante una ventana, en lugar de un corte nítido. Dos ventanas comunes son las de Hanning y Hamming.

Obtenemos controladores digitales al discretizar un controlador de tiempo continuo. Una consideración común en el control digital es la selección de la frecuencia de muestreo. Para evitar el aliasing, la señal muestreada debe tener un contenido de frecuencia despreciable, más allá de la mitad de la frecuencia de muestreo. Debido a que la señal de salida normalmente no es de banda limitada, existe un método práctico para garantizar que el nivel de aliasing sea bajo. En particular, a medida que la respuesta en frecuencia de lazo cerrado más se parezca a un filtro pasa bajas, debe elegirse una frecuencia de muestreo tal que sea 10 o 20 veces el ancho de banda del sistema de tiempo continuo de lazo cerrado. Ante la ausencia de consideraciones de precisión numérica, el rendimiento del controlador digital se aproxima al controlador de tiempo continuo cuando la frecuencia de muestreo se incrementa.

## PROBLEMAS

**10.1.** Determine una frecuencia de muestreo adecuada que evite el aliasing para las siguientes señales:

**(a)** $x(t) = 3\,\text{senc}^2(t/2\pi),\ -\infty < t < \infty$

**(b)** $x(t) = 4\,\text{senc}(t/\pi)\cos 2t,\ -\infty < t < \infty$

**(c)** $x(t) = e^{-5t}u(t)$

**10.2.** Digitalice los siguientes sistemas mediante la transformación bilineal. Suponga que $T = 0.2$ segundos.

**(i)** $H(s) = 2/(s + 2)$

**(ii)** $H(s) = 4(s + 1)/(s^2 + 4s + 4)$

**(iii)** $H(s) = 2s/(s^2 + 1.4s + 1)$

**(a)** Para cada sistema de tiempo continuo, simule la respuesta al escalón utilizando `step`.

**(b)** Para cada sistema de tiempo discreto derivado en el inciso (a), simule la respuesta al escalón utilizando `dstep`. Compare estas respuestas, $y[n] = y(nT)$, con las respuestas $y(t)$ correspondientes, obtenidas en el inciso (a), graficando los resultados.

**10.3.** En (10.23) introdujimos la transformación bilineal como un medio para aproximar el mapeo exacto $s = (1/T)\ln(z)$. Una derivación alterna para la transformación bilineal involucra la aproximación trapezoidal de una integral, de la siguiente manera:

$$\int_{nT}^{(n+1)T} f(t)\,dt \approx \frac{T}{2}[f([n + 1]T) + f(nT)]$$

Aquí, el lado derecho de la expresión representa el área del trapezoide que mejor encaja bajo la curva $f(t)$, desde $t = nT$ hasta $t = (n + 1)T$ (vea la figura P10.3). Ahora considere un sistema de tiempo continuo de primer orden:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{a}{s + a}$$

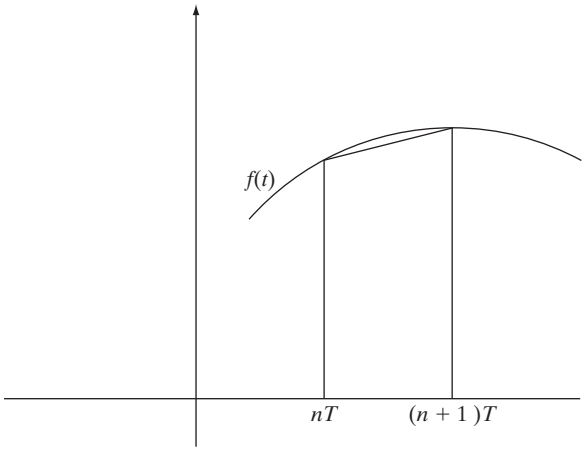



**FIGURA P10.3**

Para derivar la transformación bilineal, realice los siguientes pasos: (1) Encuentre la ecuación diferencial que relacione la entrada $x(t)$ con la salida $y(t)$; (2) integre ambos lados de la ecuación diferencial, desde $t = nT$ hasta $t = (n + 1)T$ utilizando la aproximación trapezoidal, cuando sea adecuado; (3) obtenga una ecuación en diferencias correspondiente haciendo que $y[n] = y(nT)$ y $x[n] = x(nT)$; (4) calcule la función de transferencia digital, $H_d(z)$, de la ecuación en diferencias; y (5) encuentre una relación entre $s$ y $z$, tal que $H(s) = H_d(z)$.

**10.4.** Considere el sistema de información muestreado que aparece en la figura P10.4. Calcule los valores exactos para $y(1)$, $y(2)$, y $y(3)$, cuando se logran las siguientes condiciones:

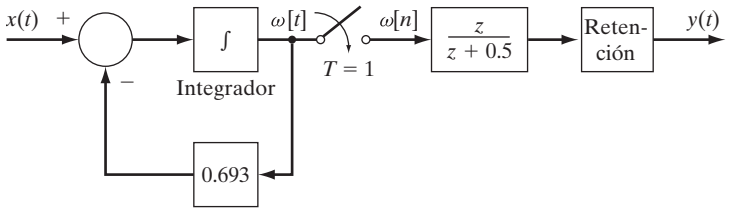



**FIGURA P10.4**

**(a)** $\omega(0) = -1$, $y(0) = 1$, y $x(t) = \delta(t) =$ impulso unitario
**(b)** $\omega(0) = y(0) = 0$ y $x(t) = e^{-2t}u(t)$
**(c)** $\omega(0) = 2$, $y(0) = -1$, y $x(t) = u(t)$

**10.5.** Considere el filtro pasa bajas de un polo dado por la función de transferencia

$$H(s) = \frac{B}{s + B}$$

**(a)** Diseñe un sistema de tiempo discreto que realice este filtro, utilizando la transformación bilineal para $w_s = B$, $w_s = 2B$, y $w_s = 5B$.
**(b)** Grafique la respuesta en frecuencia del sistema de tiempo continuo para $B = 10$, y marque las tres diferentes frecuencias de muestreo. ¿Cuál debe proporcionar una realización de tiempo discreto más exacta?
**(c)** Utilice MATLAB para calcular las respuestas al escalón de los tres sistemas de tiempo discreto, obtenidos en el inciso (a), con $B = 10$. Grafique las respuestas contra $t = nT$, donde $T$ es el periodo de muestreo. En la misma gráfica, grafique la respuesta al escalón del sistema de tiempo continuo original, y compare la exactitud de las tres discretizaciones.

**10.6.** Suponga que la sinusoide muestreada $x(nT) = \cos w_0 nT, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, se aplica (con $w_s = 2B$) a la discretización construida en el problema 10.5. Determine el intervalo de valores de $w_0$ para los cuales la magnitud del pico de la respuesta de salida resultante es mayor o igual que 0.707. En otras palabras, determine el ancho de banda "efectivo" de la discretización. Compare sus resultados con los obtenidos en el inciso (b) del problema 10.5.

**10.7.** Un filtro pasa banda de dos polos está dado por la función de transferencia

$$H(s) = \frac{100}{s^2 + 2s + 101}$$

**(a)** Determine los puntos a 3 dB del filtro.
**(b)** Digitalice el filtro utilizando la transformación bilineal para un intervalo de muestreo $T$ cualquiera.
**(c)** Grafique la función de respuesta en frecuencia del filtro digital $H_d(z)$ obtenido en el inciso (b). Tome $T = 0.02$ segundos.

**10.8.** Considere el filtro pasa altas de dos polos dado por la función de transferencia

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

**(a)** Determine el punto a 3 dB del filtro.
**(b)** Discretice el filtro utilizando la transformación bilineal.
**(c)** Con el intervalo de muestreo $T = 0.1$, grafique la respuesta en frecuencia del filtro digital obtenido en el inciso (b).

**10.9.** Considere el filtro pasa bajas Chebyshev de dos polos dado por

$$H(s) = \frac{0.5\omega_c^2}{s^2 + 0.645\omega_c s + 0.708\omega_c^2}$$

donde $w_c$ es el punto a 3 dB.

**(a)** Discretice el filtro utilizando la transformación bilineal.

**(b)** Determine la respuesta de salida, $y(nT)$, del filtro discretizado en las entradas $x(nT)$ siguientes. Tome $w_c = 6\pi$ y $T = 0.01$. Grafique la señal analógica resultante, $y(t)$, generada a partir de un reconstructor ideal [es decir, grafique $y(nT)$ utilizando el comando `plot`].

**(i)** $x(nT) = p_1(nT)$, donde $p_1(t) = u(t + 1/2) - u(t - 1/2)$

**(ii)** $x(nT) = p_1(nT) + 0.5w(nT)$, donde $w(nT)$ es una señal ruidosa cuyos valores son números aleatorios entre 0 y 1 (utilice `rand` en MATLAB para generar la señal).

**(iii)** $x(nT) = p_1(nT) + w(nT)$

**(iv)** $x(nT) = (1 - 2|nT|)p_1(nT)$

**(v)** $x(nT) = (1 - 2|nT|)p_1(nT) + 0.5w(nT)$

**10.10.** Diseñe un filtro IIR pasa bajas de tres polos para que tenga una frecuencia de corte analógica de $w_c = 15$. El intervalo de muestreo es $T = 0.1$. Realice el diseño dos veces, una sin predeformar la frecuencia y una predeformándola. Grafique las curvas de frecuencia de los dos filtros, y compare las frecuencias de corte reales. Base su diseño en un filtro analógico prototipo Butterworth.

**10.11.** Considere los precios de cierre de QQQQ para el periodo de 149 días hábiles del 1 de julio de 2004 al 1 de febrero de 2005.

**(a)** Utilizando los filtros con funciones de transferencia (10.31) y (10.34), y la estrategia de comercio dada en la sección 7.5, determine los días cuando hay compras y los días en que hay ventas.

**(b)** Utilizando su resultado en el inciso (a), determine la ganancia o pérdida neta por acción.

**10.12.** Utilice métodos analíticos para diseñar un filtro digital IIR pasa bajas de tres polos que tenga una frecuencia de corte analógica de $w_c = 10$ rad/s, y suponga que el periodo de muestreo es de $T = 0.1$ segundos. Base su diseño en un filtro analógico prototipo Chebyshev con un rizo de 3 dB en la banda de paso.

**(a)** Especifique la frecuencia de corte digital deseada, $\Omega_c$. También, proporcione la componente de frecuencia más alta de una entrada $x(t)$ que sería permitida para evitar el aliasing.

**(b)** Verifique su diseño analítico mediante MATLAB para diseñar el filtro en forma numérica. Grafique la función de respuesta en frecuencia para el filtro digital resultante. Mida la frecuencia de corte digital real.

**(c)** Utilice MATLAB para simular la respuesta de la siguiente señal muestreada: $x(nT) = 1 + \text{sen } \pi nT + \text{sen } 6\pi nT$. Grafique la entrada y salida analógicas, $x(t)$ y $y(t)$, y la entrada y salida del filtro digital, $x[n]$ y $y[n]$.

**10.13.** Utilice métodos analíticos para diseñar un filtro digital IIR pasa altas de tres polos que tenga una frecuencia de corte analógica de $w_c = 10$ rad/s, y suponga un periodo de muestreo de $T = 0.1$ segundos. Base su diseño en un filtro analógico prototipo Butterworth.

**(a)** Especifique la frecuencia de corte digital deseada, $\Omega_c$. También proporcione la componente de frecuencia más alta de una entrada $x(t)$ que sería permitida para evitar el aliasing.

**(b)** Verifique su diseño analítico mediante MATLAB para diseñar el filtro de manera numérica. Grafique la función de respuesta en frecuencia para el filtro digital resultante. Mida la frecuencia de corte digital real.

**(c)** Utilice MATLAB para simular la respuesta de la siguiente señal muestreada: $x(nT) = 1 + \text{sen } \pi nT + \text{sen } 6\pi nT$. Grafique la entrada y salida analógicas, $x(t)$ y $y(t)$, y la entrada y salida del filtro digital, $x[n]$ y $y[n]$.

**10.14.** Utilice MATLAB para diseñar un filtro digital IIR pasa banda de tres polos que tenga una banda de paso analógica de $w_c = 1$ a $w_c = 5$ rad/s; suponga un periodo de muestreo de $T = 0.1$ segundos. Base su diseño en un filtro analógico prototipo Butterworth. Especifique el filtro en términos de $H_d(z)$.

**(a)** Grafique la función de respuesta en frecuencia para el filtro digital resultante.

**(b)** A partir de la curva de respuesta en frecuencia graficada en el inciso (a), estime la amplitud de la respuesta de las siguientes señales de entrada: $x(t) = 1$, $x(t) = \text{sen } \pi t$, y $x(t) = \text{sen } 6\pi T$.

**(c)** Simule la respuesta del filtro a la señal muestreada $x(nT) = 1 + \text{sen } \pi nT + \text{sen } 6\pi nT$. Compare la respuesta con las amplitudes esperadas, derivadas en el inciso (b).

**(d)** Simule la respuesta del filtro a la señal aleatoria muestreada $x(nT)$, generada a partir del comando de MATLAB `x=rand(1,200)`. Grafique la entrada y la respuesta correspondiente en tiempo continuo.

**10.15.** Diseñe un filtro pasa bajas FIR de longitud $N = 30$ que tenga una frecuencia de corte de $\Omega_c = \pi/3$. Utilice la ventana rectangular.

**(a)** Grafique la respuesta al impulso del filtro.

**(b)** Grafique la magnitud de la curva de respuesta en frecuencia, y determine el rizo de la banda de paso.

**(c)** Calcule y grafique la respuesta del filtro a una entrada de $x[n] = 1 + 2\cos(\pi n/6) + 2\cos(2\pi n/3)$. Explique el efecto de filtrado sobre las diversas componentes de $x[n]$.

**10.16.** Diseñe un filtro pasa altas FIR de longitud $N = 15$ que tenga una frecuencia de corte de $\Omega_c = \pi/2$. Utilice la ventana rectangular.

**(a)** Grafique la respuesta al impulso del filtro.

**(b)** Grafique la magnitud de la curva de respuesta en frecuencia, y determine el rizo de la banda de paso.

**(c)** Repita el diseño para una longitud $N = 31$, y compare los dos filtros en términos del rizo y la región de transición.

**(d)** Calcule y grafique la respuesta de cada filtro a una entrada de $x[n] = 2 + 2\cos(\pi n/3) + 2\cos(2\pi n/3)$. Compare los filtros en términos de sus efectos sobre las diversas componentes de $x[n]$.

**10.17.** Diseñe un filtro pasa bajas FIR de longitud $N = 10$ que tenga una frecuencia de corte de $\Omega_c = \pi/3$. Realice su diseño utilizando **(i)** una ventana rectangular, **(ii)** una ventana Hamming, y **(iii)** una ventana Hanning.

**(a)** Grafique las respuestas al impulso de los filtros.

**(b)** Grafique la magnitud de la respuesta en frecuencia de cada filtro, y compare los filtros en términos de la banda de rechazo y del rizo de la banda de paso.

**(c)** Calcule y grafique la respuesta de cada filtro a una entrada de $x[n] = 2 + 2\cos(\pi n/4) + 2\cos(2\pi n/2)$. Compare los filtros en términos de sus efectos sobre las diversas componentes de $x[n]$.

**10.18.** Considere el sistema del vehículo descrito en el ejemplo 9.1, y dada la ecuación diferencial de entrada y salida

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{k_f}{M}\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{M}x(t)$$

donde $y(t)$ es la posición del carro al tiempo $t$. Suponga que $M = 1$ y $k_f = 0.1$.

**(a)** Discretice el sistema utilizando la transformación bilineal para $T = 5$ segundos.

**(b)** Discretice el sistema utilizando la igualación a la respuesta al escalón para $T = 5$ segundos.

**(c)** Para cada digitalización obtenida en los incisos (a) y (b), grafique la salida analógica $y(nT)$ de la respuesta al escalón de tiempo discreto. Compare estos resultados con la respuesta al escalón para el sistema original de tiempo continuo. Grafique todos los resultados para $t = 0$ a $t = 50$ segundos.

**(d)** Repita los incisos (a) a (c) para $T = 1$ segundo.

**10.19.** Cada sistema de tiempo continuo dado a continuación representa una función de transferencia de lazo cerrado que conseguiremos mediante un controlador digital por retroalimentación. Determine un intervalo adecuado de frecuencias de muestreo $w_s$ para cada sistema.

**(a)** $G_{cl}(s) = 10/(s + 10)$

**(b)** $G_{cl}(s) = 4/(s^2 + 2.83s + 4)$

**(c)** $G_{cl}(s) = 9(s + 1)/(s^2 + 5s + 9)$

**10.20.** Considere el siguiente sistema de tiempo continuo:

$$G_p(s) = \frac{2}{s + 2}$$

Aplicaremos el control digital a este sistema, tal que el sistema de lazo cerrado resultante tenga un polo en $s = -4$.

**(a)** Diseñe un controlador de tiempo continuo por retroalimentación, $G_c(s)$, que consiga el polo de lazo cerrado deseado.

**(b)** Obtenga un controlador digital del inciso (a), donde $T = 0.25$ segundos. Utilizando este control, simule la respuesta al escalón del sistema de lazo cerrado, ya sea con Simulink o con el comando `hybrid`.

**(c)** Repita el inciso (b) con $T = 0.1$ segundos. Compare la respuesta resultante con la obtenida en el inciso (b), y determine cuál es el más cercano a la respuesta deseada de lazo cerrado.

**10.21.** Considere el siguiente sistema de tiempo continuo:

$$G_p(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 2)}$$

El siguiente controlador principal se diseña, tal que proporciona polos de lazo cerrado en $s = -4 \pm 8j$:

$$G_c(s) = \frac{73(s + 2)}{s + 5}$$

**(a)** Digitalice el controlador utilizando la igualación a la respuesta al escalón para $T = 0.1$ segundos. Utilizando este control, simule la respuesta al escalón del sistema de lazo cerrado, ya sea con Simulink o con el comando `hybrid`.

**(b)** Repita el inciso (a) con $T = 0.05$ segundos. Compare la respuesta resultante con la obtenida en el inciso (a), y determine cuál es la más cercana a la respuesta deseada de lazo cerrado.

CAPÍTULO

11

# Representación de estado

Los modelos que hemos considerado hasta aquí son representaciones matemáticas del comportamiento de entrada y salida del sistema en estudio. En este capítulo definiremos un nuevo tipo de modelo, el cual se especificará en términos de una colección de variables que describen el comportamiento interno del sistema. A estas variables se les conoce como variables de estado del sistema. Al modelo definido en términos de variables de estado se le conoce como representación de estado o representación de variables de estado. El objetivo de este capítulo es definir el modelo de estado y estudiar sus propiedades básicas, tanto para los sistemas de tiempo continuo, como para los de tiempo discreto. En diversos libros de texto podemos encontrar un desarrollo más profundo del método de estado para sistemas. Por ejemplo, el lector puede consultar a Kailath [1980], Brogan [1991], o Rugh [1996].

El modelo de estado está dado en términos de una matriz de ecuaciones, por lo que el lector debe estar familiarizado con el álgebra de matrices; en el apéndice B aparece un repaso. Como resultado de la forma matricial del modelo de estado, podemos implementarlo con facilidad en una computadora. Podemos utilizar algunos paquetes comerciales de software, tal como MATLAB, para llevar a cabo las operaciones matriciales que surjan del modelo de estado. En particular, MATLAB se hizo tomando en cuenta las operaciones que relacionan matrices y vectores, por lo que está bien equipado para el estudio del modelo de estado. La definición de operaciones de MATLAB en términos de matrices y vectores da como resultado que el conjunto de cálculos para el modelo de estado sea tan sencillo como las operaciones en una calculadora estándar.

En la sección 11.1 comenzamos el desarrollo del modelo de estado con la noción de estado y la definición de las ecuaciones de estado para un sistema de tiempo continuo. En la sección 11.2 explicamos la construcción de modelos de estado a partir de ecuaciones diferenciales de entrada y salida. En la sección 11.3 estudiaremos la solución de ecuaciones de estado. Y luego, en la sección 11.4 presentaremos la versión del modelo de estado para sistemas de tiempo discreto. En la sección 11.5 estudiamos la definición de las representaciones de estado equivalentes, y en la sección 11.6 llevamos a cabo la discretización de modelos de estado de tiempo continuo. Por último, en la sección 11.7 presentamos un resumen del capítulo.

## 11.1 MODELO DE ESTADO

Considere un sistema causal de tiempo continuo, de una sola entrada y una sola salida, con entrada $v(t)$ y salida $y(t)$. A lo largo del capítulo, $v(t)$ denotará la entrada, en lugar de $x(t)$, dado que utilizaremos el símbolo "$x(t)$" para denotar el estado del sistema, al que definiremos a continuación.

En general, dado un valor $t_1$ de la variable de tiempo $t$, no es posible calcular la respuesta de salida $y(t)$ para $t \geq t_1$ si solamente conocemos la entrada $v(t)$ para $t \geq t_1$. La razón de lo anterior es que al aplicar la entrada $v(t)$ para $t < t_1$, podría introducir energía dentro del sistema que afecta a la respuesta de salida para $t \geq t_1$. Por ejemplo, un voltaje o corriente que aplicamos al circuito $RLC$ para $t < t_1$, podría dar como resultado voltajes en los capacitores y corrientes en los inductores en un tiempo $t_1$. Estos voltajes y corrientes en el tiempo $t_1$ pueden afectar la salida del circuito $RLC$ para $t \geq t_1$.

Dado un sistema con entrada $v(t)$ y salida $y(t)$, para cualquier punto de tiempo $t_1$, el estado $x(t_1)$ del sistema en el tiempo $t = t_1$ se define como la porción del pasado ($t \leq t_1$) del sistema requerida para determinar la respuesta de salida $y(t)$ para toda $t \geq t_1$, dada la entrada $v(t)$ para $t \geq t_1$. Un estado diferente de cero $x(t_1)$ en el tiempo $t_1$ indica la presencia de energía en el sistema en el tiempo $t_1$. En particular, el sistema se encuentra en estado cero en el tiempo $t_1$ si y sólo si no existe energía en el sistema en el tiempo $t_1$. Si el sistema se encuentra en estado cero en $t_1$, podemos calcular la respuesta $y(t)$ para $t \geq t_1$ si conocemos la entrada $v(t)$ para $t \geq t_1$. Si el estado en el tiempo $t_1$ no es cero, es necesario conocer el estado para calcular la respuesta de salida para $t \geq t_1$.

Si el sistema dado es dimensionalmente finito, el estado $x(t)$ del sistema en el tiempo $t$ es un vector columna de $N$ elementos, dado por

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{bmatrix}$$

A las componentes $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t)$ se les conoce como *variables de estado* del sistema, y al número $N$ de variables de estado le llamamos *dimensión* del modelo de estado (o sistema). Por ejemplo, suponga que un sistema dado es un circuito $RLC$. De la teoría de circuitos, podemos representar por completo cualquier energía en el circuito en el tiempo $t$, mediante los voltajes a lo largo de los capacitores en el tiempo $t$, y las corrientes en los inductores en el tiempo $t$. De esta manera, podemos definir el estado del circuito en el tiempo $t$ como un vector cuyos componentes son los voltajes a lo largo de los capacitores en un tiempo $t$, y las corrientes en los inductores en un tiempo $t$. Si el número de capacitores es igual a $N_C$ y el número de inductores en el circuito es igual a $N_L$, el número total de variables de estado es igual a $N_C + N_L$.

Ahora, suponga que el sistema es un integrador con una relación de entrada y salida

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} v(\lambda)\, d\lambda, \quad t > t_0 \tag{11.1}$$

donde $y(t_0) = 0$. Mostraremos que podemos elegir el estado $x(t)$ del integrador para que sea la salida $y(t)$ del mismo integrador en el tiempo $t$. Para ver esto, sea $t_1$ un valor cualquiera de tiempo, con $t_1 > t_0$. Si reescribimos 11.1 obtenemos

$$y(t) = \int_{t_0}^{t_1} v(\lambda)\, d\lambda + \int_{t_1}^{t} v(\lambda)\, d\lambda, t \geq t_1 \tag{11.2}$$

De (11.2) vemos que el primer término del lado derecho de (11.2) es igual a $y(t_1)$. Por lo tanto,

$$y(t) = y(t_1) + \int_{t_1}^{t} v(\lambda)\, d\lambda, t \geq t_1 \tag{11.3}$$

La relación (11.3) muestra que $y(t_1)$ representa la energía en el sistema en el tiempo $t_1$. Con más precisión, de (11.3) podemos ver que $y(t)$ puede calcularse para todo $t \geq t_1$, a partir del

conocimiento de $v(t)$, para $t \geq t_1$, y del conocimiento de $y(t_1)$. De esta manera, podemos tomar el estado en el tiempo $t_1$ para que sea $y(t_1)$.

Ahora considere una interconexión de integradores, sumadores, restadores, y multiplicadores escalares. Dado que los sumadores, restadores y multiplicadores escalares son dispositivos sin memoria, la energía en la interconexión está completamente caracterizada por los valores de las salidas de los integradores. Así, podemos definir el estado en el tiempo $t$ como un vector cuyos componentes son las salidas de los integradores en el tiempo $t$.

### 11.1.1 Ecuaciones de estado

Considere un sistema de tiempo continuo, dimensionalmente finito, de una sola entrada y una sola salida dado por

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{bmatrix}$$

El estado $x(t)$ es una función de vectores valuados en el tiempo $t$. En otras palabras, para cualquier valor particular de $t$, $x(t)$ es un vector columna de $N$ elementos. A la función $x(t)$ de vectores valuados, se le conoce como *trayectoria de estado del sistema*.

Si un sistema con un vector de estado de $N$ dimensiones $x(t)$ es lineal e invariante en el tiempo, podemos modelarlo mediante las ecuaciones de estado dadas por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bv(t) \tag{11.4}$$

$$y(t) = cx(t) + dv(t) \tag{11.5}$$

donde $A$ es una matriz de $N \times N$, $b$ es un vector columna de $N$ elementos, $c$ es un vector fila de $N$ elementos, $d$ es una constate valuada en reales, y $\dot{x}(t)$ es la derivada del vector de estado, donde tomamos la derivada componente por componente; esto es,

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_N(t) \end{bmatrix}$$

Dado que $x(t)$ y $\dot{x}(t)$ son vectores columna de $N$ elementos, (11.4) es una ecuación diferencial vectorial. En particular, (11.4) es una ecuación diferencial vectorial de primer orden. A la ecuación (11.5) le llamamos *ecuación de salida* del sistema. El término $dv(t)$ en (11.5) es una "alimentación directa" entre la entrada $v(t)$ y la salida $y(t)$. Si $d = 0$, no existe conexión directa entre $v(t)$ y $y(t)$.

Las ecuaciones (11.4) y (11.5) constituyen el modelo de estado del sistema. Esta representación es un modelo del sistema con dominio en el tiempo, dado que las ecuaciones están en términos de las funciones de tiempo. Observe que el modelo de estado está especificado en dos partes: (11.4) describe la respuesta de estado que resulta de aplicar una entrada $v(t)$ con estado inicial $x(t_0) = x_0$, mientras (11.5) establece la respuesta de salida como una función de estado y de entrada. Las dos partes del modelo de estado corresponden a

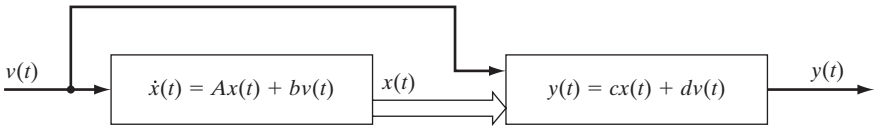



**FIGURA 11.1**
Estructura en cascada correspondiente al modelo de estado.

una descomposición en cascada del sistema, como podemos ver en la figura 11.1. En la figura 11.1, la doble línea para $x(t)$ indica que $x(t)$ es una señal vectorial.

En la figura 11.1 podemos ver que el estado del sistema $x(t)$ es una variable vectorial "interna" del sistema; es decir, las variables de estado [las componentes de $x(t)$] son señales dentro del sistema. Dado que el modelo de estado está especificado en términos de la variable vectorial interna $x(t)$, la representación es un modelo interno del sistema. La forma de este modelo es muy diferente a la de los modelos externos o de entrada y salida que vimos en el capítulo 2.

Con $a_{ij}$ igual a la entrada $ij$ de la matriz $A$, y $b_i$ igual al *iésimo* componente del vector columna $b$, podemos escribir (11.4) de forma expandida

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1N}x_N(t) + b_1v(t)\\
\dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2N}x_N(t) + b_2v(t)\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
\dot{x}_N(t) &= a_{N1}x_1(t) + a_{N2}x_2(t) + \cdots + a_{NN}x_N(t) + b_Nv(t)
\end{aligned}$$

Con $c = [c_1\ c_2\ \ldots\ c_N]$, la forma expandida de (11.5) es

$$y(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_Nx_N(t) + dv(t)$$

A partir de la forma expandida de las ecuaciones de estado, vemos que la derivada $\dot{x}_i(t)$ de la *iésima* variable de estado y la salida $y(t)$ son iguales a las combinaciones lineales de todas las variables de estado y de la entrada.

## 11.2 CONSTRUCCIÓN DE MODELOS DE ESTADO

En la primera parte de esta sección mostramos la manera de construir un modelo de estado a partir de la ecuación diferencial de entrada y salida del sistema. Comenzamos el desarrollo con el caso de primer orden.

Considere un sistema causal de tiempo continuo, de una sola entrada y una sola salida dado por la ecuación diferencial de entrada y salida de primer orden

$$\dot{y}(t) + ay(t) = bv(t) \tag{11.6}$$

donde $a$ y $b$ son constantes escalares. Al definir el estado $x(t)$ del sistema para que sea igual a $y(t)$, obtenemos el modelo de estado

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= -ax(t) + bv(t)\\
y(t) &= x(t)
\end{aligned}$$

De esta manera, es fácil construir un modelo de estado a partir de una ecuación diferencial de entrada y salida de primer orden. En términos de la notación de (11.4) y (11.5), los coeficientes $A, b, c$ y $d$ de este modelo de estado son

$$A = -a, \qquad b = b, \qquad c = 1, \qquad d = 0$$

Ahora supongamos que el sistema dado tiene una ecuación diferencial de entrada y salida de segundo orden

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 v(t) \tag{11.7}$$

Al definir las variables de estado mediante

$$x_1(t) = y(t), \qquad x_2(t) = \dot{y}(t)$$

tenemos las ecuaciones de estado

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) + b_0 v(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

Si escribimos estas ecuaciones en forma de matriz, arroja el siguiente modelo de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

La definición de las variables de estado en términos de la salida y de las derivadas de la salida se extiende a cualquier sistema dado por la ecuación diferencial de entrada y salida de orden $N$

$$y^{(N)}(t) + \sum_{i=0}^{N-1} a_i y^{(i)}(t) = b_0 v(t) \tag{11.8}$$

donde $y^{(i)} = d^i y/dt^i$. Para expresar (11.8) en forma de ecuación de estado, primero defina las variables de estado mediante

$$x_i(t) = y^{(i-1)}(t), i = 1, 2, \ldots, N$$

Entonces, de (11.8), las ecuaciones de estado resultantes son

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{N-1}(t) &= x_N(t) \\ \dot{x}_N(t) &= -\sum_{i=0}^{N-1} a_i x_{i+1}(t) + b_0 v(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

Si escribimos estas ecuaciones en forma de matriz obtenemos el modelo de estado $N$ dimensional $\dot{x}(t) = Ax(t) + bv(t)$, $y(t) = cx(t)$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{N-1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad c = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0]$$

A partir de las construcciones anteriores, es tentador concluir que siempre podemos definir las variables de estado de un sistema como iguales a la salida $y(t)$ y las derivadas de $y(t)$. Desafortunadamente éste no es el caso. Por ejemplo, suponga que el sistema está dado por la ecuación diferencial de entrada y salida de segundo orden

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = b_1\dot{v}(t) + b_0v(t) \tag{11.9}$$

donde $b_1 \neq 0$. Observe que (11.9) no es un caso especial de (11.8), ya que $\ddot{y}(t)$ depende de $\dot{v}(t)$.

Si $x_1(t) = y(t)$ y $x_2(t) = \dot{y}(t)$, no es posible eliminar el término $b_1\dot{v}(t)$ en (11.9). De esta manera, no existe modelo de estado respecto a esta definición de variables de estado. Sin embargo, el sistema tiene el siguiente modelo de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t), \quad y(t) = [b_0 \quad b_1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{11.10}$$

Para verificar que (11.10) es un modelo de estado, debemos demostrar que la ecuación diferencial de entrada y salida que corresponde a (11.10) es la misma que (11.9). Si expandimos (11.10) obtenemos

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \tag{11.11}$$

$$\dot{x}_2(t) = -a_0x_1(t) - a_1x_2(t) + v(t) \tag{11.12}$$

$$y(t) = b_0x_1(t) + b_1x_2(t) \tag{11.13}$$

Si derivamos ambos lados de (11.13) y utilizamos (11.11) y (11.12) obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= b_0x_2(t) + b_1[-a_0x_1(t) - a_1x_2(t) + v(t)] \\ &= -a_1y(t) + (a_1b_0 - a_0b_1)x_1(t) + b_0x_2(t) + b_1v(t) \end{aligned} \tag{11.14}$$

Si derivamos ambos lados de (11.14) y de nuevo con el uso de (11.11) y (11.12) obtenemos

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) &= -a_1\dot{y}(t) + (a_1b_0 - a_0b_1)x_2(t) \\ &\quad + b_0[-a_0x_1(t) - a_1x_2(t) + v(t)] + b_1\dot{v}(t) \\ &= -a_1\dot{y}(t) - a_0y(t) + b_0v(t) + b_1\dot{v}(t) \end{aligned}$$

Esto es lo mismo que la ecuación diferencial de entrada y salida (11.9) del sistema dado, y por lo tanto (11.10) es un modelo de estado.

Podemos expresar las variables de estado $x_1(t)$ y $x_2(t)$ en el modelo de estado (11.10), en términos de $v(t)$, $y(t)$, y $\dot{y}(t)$. Dejamos al lector interesado la derivación de estas expresiones (vea el problema 11.3).

Ahora considere el sistema lineal e invariante en el tiempo dado por la ecuación diferencial de entrada y salida de orden $N$

$$y^{(N)}(t) + \sum_{i=0}^{N-1} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i v^{(i)}(t) \tag{11.15}$$

Observe que esta ecuación diferencial de entrada y salida incluye derivadas de la entrada $v(t)$, mientras que no existen derivadas en la ecuación diferencial de entrada y salida (11.8). El sistema dado por (11.15) tiene el modelo de estado $N$ dimensional $\dot{x}(t) = Ax(t) + bv(t)$, $y(t) = cx(t)$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{N-1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = [b_0 \;\; b_1 \;\; \cdots \;\; b_{N-1}]$$

Omitimos la demostración de que se trata de un modelo de estado.

### 11.2.1 Desarrollo con integradores

Podemos desarrollar cualquier sistema lineal e invariante en el tiempo, dado por el modelo de estado de $N$ dimensiones

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bv(t)$$
$$y(t) = c(t) + dv(t)$$

mediante la interconexión de $N$ integradores y combinaciones de sumadores, restadores, y multiplicadores escalares. Los pasos para llevar a cabo el proceso son los siguientes:

**Paso 1.** Para cada variable de estado $x_i(t)$, construya un integrador y defina la salida del integrador para que sea $x_i(t)$. Entonces, la entrada del *iésimo* integrador será igual a $\dot{x}_i(t)$. Observe que, si existen $N$ variables de estado, el desarrollo del integrador contendrá $N$ integradores.

**Paso 2.** Coloque un sumador/restador frente a cada integrador. Introduzca dentro de los sumadores/restadores múltiplos escalares de las variables de estado y de la entrada, de acuerdo con el vector $\dot{x}(t) = Ax(t) + bv(t)$.

**Paso 3.** Coloque múltiplos escalares de las variables de estado y de la entrada dentro de un sumador/restador para desarrollar la salida $y(t)$, de acuerdo con la ecuación $y(t) = cx(t) + dv(t)$.

### Ejemplo 11.1 Desarrollo con integradores

Considere un modelo de estado bidimensional con coeficientes arbitrarios; es decir,

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}v(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}c_1 & c_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

Si seguimos los pasos anteriores obtenemos el diagrama que aparece en la figura 11.2.

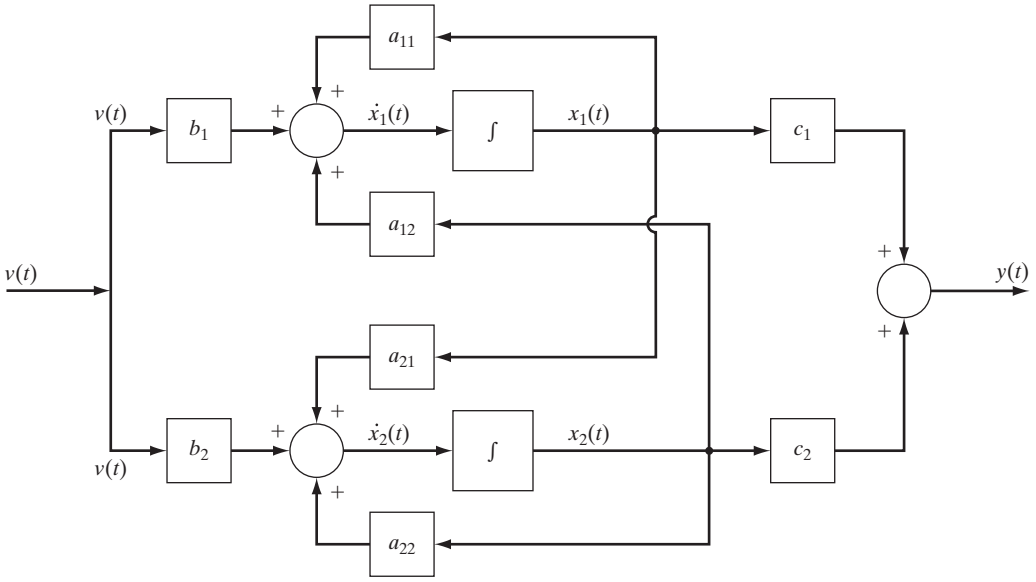



**FIGURA 11.2**
Desarrollo del ejemplo 11.1.

Existe una controversia respecto a que cualquier sistema lineal e invariante en el tiempo, dado por un modelo de estado, tiene una realización con integradores. A saber, cualquier sistema especificado por una interconexión que consiste en $N$ integradores y combinaciones de sumadores, restadores, y multiplicadores escalares, tiene un modelo de estado de dimensión $N$. Podemos calcular el modelo de estado de manera directa a partir de la interconexión mediante los siguientes pasos:

**Paso 1.** Defina la salida de cada integrador en la interconexión para que sea una variable de estado. Luego, si la salida del *iésimo* integrador es $x_i(t)$, la entrada a este integrador es $\dot{x}_i(t)$.

**Paso 2.** Observando la interconexión, exprese cada $\dot{x}_i(t)$ en términos de una suma de múltiplos escalares de las variables de estado y de la entrada. Si escribe estas relaciones en forma de matriz obtendrá la ecuación vectorial $\dot{x}(t) = Ax(t) + bv(t)$.

**Paso 3.** De nuevo observe la interconexión y exprese la salida $y(t)$ en términos de múltiplos escalares de las variables de estado y de la entrada. Escriba esto en forma vectorial para obtener la ecuación de salida $y(t) = cx(t) + dv(t)$.

### Ejemplo 11.2 Ecuaciones de estado a partir de una realización con integradores

Considere el sistema de la figura 11.3. Con la salida del primer integrador representada por $x_1(t)$ y la salida del segundo integrador representada por $x_2(t)$, de la figura 11.3, encontramos que

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) - 3x_2(t) + v(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + 2v(t)$$

Además, de la figura 11.3, podemos ver que

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) + 2v(t)$$

Entonces, las matrices de los coeficientes del modelo de estado son

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad c = [1 \quad 1], \quad d = 2$$

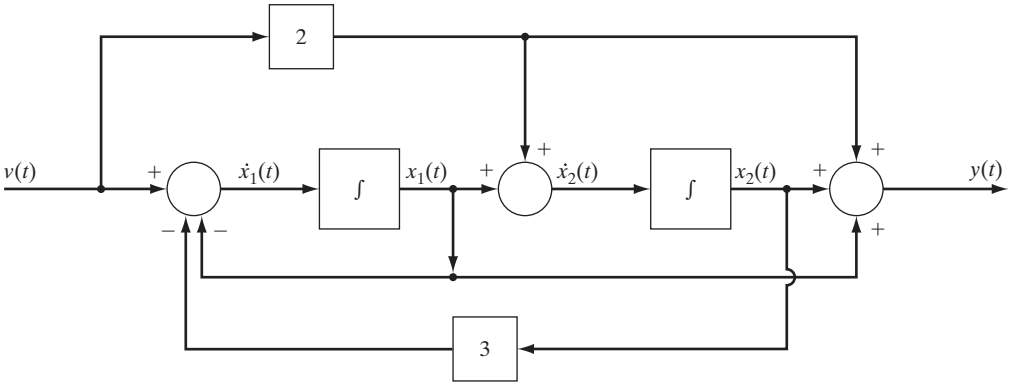



**FIGURA 11.3**
Sistema del ejemplo 11.2.

A partir de los resultados que obtuvimos vemos que existe una correspondencia uno a uno entre los desarrollos del integrador y los modelos de estado.

## 11.2.2 Sistemas de múltiples entradas y salidas

Podemos generalizar con facilidad el modelo de estado para sistemas de múltiples entradas y salidas. En particular, el modelo de estado de un sistema lineal e invariante de tiempo continuo y de dimensiones finitas, con entrada $p$ y salida $r$ está dado por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Dv(t)$$

donde ahora $B$ es una matriz de $N \times p$ de números reales, $C$ es una matriz de $r \times N$ de números reales, y $D$ es una matriz de $r \times p$ de números reales. La matriz $A$ es aún de $N \times N$, como en el caso de una sola entrada y una sola salida.

Si especificamos al sistema de entrada $p$ y salida $r$ mediante una colección de parejas de ecuaciones diferenciales de entrada y salida, podemos construir un modelo de estado si generalizamos el procedimiento que vimos anteriormente para el caso de una sola entrada y una sola salida. Explicaremos el proceso con el siguiente ejemplo:

### Ejemplo 11.3 Sistema de una pareja de dos carros

Considere dos carros que se mueven a lo largo de una superficie, como muestra la figura 11.4. Suponemos que la masa de ambos carros es igual a $M$ y que el coeficiente de fricción viscosa es el mismo para ambos carros, y es igual a $k_f$. Como podemos ver, $d_1(t)$ es la posición del primer carro en un tiempo $t$, $d_2(t)$ es la posición del segundo carro en un tiempo $t$, $f_1(t)$ es la fuerza de aceleración o frenado aplicada al primer carro, y $f_2(t)$ es la fuerza de aceleración o frenado aplicada al segundo carro. De esta manera, el movimiento de los dos carros está dado por las ecuaciones diferenciales

$$\ddot{d}_1(t) + \frac{k_f}{M}\dot{d}_1(t) = \frac{1}{M}f_1(t)$$
$$\ddot{d}_2(t) + \frac{k_f}{M}\dot{d}_2(t) = \frac{1}{M}f_2(t)$$

Además, el primer carro tiene un radar, el cual indica la medida de la distancia

$$w(t) = d_2(t) - d_1(t)$$

entre los dos carros en el tiempo $t$. El propósito de medir la distancia es permitir el control automático de la velocidad del carro, de tal manera que el carro mantenga una distancia segura detrás del carro que se encuentra enfrente de él.

Las entradas del sistema de los dos carros están definidas como $f_1(t)$ y $f_2(t)$, y de esta manera el sistema es de dos entradas. Las salidas están definidas como la velocidad $d_1(t)$ del primer carro, y la separación $w(t)$ entre los dos carros, ambos de los cuales se pueden medir con el carro que cuenta con el radar. Entonces, la salida (vista desde el carro con el radar) es un vector dado por

$$y(t) = \begin{bmatrix} \dot{d}_1(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$$

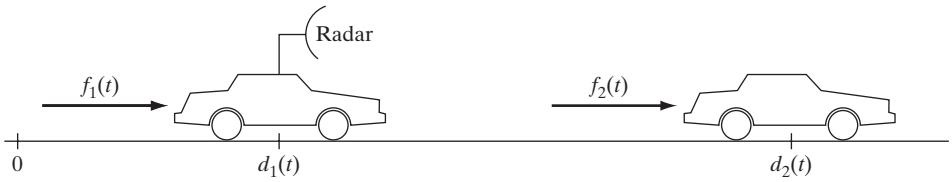



**FIGURA 11.4**
Sistema de la pareja de carros.

Con esta definición de la salida, el sistema es un sistema de dos salidas. Ahora, si las variables de estado están definidas como

$$x_1(t) = \dot{d}_1(t)$$
$$x_2(t) = \dot{d}_2(t)$$
$$x_3(t) = w(t)$$

entonces el modelo de estado del sistema es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-k_f}{M} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-k_f}{M} & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{M} & 0 \\ 0 & \frac{1}{M} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \tag{11.16}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d}_1(t) \\ \dot{d}_2(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \tag{11.17}$$

Si un sistema de entrada $p$ y salida $r$ está dado por una interconexión de integradores, sumadores, restadores, y multiplicadores escalares, podemos construir el modelo de estado de manera directa a partir de la interconexión. El proceso es muy similar a los pasos que vimos para el caso de una sola entrada y una sola salida.

### Ejemplo 11.4 Sistema de dos entradas y dos salidas

Considere un sistema de dos entradas y dos salidas como el que aparece en la figura 11.5. En la figura podemos ver que

$$\dot{x}_1(t) = -3y_1(t) + v_1(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = v_2(t)$$
$$y_1(t) = x_1(t) + x_2(t)$$
$$y_2(t) = x_2(t)$$

Al sustituir la expresión para $y_1(t)$ en la expresión para $\dot{x}_1(t)$ obtenemos

$$\dot{x}_1(t) = -3[x_1(t) + x_2(t)] + v_1(t)$$

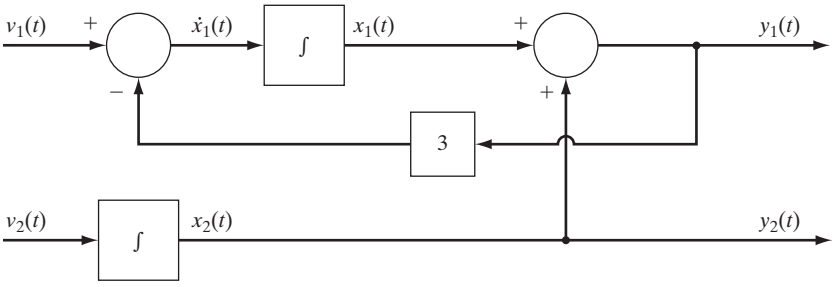



**FIGURA 11.5**
Sistema del ejemplo 11.4.

Colocamos estas ecuaciones en forma de matriz, con lo que obtenemos el modelo de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

## 11.3 SOLUCIÓN DE ECUACIONES DE ESTADO

Considere el sistema lineal e invariante en el tiempo continuo, de $p$-entradas y $r$-salidas dado por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t) \tag{11.18}$$

$$y(t) = Cx(t) + Dv(t) \tag{11.19}$$

Recuerde que la matriz $A$ es $N \times N$, $B$ es $N \times p$, $C$ es $r \times N$, y $D$ es $r \times p$. Dado un estado inicial $x(0)$ en el tiempo inicial $t = 0$, y una entrada $v(t)$, para $t \geq 0$, derivamos una expresión analítica en esta sección para la solución $x(t)$ de (11.18). Entonces, de aquí, utilizaremos (11.19) para derivar una expresión para la respuesta de salida $y(t)$. En los ejemplos siguientes demostraremos la solución numérica de (11.18) y (11.19) mediante MATLAB. En la sección 11.6 explicaremos el procedimiento para la solución numérica empleado en MATLAB.

Comenzaremos el desarrollo con la consideración de la ecuación diferencial vectorial libre (no forzada)

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad t > 0 \tag{11.20}$$

con estado inicial $x(0)$. Para resolver (11.20), es necesario definir la *matriz exponencial* $e^{At}$, la cual es una generalización del exponencial escalar $e^{at}$. Para cada valor real de $t$, $e^{At}$ está definida mediante la matriz de series de potencias

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \frac{A^4t^4}{4!} + \cdots \tag{11.21}$$

donde $I$ es la matriz identidad de $N \times N$. La matriz exponencial $e^{At}$ es una matriz de $N \times N$ de funciones de tiempo. Más adelante mostraremos cómo podemos calcular los elementos de $e^{At}$ mediante la transformada de Laplace.

Existe un par de propiedades de $e^{At}$ que son necesarias: primero, para cualesquiera números reales $t$ y $\lambda$,

$$e^{A(t+\lambda)} = e^{At}e^{A\lambda} \tag{11.22}$$

Podemos demostrar la relación (11.22) si establecemos $t = t + \lambda$ en (11.21).

Si tomamos $\lambda = -t$ en (11.22) obtenemos

$$e^{At}e^{-At} = e^{A(t-t)} = I \tag{11.23}$$

La relación (11.23) muestra que la matriz $e^{At}$ siempre tiene una inversa, la cual es igual a la matriz $e^{-At}$.

La derivada $d/dt(e^{At})$ de la matriz exponencial $e^{At}$ está definida como la matriz que formamos al tomar la derivada de los componentes de $e^{At}$. Podemos calcular la derivada $d/dt(e^{At})$ si tomamos la derivada de los términos que componen la matriz de series de potencias en (11.21). El resultado es

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{At} &= A + A^2t + \frac{A^3t^2}{2!} + \frac{A^4t^3}{3!} + \cdots \\ &= A\left(I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots\right) \\ \frac{d}{dt}e^{At} &= Ae^{At} = e^{At}A \end{aligned} \tag{11.24}$$

De nuevo, considere el problema para resolver (11.20). Podemos decir que la solución es

$$x(t) = e^{At}x(0), \qquad t \geq 0 \tag{11.25}$$

Para verificar que la expresión (11.25) para $x(t)$ es la solución, tome la derivada de ambos lados de (11.25). Esto arroja

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= \frac{d}{dt}[e^{At}x(0)] \\ &= \left[\frac{d}{dt}e^{At}\right]x(0)\end{aligned}$$

Luego, utilizamos (11.24) y obtenemos

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ae^{At}x(0) = Ax(t)$$

De esta manera, la expresión (11.25) para $x(t)$ satisface la ecuación diferencial vectorial (11.20).

De (11.25) se puede ver que es posible calcular el estado $x(t)$ en el tiempo $t$ a partir del estado $x(0)$ en el tiempo $t = 0$ sin ninguna entrada aplicada para $t \geq 0$, al multiplicar $x(0)$ por la matriz $e^{At}$. Como resultado de esta propiedad, la matriz $e^{At}$ se conoce como la *matriz de transición de estado* del sistema.

### 11.3.1 Solución a una ecuación forzada

Ahora, encontraremos una expresión para resolver la ecuación forzada (11.18). Podemos calcular la solución mediante una versión matricial del método de factor de integración, utilizado para resolver una ecuación diferencial escalar de primer orden.

Al multiplicar ambos lados de (11.18) a la izquierda por $e^{-At}$ y reacomodar los términos, obtenemos

$$e^{-At}[\dot{x}(t) - Ax(t)] = e^{-At}Bv(t) \tag{11.26}$$

De (11.24), encontramos que el lado izquierdo de (11.26) es igual a la derivada de $e^{-At}x(t)$. De esta manera,

$$\frac{d}{dt}[e^{-At}x(t)] = e^{-At}Bv(t) \tag{11.27}$$

Al integrar ambos lados de (11.27) obtenemos

$$e^{-At}x(t) = x(0) + \int_0^t e^{-A\lambda}Bv(\lambda)\,d\lambda$$

Por último, si multiplicamos ambos lados por $e^{At}$ obtenemos

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\lambda)}Bv(\lambda)\,d\lambda, \quad t \geq 0 \tag{11.28}$$

La ecuación (11.28) es la solución completa de (11.18) que resulta del estado inicial $x(0)$ y la entrada $v(t)$ aplicada para $t \geq 0$.

### 11.3.2 Respuesta de salida

Sustituir (11.28) en (11.19) da como resultado la siguiente expresión para la respuesta completa de salida $y(t)$, resultante del estado inicial $x(0)$ y la entrada $v(t)$:

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\lambda)}Bv(\lambda)\,d\lambda + Dv(t), t \geq 0 \tag{11.29}$$

De la definición del impulso unitario $\delta(t)$, podemos rescribir (11.29) en la forma

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t (Ce^{A(t-\lambda)}Bv(\lambda) + D\delta(t-\lambda)v(\lambda))\,d\lambda, t \geq 0 \tag{11.30}$$

Entonces definimos

$$y_{zi}(t) = Ce^{At}x(0) \tag{11.31}$$

y

$$y_{zs}(t) = \int_0^t (Ce^{A(t-\lambda)}Bv(\lambda) + D\delta(t-\lambda)v(\lambda))\,d\lambda \tag{11.32}$$

de (11.30) tenemos que

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

Al término $y_{zi}(t)$ se le conoce como *respuesta de entrada cero*, ya que es la respuesta completa de salida cuando la entrada $v(t)$ es cero. Al término $y_{zs}(t)$ se le conoce como *respuesta de estado cero*, ya que es una respuesta completa de salida cuando el estado inicial $x(0)$ es cero.

La respuesta de estado cero $y_{zs}(t)$ es la misma que la respuesta a la entrada $v(t)$ sin condiciones iniciales en el sistema, en el tiempo $t = 0$. En el caso de una sola entrada y una sola salida, de los resultados del capítulo 2, obtenemos

$$y_{zs}(t) = h(t) * v(t) = \int_0^t h(t - \lambda)v(\lambda)\, d\lambda, \quad t \geq 0 \tag{11.33}$$

donde $h(t)$ es la respuesta al impulso del sistema. Igualamos los lados derechos de (11.32) y (11.33) y obtenemos

$$\int_0^t (Ce^{A(t-\lambda)}Bv(\lambda) + D\delta(t - \lambda)v(\lambda))\, d\lambda = \int_0^t h(t - \lambda)v(\lambda)\, d\lambda \tag{11.34}$$

Para que (11.34) acepte todas las entrada de $v(t)$, debe ser cierto que

$$h(t - \lambda) = Ce^{A(t-\lambda)}B + D\delta(t - \lambda), t \geq \lambda$$

o

$$h(t) = Ce^{At}B + D\delta(t), t \geq 0 \tag{11.35}$$

A partir de la relación (11.35), es posible calcular la respuesta al impulso directamente de las matrices de coeficientes del modelo de estado del sistema.

### 11.3.3 Solución vía la transformada de Laplace

Considere de nuevo un sistema de $N$ dimensiones con $p$ entradas y $r$ salidas, dadas por el modelo de estado (11.18) y (11.19). Para calcular las respuestas de estado y de salida que resultan del estado inicial $x(0)$ y de la entrada $v(t)$ aplicada para $t \geq 0$, podemos utilizar las expresiones (11.28) y (11.29). Para evitar evaluar las integrales en (11.28) y (11.29), podemos utilizar la transformada de Laplace para calcular las respuestas de estado y de salida del sistema. El método de la transformada es una versión matricial del procedimiento que explicamos para resolver una ecuación diferencial escalar de primer orden. Los pasos son los siguientes.

Si tomamos la transformada de Laplace de la ecuación de estado (11.18) obtenemos

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BV(s) \tag{11.36}$$

donde $X(s)$ es la transformada de Laplace del vector de estado $x(t)$, con la transformada tomada componente por componente; es decir,

$$X(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_N(s) \end{bmatrix}$$

donde $X_1(s)$ es la transformada de Laplace de $x_i(t)$. El término $V(s)$ en (11.36) es la transformada de Laplace de la entrada $v(t)$, donde de nuevo tomamos la transformada, componente por componente.

Ahora podemos rescribir (11.36) en la forma

$$(sI - A)X(s) = x(0) + BV(s) \tag{11.37}$$

donde $I$ es la matriz identidad de $N \times N$. Observe que al factorizar $s$ de $sX(s)$, debemos multiplicar $s$ por $I$. La razón para esto es que $A$ no puede restarse del escalar $s$, dado que $A$ es una matriz de $N \times N$. Sin embargo, $A$ puede restarse de la matriz diagonal $sI$. Por definición de la matriz identidad, el producto $(sI - A)X(s)$ es igual a $sX(s) - AX(s)$.

Es evidente que la matriz $sI - A$ en (11.37) siempre tiene una inversa $(sI - A)^{-1}$ (más adelante veremos por qué esto es cierto). Entonces, podemos multiplicar ambos lados de (11.37) por $(sI - A)^{-1}$. Esto arroja

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BV(s) \tag{11.38}$$

El lado derecho de (11.38) es la transformada de Laplace de la respuesta de estado que resulta del estado inicial $x(0)$ y la entrada $v(t)$ aplicada para $t \geq 0$. Podemos entonces calcular la respuesta de estado $x(t)$ si tomamos la transformada inversa de Laplace del lado derecho de (11.38).

Si comparamos (11.38) con (11.28) nos podemos dar cuenta que $(sI - A)^{-1}$ es la transformada de Laplace de la matriz de transición de estado $e^{At}$. Dado que $e^{At}$ es una función bien definida de $t$, esto muestra que la inversa $(sI - A)^{-1}$ debe existir. Observe además que

$$e^{At} = \text{transformada inversa de Laplace de } (sI - A)^{-1} \tag{11.39}$$

La relación (11.39) es muy útil para calcular $e^{At}$. Explicaremos esto más adelante con un ejemplo.

Tomamos la transformada de Laplace de la ecuación de salida (11.19) y obtenemos

$$Y(s) = CX(s) + DV(s) \tag{11.40}$$

Sustituimos (11.38) en (11.40) y tenemos

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + [C(sI - A)^{-1}B + D]V(s) \tag{11.41}$$

El lado derecho de (11.41) es la transformada de Laplace de la respuesta completa de salida que resulta del estado inicial $x(0)$ y la entrada $v(t)$.

Si $x(0) = 0$ (sin energía inicial en el sistema), (11.41) se reduce a

$$Y(s) = Y_{zs}(s) = H(s)V(s) \tag{11.42}$$

donde $H(s)$ es la matriz de transferencia dada por

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{11.43}$$

Entonces, podemos calcular la matriz de transferencia directamente de los coeficientes de la matriz del modelo de estado del sistema.

### Ejemplo 11.5 Aplicación al sistema de dos carros

Considere de nuevo el sistema de dos carros del ejemplo 11.3, con el modelo de estado del sistema dado por (11.16) y (11.17). Recuerde que $x_1(t)$ es la velocidad del primer carro, $x_2(t)$ es la velocidad del segundo carro, $x_3(t)$ es la distancia entre los carros, y $y_1(t) = x_1(t), y_2(t) = x_3(t)$. Primero calcularemos la matriz transición de estado $e^{At}$ del sistema. Dado que la matriz $A$ para este sistema es de $3 \times 3$, podemos calcular la inversa de la matriz

$$sI - A = \begin{bmatrix} s + \dfrac{k_f}{M} & 0 & 0 \\ 0 & s + \dfrac{k_f}{M} & 0 \\ 1 & -1 & s \end{bmatrix}$$

mediante el método que aparece en el apéndice B. El determinante de $sI - A$ está dado por

$$\det(sI - A) = \left(s + \frac{k_f}{M}\right)\begin{vmatrix} s + \dfrac{k_f}{M} & 0 \\ -1 & s \end{vmatrix} = \left(s + \frac{k_f}{M}\right)^2 s$$

y la matriz cofactor de $sI - A$ está dada por

$$\operatorname{cof}(sI - A) = \begin{bmatrix} s\left(s + \dfrac{k_f}{M}\right) & 0 & -\left(s + \dfrac{k_f}{M}\right) \\ 0 & s\left(s + \dfrac{k}{M}\right) & s + \dfrac{k_f}{M} \\ 0 & 0 & \left(s + \dfrac{k_f}{M}\right)^2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)}\operatorname{cof}(A)' = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s + \dfrac{k_f}{M}} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{s + \dfrac{k}{M}} & 0 \\ -\dfrac{1}{s\left(s + \dfrac{k}{M}\right)} & \dfrac{1}{s\left(s + \dfrac{k_f}{M}\right)} & \dfrac{1}{s} \end{bmatrix}$$

Por (11.39), $e^{At}$ es igual a la transformada inversa de Laplace de $(sI - A)^{-1}$. Mediante expansiones en fracciones parciales y búsqueda en tablas obtenemos:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-(k_f/M)t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-(k_f/M)t} & 0 \\ -\dfrac{M}{k_f} + \dfrac{M}{k_f}e^{-(k_f/M)t} & \dfrac{M}{k_f} - \dfrac{M}{k_f}e^{-(k_f/M)t} & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora la respuesta de estado $x(t)$ que resulta de cualquier estado inicial $x(0)$ con entrada cero está dada por

$$x(t) = e^{At}x(0), \quad t \geq 0$$

Por ejemplo, si la velocidad inicial del primer carro es $x_1(0) = 60$, la velocidad inicial del segundo carro es $x_2(0) = 60$, y la separación inicial entre los carros es $x_3(0) = 100$, entonces, el estado inicial es

$$x(0) = \begin{bmatrix} 60 \\ 60 \\ 100 \end{bmatrix} \tag{11.44}$$

y

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{-(k_f/M)t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-(k_f/M)t} & 0 \\ -\dfrac{M}{k_f} + \dfrac{M}{k_f}e^{-(k_f/M)t} & \dfrac{M}{k_f} - \dfrac{M}{k_f}e^{-(k_f/M)t} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 60 \\ 100 \end{bmatrix}$$

lo cual nos da

$$x(t) = \begin{bmatrix} 60e^{-(k_f/M)t} \\ 60e^{-(k_f/M)t} \\ 100 \end{bmatrix}, \quad t \geq 0 \tag{11.45}$$

Este resultado muestra que ambos carros desaceleran a la misma razón exponencial, y que la separación entre los carros permanece igual al valor inicial de 100 para toda $t \geq 0$.

Suponga ahora que $M = 1000$, $k_f = 10$, y que el estado inicial $x(0)$ está dado por (11.44), pero ahora el segundo carro recibe una fuerza $f_2(t) = -100e^{-0.1t}$ para $t \geq 0$, lo cual es el resultado de que el conductor pise el freno de manera repentina y luego lo quite gradualmente. La pregunta clave es si el primer carro impacta al segundo carro debido al frenado del segundo. Para determinar esto, calcularemos primero la respuesta de estado $x(t)$ que resulta solamente de la entrada

$$v(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -100e^{-0.1t} \end{bmatrix}, t \geq 0 \tag{11.46}$$

La transformada de Laplace de $v(t)$ es

$$V(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{-100}{s + 0.1} \end{bmatrix}$$

Luego, mediante el uso de (11.38) con $x(0) = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} X(s) &= \begin{bmatrix} s + 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & s + 0.01 & 0 \\ 1 & -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 0.001 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{-100}{s + 0.1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s + 0.01} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{s + 0.01} & 0 \\ -\dfrac{1}{s(s + 0.01)} & \dfrac{1}{s(s + 0.01)} & \dfrac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{-0.1}{s + 0.1} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{-0.1}{(s + 0.01)(s + 0.1)} \\ \dfrac{-0.1}{s(s + 0.01)(s + 0.1)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Al expandir las componentes de $X(s)$ obtenemos

$$X(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{-1.11}{s + 0.01} + \dfrac{1.11}{s + 0.1} \\ \dfrac{-100}{s} + \dfrac{111.11}{s + 0.01} - \dfrac{11.11}{s + 0.1} \end{bmatrix}$$

Tomamos la transformada inversa de Laplace de $X(s)$, y obtenemos la siguiente respuesta de estado que resulta de la entrada $v(t)$:

$$x(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.11(e^{-0.1t} - e^{-0.01t}) \\ -100 + 111.11e^{-0.01t} - 11.11e^{-0.1t} \end{bmatrix}, t \geq 0 \tag{11.47}$$

La respuesta de estado completa que resulta de la entrada $v(t)$ dada por (11.46) y el estado inicial $x(0)$ dado por (11.44) es igual a la suma de las respuestas dadas por (11.45) y (11.47). Al sumar estas respuestas obtenemos

$$x(t) = \begin{bmatrix} 60e^{-0.01t} \\ 60e^{-0.01t} + 1.11(e^{-0.1t} - e^{-0.01t}) \\ 111.11e^{-0.01t} - 11.11e^{-0.1t} \end{bmatrix}, t \geq 0 \tag{11.48}$$

De (11.48) vemos que la distancia entre los carros está dada por

$$x_3(t) = 111.11e^{-0.01t} - 11.11e^{-0.1t}, t \geq 0 \tag{11.49}$$

Dado que $111.11e^{-0.01t} > 11.11e^{-0.1t}$ para toda $t \geq 0$, y si asumimos que los carros tienen una masa puntual, podemos deducir de (11.49) que el primer carro no impacta al segundo, pero los dos carros colisionan en el límite cuando $t \to \infty$.

Podemos utilizar MATLAB para resolver las respuestas de estado y de salida del sistema que resultan de cualquier estado inicial $x(0)$ y de cualquier entrada que puede expresarse de forma cerrada. Por ejemplo, cuando $x(0)$ está dada por (11.44) y $v(t)$ está dada por (11.46), podemos calcular la respuesta de estado completa mediante los siguientes comandos:

```
A = [-0.01 0 0;0 -0.01 0;-1 1 0]; B = [0.001 0;0 0.001;0 0];
C = [1 0 0;0 0 1]; D = zeros(2,2);
sys = ss(A,B,C,D);
t = 0:1:200; % simula para 0 < t < 200 s
x0 = [60 60 100]'; % define I.C.
v(:,1)=zeros(201,1);
v(:,2)=-100*exp(-0.1*t)';
[y,t,x] = lsim(sys,v,t,x0);
plot(t,x(:,1),t,x(:,2),t,x(:,3))
```

Al ejecutar el programa producimos las gráficas de $x_1(t), x_2(t)$, y $x_3(t)$ que aparecen en la figura 11.6.

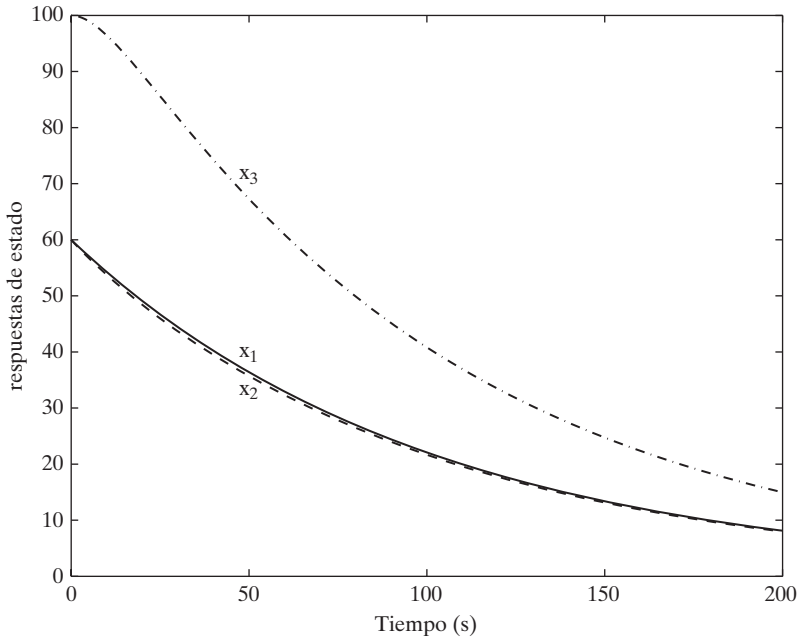



**FIGURA 11.6**
Gráficas de las respuestas de estado del ejemplo 11.5.

Cuando $x(0) = 0$, podemos calcular la respuesta de salida $y(t)$ si tomamos la transformada inversa de Laplace de la representación de la función de transferencia $Y(s) = H(s)V(s)$. En este ejemplo, la función de transferencia es

$$
\begin{aligned}
H(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & s + 0.01 & 0 \\ 1 & -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 0.001 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s + 0.01} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{s + 0.01} & 0 \\ -\dfrac{1}{s(s + 0.01)} & \dfrac{1}{s(s + 0.01)} & \dfrac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 0.001 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s + 0.01} & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{s(s + 0.01)} & \dfrac{1}{s(s + 0.01)} & \dfrac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 0.001 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
H(s) &= \begin{bmatrix} \dfrac{0.001}{s + 0.01} & 0 \\ -\dfrac{0.001}{s(s + 0.01)} & \dfrac{0.001}{s(s + 0.01)} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Podemos utilizar MATLAB para calcular la matriz de transferencia $H(s)$. Para calcular $H(s)$ escriba

```
tf(sys)
```

Utilizar este comando para el sistema anterior arroja como resultado

```
Función de transferencia de la entrada 1 a la salida...
        0.001
 #1:  ----------
       s + 0.01

           -0.001
 #2:   --------------
        s^2 + 0.01 s

Función de transferencia de la entrada 2 a la salida...
 #1:  0

         0.001
 #2:  ------------
      s^2 + 0.01 s
```

Estos resultados coinciden con los encontrados de manera analítica.

## 11.4 SISTEMAS DE TIEMPO DISCRETO

Podemos modelar un sistema lineal e invariante en el tiempo discreto, dimensional finito de $p$ entradas y $r$ salidas mediante las ecuaciones de estado

$$x[n+1] = Ax[n] + Bv[n] \tag{11.50}$$

$$y[n] = Cx[n] + Dv[n] \tag{11.51}$$

El vector de estado $x[n]$ es el vector columna de $N$ elementos

$$x[n] = \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ \vdots \\ x_N[n] \end{bmatrix}$$

Como en el caso de tiempo continuo, el estado $x[n]$ en el tiempo $n$ representa el pasado (antes del tiempo $n$) del sistema.

La entrada $v[n]$ y la salida $y[n]$ son los vectores columna

$$v[n] = \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \\ \vdots \\ v_p[n] \end{bmatrix}, \quad y[n] = \begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \\ \vdots \\ y_r[n] \end{bmatrix}$$

Las matrices $A, B, C$ y $D$ en (11.50) y (11.51) son $N \times N, N \times p, r \times N$, y $r \times p$, respectivamente. La ecuación (11.50) es una ecuación en diferencias vectorial de primer orden. La ecuación (11.51) es la ecuación de salida del sistema.

### 11.4.1 Construcción de modelos de estado

Considere un sistema lineal e invariante de tiempo discreto, de una sola salida con la ecuación en diferencias de entrada y salida

$$y[n + N] + \sum_{i=0}^{N-1} a_i y[n + i] = b_0 v[n] \tag{11.52}$$

Si definimos las variables de estado

$$x_{i+1}[n] = y[n + i], \quad i = 0, 1, 2, \ldots, N - 1 \tag{11.53}$$

da como resultado un modelo de estado de la forma (11.50) y (11.51) con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{N-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0], \qquad D = 0$$

Si modificamos el lado derecho de (11.52), tal que se encuentre en la forma más general

$$\sum_{i=0}^{N-1} b_i v[n + i]$$

el modelo que resulta continúa siendo un modelo de estado, excepto que debemos modificar $B$ y $C$ de manera que

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{N-1}]$$

En este caso, las variables de estado $x_i[n]$ son funciones de $y[n]$, $v[n]$, y los desplazamientos por la izquierda de $y[n]$ y $v[n]$; es decir, $x_i[n]$ ya no está dada por (11.53). Este modelo de estado es la contraparte en tiempo discreto del modelo de estado generado a partir del caso de una ecuación diferencial de entrada y salida de tiempo continuo con coeficientes constantes (vea la sección 11.2).

### 11.4.2 Desarrollos mediante elementos de retraso unitario

Dado un sistema de tiempo discreto con un modelo de estado de $N$ dimensiones (11.50) y (11.51), podemos construir el desarrollo del sistema que consiste en una interconexión de $N$ elementos de retraso unitario y combinaciones de sumadores, restadores, y multiplicadores escalares. De modo contrario, si especificamos un sistema de tiempo discreto mediante una conexión de elementos de retraso unitario, sumadores, restadores, y multiplicadores escalares, podemos generar un modelo de estado de la forma (11.50) y (11.51) de manera directa a partir de la interconexión. El procedimiento para ir de los diagramas de interconexión a los modelos de estado (y lo opuesto) es análogo al que vimos en el caso de tiempo continuo.

---

### Ejemplo 11.6 Interconexión de elementos de retraso unitario

Considere el sistema de tiempo discreto, de tres dimensiones, de tres entradas y tres salidas dado por la interconexión en la figura 11.7. Del diagrama, encontramos que

$$\begin{aligned} x_1[n+1] &= -x_2[n] + v_1[n] + v_3[n] \\ x_2[n+1] &= x_1[n] + v_2[n] \\ x_3[n+1] &= x_2[n] + v_3[n] \\ y_1[n] &= x_2[n] \\ y_2[n] &= x_1[n] + x_3[n] + v_2[n] \end{aligned}$$

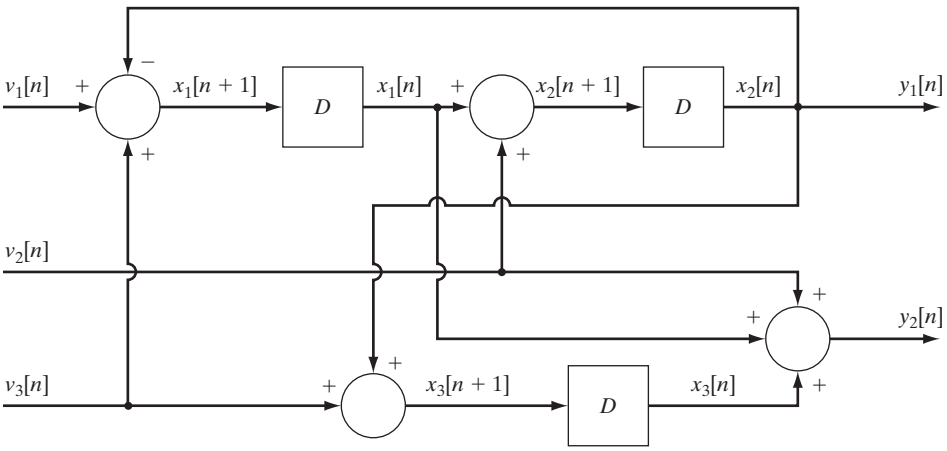



**FIGURA 11.7**
Sistema del ejemplo 11.6.

Si escribimos estas ecuaciones en forma matricial obtenemos el siguiente modelo de estado

$$\begin{bmatrix} x_1[n+1] \\ x_2[n+1] \\ x_3[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ x_3[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \\ v_3[n] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \\ x_3[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \\ v_3[n] \end{bmatrix}$$

### 11.4.3 Solución de ecuaciones de estado

Considere de nuevo el sistema de tiempo discreto de $p$ entradas y $r$ salidas con el modelo de estado

$$x[n+1] = Ax[n] + Bv[n] \tag{11.54}$$

$$y[n] = Cx[n] + Dv[n] \tag{11.55}$$

Podemos resolver la ecuación en diferencias vectorial (11.54) utilizando una versión matricial de recursividad. El proceso es una generalización directa del procedimiento recursivo para resolver una ecuación diferencial escalar de primer orden (vea el capítulo 2). Los pasos son los siguientes.

Suponemos que el estado inicial del sistema es el estado $x[0]$ en el tiempo inicial $n = 0$. Entonces, estableciendo $n = 0$ en (11.54) da como resultado

$$x[1] = Ax[0] + Bv[0] \tag{11.56}$$

Estableciendo $n = 1$ en (11.54) y utilizando (11.56), obtenemos

$$\begin{aligned} x[2] &= Ax[1] + Bv[1] \\ &= A[Ax[0] + Bv[0]] + Bv[1] \\ &= A^2x[0] + ABv[0] + Bv[1] \end{aligned}$$

Si continuamos este proceso, para cualquier valor entero de $n \geq 1$,

$$x[n] = A^n x[0] + \sum_{i=0}^{n-1} A^{n-i-1} Bv[i], \quad n \geq 1 \tag{11.57}$$

El lado derecho de (11.57) es la respuesta de estado que resulta del estado inicial $x[0]$ y la entrada $v[n]$ aplicada para $n \geq 0$. Observe que, si $v[n] = 0$ para $n \geq 0$, entonces

$$x[n] = A^n x[0], n \geq 0 \tag{11.58}$$

De (11.58) vemos que la transición de estado, del estado inicial $x[0]$ al estado $x[n]$ en el tiempo $n$ (sin entrada aplicada) es igual a $A^n$ veces $x[0]$. Por lo tanto, en un caso de tiempo discreto, la matriz de transición de estado es la matriz $A^n$.

### Ejemplo 11.7 Combinación de préstamo bancario y cuenta de ahorros

Algunos bancos permiten a los clientes tomar un préstamo y deducir los pagos de dicho préstamo directamente de sus cuentas de ahorro en el mismo banco, lo que da como resultado una "cuenta combinada de préstamo/ahorro". Esto se hace por conveniencia (ya que los pagos del préstamo se deducen de manera automática), y para generar ingresos sobre el interés del monto en la cuenta de ahorros. Para establecer un modelo de estado en este proceso, sea $x_1[n]$ quien denote el saldo del préstamo después del mes $n$, y sea $x_2[n]$ quien denote el monto en la cuenta de ahorros después del mes $n$. El monto inicial del préstamo es $x_1[0]$, y el monto inicial en la cuenta de ahorros es $x_2[0]$. Entonces, las ecuaciones de estado para la cuenta de préstamo/ahorro están dadas por

$$x_1[n] = \left(1 + \frac{I_1}{12}\right)x_1[n-1] - p[n], n = 1, 2, \ldots \tag{11.59}$$

$$x_2[n] = \left(1 + \frac{I_2}{12}\right)x_2[n-1] - p[n] + d[n], n = 1, 2, \ldots \tag{11.60}$$

donde $I_1$ (respectivamente, $I_2$) es la tasa de interés anual para el préstamo, en forma decimal (respectivamente, cuenta de ahorros), $p[n]$ es el pago del préstamo al final del mes $n$, y $d[n]$ es el monto depositado en la cuenta de ahorros al final del mes $n$. Observe de (11.60) que suponemos que el interés en la cuenta de ahorros se calcula mensualmente. Si tomamos la entrada del sistema para que sea

$$v[n] = \begin{bmatrix} p[n+1] \\ d[n+1] \end{bmatrix}$$

y remplazamos $n$ por $n + 1$ en (11.59) y (11.60), esto da como resultado la siguiente ecuación de estado en forma de matriz:

$$\begin{bmatrix} x_1[n+1] \\ x_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{I_1}{12} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{I_2}{12} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} v[n], n = 0, 1, 2, \ldots \tag{11.61}$$

Podemos resolver la ecuación de estado (11.61) en forma recursiva como lo vimos anteriormente. Por ejemplo, con $I_1 = 0.06$ (6%) e $I_2 = 0.03$ (3%), el préstamo es una hipoteca con $x_1[0] = 300{,}000.00$; el monto inicial en la cuenta de ahorros es $x_2[0] = 20{,}000.00$ y $p[n] = d[n] = 2{,}000.00$ para $n = 1, 2, \ldots$; entonces los valores del estado $x[n]$ en $n = 1$ y $n = 2$ son

$$\begin{bmatrix} x_1[1] \\ x_2[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.005 & 0 \\ 0 & 1.0025 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 300000 \\ 20000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2000 \\ 2000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1[1] \\ x_2[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 301500 \\ 20050 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1[1] \\ x_2[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 299500 \\ 20050 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1[2] \\ x_2[2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.005 & 0 \\ 0 & 1.0025 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 299500 \\ 20050 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1[2] \\ x_2[2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 298997.50 \\ 20100.125 \end{bmatrix}$$

Observe que, como esperábamos, el saldo del préstamo decrece y el monto en la cuenta de ahorros se incrementa. En el problema 11.26, pedimos al lector que determinara el número de meses que toma pagar la hipoteca, así como el monto en la cuenta de ahorros al momento de liquidar el préstamo.

### 11.4.4 Cálculo de la respuesta de salida

De nuevo consideremos el modelo de estado dado por (11.54) y (11.55). Si sustituimos la respuesta de estado (11.57) en la ecuación de salida (11.55) obtenemos

$$y[n] = CA^n x[0] + \sum_{i=0}^{n-1} CA^{n-i-1}Bv[i] + Dv[n], \quad n \geq 1 \tag{11.62}$$

El lado derecho de (11.62) es la respuesta completa de salida que resulta del estado inicial $x[0]$ y la entrada $v[n]$. El término

$$y_{zi}[n] = CA^n x[0], n \geq 0$$

es la respuesta a una entrada cero, y el término

$$\begin{aligned} y_{zs}[n] &= \sum_{i=0}^{n-1} CA^{n-i-1}Bv[i] + Dv[n], \quad n \geq 1 \\ &= \sum_{i=0}^{n} \{CA^{n-i-1}Bu[n-i-1] + \delta[n-i]D\}v[i], \quad n \geq 1 \end{aligned} \tag{11.63}$$

es la respuesta en estado cero (donde $\delta[n]$ = pulso unitario localizado en $n = 0$).

En el caso de una sola entrada y una sola salida,

$$y_{zs}[n] = \sum_{i=0}^{n} h[n-i]v[i] \tag{11.64}$$

donde $h[n]$ es la respuesta al pulso unitario del sistema. Si comparamos (11.63) y (11.64) se revela que

$$\begin{aligned} h[n-i] &= CA^{n-i-1}Bu[n-i-1] + \delta[n-i]D \\ h[n] &= CA^{n-1}Bu[n-1] + \delta[n]D \end{aligned}$$

o

$$h[n] = \begin{cases} D, & n = 0 \\ CA^{n-1}B, & n \geq 1 \end{cases}$$

### 11.4.5 Solución mediante la transformada *z*

Si tomamos la transformada $z$ de la ecuación en diferencia vectorial (11.54) obtenemos

$$zX(z) - zx[0] = AX(z) + BV(z) \tag{11.65}$$

donde $X(z)$ y $V(z)$ son las transformadas $z$ de $x[n]$ y $v[n]$, respectivamente, con las transformaciones tomadas componente por componente. Si resolvemos (11.65) para $X(z)$ obtenemos

$$X(z) = (zI - A)^{-1}zx[0] + (zI - A)^{-1}BV(z) \tag{11.66}$$

El lado derecho de (11.66) es la transformada $z$ de la respuesta de estado $x[n]$ que resulta del estado inicial $x[0]$ y la entrada $v[n]$.

Si comparamos (11.66) y (11.57) vemos que $(zI - A)^{-1}z$ es la transformada $z$ de la matriz de transición de estado $A^n$. De esta manera,

$$A^n = \text{transformada } z \text{ inversa } (zI - A)^{-1}z \tag{11.67}$$

Si tomamos la transformada $z$ de (11.55) y utilizamos (11.66) obtenemos

$$Y(z) = C(zI - A)^{-1}zx[0] + [C(zI - A)^{-1}B + D]V(z) \tag{11.68}$$

El lado derecho de (11.68) es la transformada $z$ de la respuesta completa de salida que resulta del estado inicial $x[0]$ y la entrada $v[n]$.

Si $x[0] = 0$,

$$Y(z) = Y_{zs}(z) = [C(zI - A)^{-1}B + D]V(z) \tag{11.69}$$

Dado que

$$Y_{zs}(z) = H(z)V(z)$$

donde $H(z)$ es la matriz de transferencia, entonces por (11.69),

$$H(z) = C(zI - A)^{-1}B + D \tag{11.70}$$

---

**Ejemplo 11.8 Cálculo de la matriz de transferencia**

Considere de nuevo el sistema del ejemplo 11.6. Primero calcularemos la matriz de transición de estado $A^n$.

$$(zI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} z & 1 & 0 \\ -1 & z & 0 \\ 0 & -1 & z \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(z^2 + 1)z}\begin{bmatrix} z^2 & -z & 0 \\ z & z^2 & 0 \\ 1 & z & z^2 + 1 \end{bmatrix}$$

Si expandimos las componentes de $(zI - A)^{-1}z$, y buscamos en tablas obtenemos

$$A^n = \begin{bmatrix} +\cos\frac{\pi}{2}n & -\text{sen}\frac{\pi}{2}n & 0 \\ \text{sen}\frac{\pi}{2}n & +\cos\frac{\pi}{2}n & 0 \\ -\left(\cos\frac{\pi}{2}n\right)u[n-1] & \text{sen}\frac{\pi}{2}n & \delta[n] \end{bmatrix}$$

Podemos calcular la respuesta de estado $x[n]$ que resulta de cualquier estado inicial $x[0]$ (sin entrada alguna aplicada) mediante (11.58). Por ejemplo, si

$$x[0] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

entonces

$$x[n] = A^n x[0] = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2}n - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}n \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}n + \cos\frac{\pi}{2}n \\ -\left(\cos\frac{\pi}{2}n\right)u[n-1] + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}n \end{bmatrix}, \quad n \geq 0$$

MATLAB contiene el comando `dlsim`, el cual podemos utilizar para calcular la respuesta de estado $x[n]$. Por ejemplo, para calcular $x[n]$ del sistema anterior con $x_1[0] = x_2[0] = 1$ y $x_3[0] = 0$, los comandos son

```
A = [0 -1 0;1 0 0;0 1 0]; B = [1 0 1;0 1 0;0 0 1];
C = [0 1 0;1 0 1]; D = [0 0 0;0 1 0];
x0 = [1 1 0]'; % define I.C.
n = 0:1:10;
v = zeros(length(n),3);
[y,x] = dlsim(A,B,C,D,v,x0);
```

Al ejecutar el programa obtenemos los valores de $x[n]$ para $n = 1$ a 5, dados en la tabla siguiente:

| | $x[0]$ | $x[1]$ | $x[2]$ | $x[3]$ | $x[4]$ | $x[5]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | −1 | −1 | 1 | 1 | −1 |
| $x_2$ | 1 | 1 | −1 | −1 | 1 | 1 |
| $x_3$ | 0 | 1 | 1 | −1 | −1 | 1 |

Invitamos al lector a verificar que estos valores coincidan exactamente con los valores obtenidos a partir de la solución analítica que dimos antes.

Para concluir el ejemplo, calcularemos la matriz de transferencia del sistema. De (11.70), tenemos que

$$\begin{aligned} H(z) &= C(zI - A)^{-1}B + D \\ &= \frac{1}{(z^2+1)z}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z^2 & -z & 0 \\ z & z^2 & 0 \\ 1 & z & z^2+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(z^2+1)z}\begin{bmatrix} z & z^2 & z \\ z^2+1 & (z^2+1)z & 2(z^2+1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para utilizar MATLAB en el cálculo de la matriz de transferencia, escriba

```
sys = ss(A,B,C,D);
tf(sys)
```

Esto da como resultado

```
Función de transferencia de la entrada 1 a la salida...
        1
#1:  -------
     s^2 + 1

     s^2 + 1
#2:  -------
     s^3 + s

Función de transferencia de la entrada 2 a la salida...
        s
#1:  -------
     s^2 + 1

     s^3 + s
#2:  -------
     s^3 + s

Función de transferencia de la entrada 3 a la salida...
        1
#1:  -------
     s^2 + 1

     2 s^2 + 2
#2:  ---------
      s^3 + s
```

El lector podrá observar que estos coeficientes coinciden con los que encontramos previamente de manera analítica.

## 11.5 REPRESENTACIONES DE ESTADO EQUIVALENTES

A diferencia del modelo de función de transferencia, el modelo de estado de un sistema no es único. En esta sección consideraremos la relación entre los modelos de estado del mismo sistema. El siguiente análisis está desarrollado en términos de sistemas de tiempo continuo. La teoría en el caso de tiempo discreto es muy similar y, por lo tanto, sólo nos enfocaremos en el caso de tiempo continuo.

Considere el sistema lineal e invariante en el tiempo continuo, de $p$ entradas y $r$ salidas con $N$ dimensiones dado por el modelo de estado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t) \tag{11.71}$$

$$y(t) = Cx(t) + Dv(t) \tag{11.72}$$

Sea $P$ quien denote una matriz fija de $N \times N$, con entradas que son números reales. Requerimos que $P$ sea invertible, y que el determinante $|P|$ de $P$ sea diferente de cero (vea el apéndice $B$). El inverso de $P$ se denota como $P^{-1}$.

En términos de la matriz $P$, podemos definir un nuevo vector de estado $\bar{x}(t)$ para el sistema dado, donde

$$\bar{x}(t) = Px(t) \tag{11.73}$$

A la relación (11.73) se le conoce como *transformación de coordenadas*, ya que es un mapeo a partir de las coordenadas de estado originales hacia las nuevas coordenadas de estado.

Si multiplicamos ambos lados de (11.73) a la izquierda por la inversa $P^{-1}$ de $P$ nos da

$$P^{-1}\bar{x}(t) = P^{-1}Px(t)$$

Por definición de la inversa, $P^{-1}P = I$, donde $I$ es la matriz identidad de $N \times N$. Así,

$$P^{-1}\bar{x}(t) = Ix(t) = x(t)$$

o

$$x(t) = P^{-1}\bar{x}(t) \tag{11.74}$$

Mediante (11.74), es posible ir del nuevo vector de estado $\bar{x}(t)$, de vuelta al vector de estado original $x(t)$. Observe que, si $P$ no es invertible, no será posible regresar a $x(t)$ a partir de $\bar{x}(t)$. Ésta es la razón por la que $P$ debe ser invertible.

En términos del nuevo vector de estado $\bar{x}(t)$,es posible generar un nuevo modelo de ecuación de estado para el sistema dado. Los pasos son los siguientes.

Si tomamos la derivada de ambos lados de (11.73) y usamos (11.71) obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(t) &= P\dot{x}(t) = P[Ax(t) + Bv(t)] \\ &= PAx(t) + PBv(t)\end{aligned} \tag{11.75}$$

Sustituimos la expresión (11.74) para $x(t)$ en (11.75) y (11.72) y obtenemos

$$\dot{\bar{x}}(t) = PA(P^{-1})\bar{x}(t) + PBv(t) \tag{11.76}$$

$$y(t) = C(P^{-1})\bar{x}(t) + Dv(t) \tag{11.77}$$

Definimos las matrices

$$\overline{A} = PA(P^{-1}), \quad \overline{B} = PB, \quad \overline{C} = C(P^{-1}), \quad \overline{D} = D, \tag{11.78}$$

encontramos que (11.76) y (11.77) pueden escribirse de la forma

$$\dot{\bar{x}}(t) = \overline{A}\,\bar{x}(t) + \overline{B}v(t) \tag{11.79}$$

$$y(t) = \overline{C}\,\bar{x}(t) + \overline{D}v(t) \tag{11.80}$$

Las ecuaciones (11.79) y (11.80) son las ecuaciones de estado para el sistema dado en términos del nuevo vector de estado $\bar{x}(t)$. De esta manera, es posible generar un nuevo modelo de estado de $N$ dimensiones a partir del modelo original de $N$ dimensiones. Dado que pode-

mos obtener la construcción anterior para cualquier matriz invertible $P$ de $N \times N$, y que existe un número infinito de tales matrices, es posible generar un número infinito de nuevos modelos de estado a partir de un modelo de estado dado.

Sea el modelo de estado original denotado por el cuádruplo $(A, B, C, D)$ y el nuevo modelo de estado denotado por el cuádruplo $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$. Se dice que los modelos de estado $(A, B, C, D)$ y $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ están relacionados mediante la transformación de coordenadas $P$, ya que el vector de estado $\bar{x}(t)$ del último, está relacionado con el vector de estado $x(t)$ del anterior mediante la relación $\bar{x}(t) = Px(t)$. Se dice que ambos modelos de estado son *equivalentes*. La única diferencia entre los dos modelos de estado es al etiquetar los estados. De modo más preciso, los estados de $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ son combinaciones lineales [dadas por $\bar{x}(t) = Px(t)$] de los estados de $(A, B, C, D)$.

Debemos destacar que la idea de los modelos de estado equivalentes aplica sólo para los modelos de estado que tienen la misma dimensión. Los modelos de estado con diferentes dimensiones no pueden estar relacionados mediante transformación de coordenadas.

Cualquier par de modelos de estado equivalentes tienen la misma relación de entrada y salida. En especial, las matrices de transferencia que corresponden a cualquier par de modelos equivalentes son las mismas. Para comprobar lo anterior, sea $H(s)$ y $\overline{H}(s)$ quienes representen a las matrices de transferencia asociadas con $(A, B, C, D)$ y $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ respectivamente; esto es,

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{11.81}$$

$$\overline{H}(s) = \overline{C}(sI - \overline{A})^{-1}\overline{B} + \overline{D} \tag{11.82}$$

Al sustituir las expresiones (11.78) para $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ en (11.82) obtenemos

$$\overline{H}(s) = C(P^{-1})[sI - PA(P^{-1})]^{-1}PB + D$$

Ahora,

$$sI - PA(P^{-1}) = P(sI - A)(P^{-1})$$

Además, para cualquier grupo $X, Y, W$ de matrices inversas de $N \times N$,

$$(WXY)^{-1} = (Y^{-1})(X^{-1})(W^{-1})$$

Así,

$$\begin{aligned}\overline{H}(s) &= C(P^{-1})P(sI - A)^{-1}(P^{-1})PB + D \\ &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ &= H(s)\end{aligned}$$

Así, las matrices de transferencia son las mismas.

---

**Ejemplo 11.9 Modelos de estado equivalentes**

Considere el sistema dado por la ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 3y(t) = \dot{v}(t) + 2v(t)$$

Esta ecuación tiene la forma de (11.9), de esta manera obtenemos un modelo de estado para este sistema a partir de (11.10). Esto da como resultado el modelo de estado

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}v(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

Las variables de estado $x_1(t)$ y $x_2(t)$ en el siguiente modelo de estado no tienen un significado físico, y por lo tanto podríamos utilizar otro conjunto de variables de estado apropiadas. Por ejemplo, sea $\overline{x}(t) = Px(t)$, donde

$$P = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Como es fácil mostrar que $|P|$ es diferente de cero, ésta es una matriz de transformación válida. En términos de $\overline{x}(t)$, el nuevo modelo de estado está dado por (11.79) y (11.80), donde podemos encontrar el cuádruplo $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D})$ a partir de (11.78). Podemos determinar las nuevas matrices de los coeficientes a partir de los siguientes comandos de MATLAB:

```
A = [0 1;-3 -2]; B = [0 1]'; C = [2 1]; D = 0;
P = [1 1;0 1];
Abar = P*A*inv(P);
Bbar = P*B;
Cbar = C*inv(P);
Dbar = D;
```

MATLAB contiene estos comandos en el archivo M llamado `ss2ss` con el siguiente uso:

```
sys1 = ss(A,B,C,D);
sys2 = ss2ss(sys1,P);
```

La ejecución de MATLAB arroja como resultado las matrices

$$\overline{A} = \begin{bmatrix}-3 & 2\\ -3 & 1\end{bmatrix}; \qquad \overline{B} = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}; \qquad \overline{C} = \begin{bmatrix}2 & -1\end{bmatrix}; \qquad \overline{D} = 0$$

Podemos calcular las matrices de transferencia para los modelos de estado previos mediante el comando

```
tf(sys1)
```

Al sustituir los valores $A$, $B$, $C$ y $D$ da como resultado la función de transferencia

$$C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 3}$$

Si usamos los mismos comandos en el segundo modelo de estado podemos mostrar que las funciones de transferencia son en realidad idénticas.

---

Al considerar la transformación de coordenadas, en ocasiones es posible ir de un modelo de estado inicial $(A, B, C, D)$ a otro modelo de estado $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D})$, para los cuales una o más de las matrices de coeficientes $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ tiene una forma especial. A dichos modelos se les llama modelos canónicos o formas canónicas. Ejemplos son la forma canónica diagonal, la forma canónica controlable, y la forma canónica observable. Debido a la estructura especial de ciertas formas canónicas, éstas pueden provocar una simplificación importante en la solución de ciertas clases de problema. Por ejemplo, la forma canónica controlable es muy útil para el estudio de la retroalimentación de estado. Para el desarrollo completo de las distintas formas canónicas, invitamos al lector a consultar las obras Kailath [1980], Brogan [1991], o Rugh [1996].

### 11.5.1 Ejemplo de la forma canónica diagonal

Considere el circuito *RLC* serie que aparece en la figura 11.8. Para determinar el modelo de estado del circuito, podemos definir las variables de estado para que sean la corriente $i(t)$ en el inductor, y el voltaje $v_c(t)$ a través del capacitor; es decir,

$$x_1(t) = i(t)$$
$$x_2(t) = v_c(t)$$

Al sumar los voltajes alrededor de la malla obtenemos

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + v_c(t) = v(t)$$

De esta manera,

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{R}{L}x_1(t) - \frac{1}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}v(t)$$

Además,

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{C}x_1(t)$$
$$y(t) = x_2(t)$$

Así, el circuito tiene el modelo de estado $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t), y(t) = Cx(t)$, donde

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C = [0 \quad 1]$$

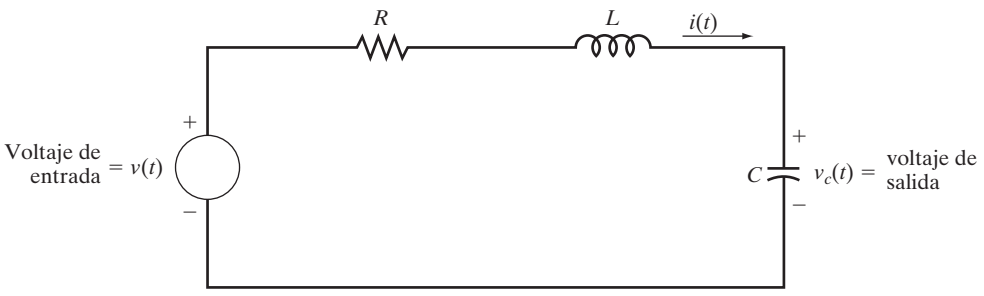



**FIGURA 11.8**
Circuito *RLC* en serie.

Ahora, la cuestión es si existe o no una transformación de coordenadas $\bar{x}(t) = Px(t)$, tal que $\bar{A} = PA(P^{-1})$ se encuentre en la forma diagonal

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 & 0 \\ 0 & \bar{a}_2 \end{bmatrix}$$

Parte del interés por la forma canónica diagonal es la simplificación que resulta de esta forma. Por ejemplo, si $\bar{A}$ se encuentra en la forma diagonal, la matriz de transición de estado tiene la forma simple

$$e^{\overline{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\bar{a}_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\bar{a}_2 t} \end{bmatrix}$$

No toda matriz $A$ puede convertirse a la forma diagonal $\bar{A}$ mediante una transformación de coordenadas $\bar{x}(t) = Px(t)$. Existen métodos sistemáticos para el estudio de la existencia y cálculo de las formas diagonales. En el siguiente desarrollo establecemos un procedimiento directo para determinar la existencia de la forma diagonal del circuito *RLC* en serie:

Primero, con $\det(sI - A)$ igual al determinante de $sI - A$ (vea el apéndice B), sustituimos la $A$ anterior en $\det(sI - A)$ y esto nos da

$$\det(sI - A) = \det\begin{bmatrix} s + \dfrac{R}{L} & \dfrac{1}{L} \\ -\dfrac{1}{C} & s \end{bmatrix} = s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} \tag{11.83}$$

Con $\bar{A}$ igual a la forma diagonal anterior, vemos que

$$\det(sI - \overline{A}) = \det\begin{bmatrix} s - \bar{a}_1 & 0 \\ 0 & s - \bar{a}_2 \end{bmatrix} = (s - \bar{a}_1)(s - \bar{a}_2) \tag{11.84}$$

A partir de los resultados del álgebra de matrices podemos ver que

$$\det(sI - A) = \det(sI - \overline{A})$$

Entonces, al igualar (11.83) y (11.84), vemos que $\bar{a}_1$ y $\bar{a}_2$ deben ser ceros de $s^2 + (R/L)s + (1/LC)$. De esta manera,

$$\bar{a}_1^2 + \frac{R}{L}\bar{a}_1 + \frac{1}{LC} = 0$$
$$\bar{a}_2^2 + \frac{R}{L}\bar{a}_2 + \frac{1}{LC} = 0$$

Ahora, dado que $\bar{A} = PA(P^{-1})$, entonces $\bar{A}P = PA$. Establecemos $\bar{A}P = PA$ y obtenemos

$$\begin{bmatrix} \bar{a}_1 & 0 \\ 0 & \bar{a}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}$$

Igualamos las entradas de $\bar{A}P$ y $PA$ y obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\bar{a}_1 p_1 = -\frac{Rp_1}{L} + \frac{p_2}{C} \tag{11.85}$$

$$\bar{a}_1 p_2 = -\frac{p_1}{L} \tag{11.86}$$

$$\bar{a}_2 p_3 = -\frac{Rp_3}{L} + \frac{p_4}{C} \tag{11.87}$$

$$\bar{a}_2 p_4 = -\frac{p_3}{L} \tag{11.88}$$

Las ecuaciones (11.85) y (11.86) se reducen a la siguiente restricción

$$p_2 = -\frac{p_1}{L\bar{a}_1}$$

Las ecuaciones (11.87) y (11.88) se reducen a la siguiente restricción

$$p_4 = -\frac{p_3}{L\bar{a}_2}$$

Por lo tanto,

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & -\dfrac{p_1}{L\bar{a}_1} \\ p_3 & -\dfrac{p_3}{L\bar{a}_2} \end{bmatrix}$$

Por último, dado que $P$ debe ser invertible, $\det P \neq 0$, y de esta manera

$$-\frac{p_1 p_3}{L\bar{a}_2} + \frac{p_1 p_3}{L\bar{a}_1} \neq 0 \tag{11.89}$$

La ecuación (11.89) se satisface si y sólo si $\bar{a} \neq \bar{a}_2$. De esta manera, la forma diagonal existe si y sólo si los ceros de $s^2 + (R/L)s + (1/LC)$ son distintos. Observe que la matriz de transformación $P$ anterior no es única.

## 11.6 DISCRETIZACIÓN DE UN MODELO DE ESTADO

De nuevo considere el sistema de tiempo continuo de $p$ entradas y $r$ salidas, de $N$ dimensiones dado por el modelo de estado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t) \tag{11.90}$$

$$y(t) = Cx(t) + Dv(t) \tag{11.91}$$

En esta sección mostraremos que podemos discretizar en el tiempo a la representación de estado, lo que resulta en una simulación de tiempo discreto del sistema de tiempo continuo dado.

A partir de los resultados de la sección 11.3, vemos que la respuesta de estado $x(t)$ que resulta del estado inicial $x(0)$ y de la entrada $v(t)$ está dada por

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\lambda)}Bv(\lambda)\,d\lambda, \quad t > 0$$

Ahora suponga que el tiempo inicial cambia de $t = 0$ a $t = \tau$, donde $\tau$ es cualquier número real. Si resolvemos la ecuación diferencial de vectores (11.90) con tiempo inicial $t = \tau$ obtenemos

$$x(t) = e^{A(t-\tau)}x(\tau) + \int_\tau^t e^{A(t-\lambda)}Bv(\lambda)\,d\lambda, \quad t > \tau \tag{11.92}$$

Sea $T$ un número positivo fijo. Ahora sea $\tau = nT$ y $t = nT + T$ en (11.92), donde $n$ es el índice de tiempo discreto, obtenemos

$$x(nT + T) = e^{AT}x(nT) + \int_{nT}^{nT+T} e^{A(nT+T-\lambda)}Bv(\lambda)\,d\lambda \tag{11.93}$$

La ecuación (11.93) parece una ecuación de estado para un sistema de tiempo discreto, excepto que el segundo término del lado derecho no está en forma matricial de tiempos $v(nT)$. Podemos expresar este término en dicha forma si la entrada $v(t)$ es constante a lo largo de los intervalos de $T$ segundos, $nT \le t \le nT + T$; esto es,

$$v(t) = v(nT), \qquad nT \le t < nT + T \tag{11.94}$$

Si $v(t)$ satisface (11.94), entonces podemos escribir (11.93) en la forma

$$x(nT + T) = e^{AT}x(nT) + \left\{\int_{nT}^{nT+T} e^{A(nT+T-\lambda)}B\,d\lambda\right\}v(nT) \tag{11.95}$$

Sea $B_d$ quien denote la matriz $N \times p$ definida por

$$B_d = \int_{nT}^{nT+T} e^{A(nT+T-\lambda)}B\,d\lambda \tag{11.96}$$

Si llevamos a cabo el cambio de variables $\bar{\lambda} = nT + T - \lambda$ en la integral de (11.96) obtenemos

$$B_d = \int_T^0 e^{A\bar{\lambda}}B(-d\bar{\lambda}) = \int_0^T e^{A\lambda}B\,d\lambda$$

De esta expresión vemos que $B_d$ es independiente del índice de tiempo $n$.

Dejemos ahora que $A_d$ denote la matriz de $N \times N$ definida por

$$A_d = e^{AT}$$

Entonces, en términos de $A_d$ y $B_d$, podemos escribir la ecuación en diferencias (11.95) en la forma

$$x(nT + T) = A_d x(nT) + B_d v(nT) \tag{11.97}$$

Definiendo $t = nT$ en ambos lados de (11.91) se obtiene la ecuación de salida discretizada

$$y(nT) = Cx(nT) + Dv(nT) \tag{11.98}$$

Las ecuaciones (11.97) y (11.98) son ecuaciones de estado de un sistema lineal e invariante en el tiempo discreto, de $N$ dimensiones. Este sistema de tiempo discreto es una discretización en el tiempo del sistema de tiempo continuo dado. Si la entrada $v(t)$ es constante sobre los intervalos de $T$ segundos $nT \leq t < nT + T$, podemos calcular de manera exacta los valores de la respuesta de estado $x(t)$ y la respuesta de salida $y(t)$ para $t = nT$, si solucionamos las ecuaciones de estado (11.97) y (11.98). Dado que podemos resolver (11.97) de manera recursiva, el proceso de discretización arroja un método numérico para resolver la ecuación de estado de un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo.

Si $v(t)$ no es constante sobre los intervalos de $T$ segundos $nT \leq t < nT + T$, la solución de (11.97) y (11.98) arroja valores aproximados para $x(nT)$ y $y(nT)$. En general, la precisión de los valores aproximados mejorará conforme $T$ sea más pequeña. Así, incluso si $v(t)$ no es constante parte por parte, las representaciones (11.97) y (11.98) sirven como una simulación de tiempo discreto de un sistema dado de tiempo continuo.

Debido a que la función escalón $u(t)$ es constante para toda $t > 0$, en el caso de una sola entrada y una sola salida, la respuesta al escalón de la discretización de (11.97) y (11.98) coincidirá con los valores de la respuesta al escalón para el sistema dado de tiempo continuo. De esta manera, el proceso de discretización anterior es sólo una versión de estado de la igualación a la respuesta al escalón (vea la sección 10.5).

Podemos utilizar la discretización anterior en el tiempo, para realizar la discretización de cualquier sistema dado por una ecuación diferencial lineal de entrada y salida con coeficientes constantes, de orden $N$. En particular, podemos construir un modelo de estado del sistema mediante el desarrollo que vimos en la sección 11.2, y posteriormente podemos hacer la discretización de las matrices de coeficientes de este modelo de estado, lo cual arroja una discretización en tiempo del sistema dado de tiempo continuo.

---

**Ejemplo 11.10 Carro sobre una superficie**

Considere un carro sobre una superficie con el siguiente modelo de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{-k_f}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix} f(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

donde $x_1(t)$ es la posición, $x_2(t)$ es la velocidad del carro, y $f(t)$ es la fuerza de aceleración o frenado aplicada al carro. Para calcular las matrices discretas $A_d$, y $B_d$ para este sistema, es necesario calcular primero la matriz de transición de estado $e^{At}$. En este ejemplo, para $A$ observemos que

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s + \dfrac{k_f}{M} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s + k_f/M)} \begin{bmatrix} s + \dfrac{k_f}{M} & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

De esta manera,

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{M}{k_f}\left[1 - \exp\left(-\dfrac{k_f}{M}t\right)\right] \\ 0 & \exp\left(-\dfrac{k_f}{M}t\right) \end{bmatrix}$$

y

$$e^{AT} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{M}{k_f}\left[1 - \exp\left(-\dfrac{k_f T}{M}\right)\right] \\ 0 & \exp\left(-\dfrac{k_f T}{M}\right) \end{bmatrix}$$

$$B_d = \int_0^T e^{A\lambda} B \, d\lambda = \begin{bmatrix} \displaystyle\int_0^T \frac{1}{k_f}\left[1 - \exp\left(-\frac{k_f}{M}\lambda\right)\right] d\lambda \\ \displaystyle\int_0^T \frac{1}{M}\exp\left(-\frac{k_f}{M}\lambda\right) d\lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{T}{k_f} - \dfrac{M}{k_f^2}\left[1 - \exp\left(-\dfrac{k_f T}{M}\right)\right] \\ \dfrac{1}{k_f}\left[1 - \exp\left(-\dfrac{k_f T}{M}\right)\right] \end{bmatrix}$$

Cuando $M = 1, kf = 0.1$, y $T = 0.1$, las matrices discretas son

$$A_d = \begin{bmatrix} 1 & 0.09950166 \\ 0 & 0.99004983 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} 0.00498344 \\ 0.09950166 \end{bmatrix}$$

El modelo de estado de la simulación de tiempo discreto es

$$\begin{bmatrix} x_1(0.1n + 0.1) \\ x_2(0.1n + 0.1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.09950166 \\ 0 & 0.99004983 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0.1n) \\ x_2(0.1n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.00498344 \\ 0.09950166 \end{bmatrix} f(0.1n)$$

donde

$$x_1(0.1n) = y(0.1n) \quad \text{y} \quad x_2(0.1n) = \dot{y}(0.1n)$$

---

Podemos encontrar una aproximación para $A_d$ y para $B_d$ de manera numérica si escribimos primero $e^{AT}$ en forma de serie, mediante el uso de (11.21):

$$e^{AT} = \mathrm{I} + AT + \frac{A^2T^2}{2!} + \frac{A^3T^3}{3!} + \cdots$$

Podemos encontrar la matriz para $A_d$ si truncamos la serie anterior después de algunos términos, y la matriz $B_d$ mediante la sustitución de la serie truncada dentro de la ecuación (11.96) y evaluamos, con lo que obtenemos

$$B_d = \sum_{k=0}^{N} \frac{A^k T^{k+1}}{(k + 1)!} B$$

MATLAB realiza un cálculo similar de $A_d$ y $B_d$ mediante el comando `c2d`. En el ejemplo 11.10 los comandos MATLAB son

```
kf = .1; m=1;
A = [0 1;0 -kf/m]; B = [0 1/m]'; C = [1 0];
T = 0.1;
[Ad,Bd] = c2d(A,B,T)
```

Este programa arroja

$$A_d = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.09950166 \\ 0 & 0.99004983 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B_d = \begin{bmatrix} 0.004983375 \\ 0.099501663 \end{bmatrix}$$

lo cual es consistente con el resultado que obtuvimos en el ejemplo 11.10.

## 11.7 RESUMEN DEL CAPÍTULO

En este capítulo explicamos la representación de estado de los sistemas lineales e invariantes de tiempo continuo y discreto, los cuales especificamos en términos de un vector $x(t)$ de longitud $N$ y de variables internas, llamadas variables de estado. El estado $x(t_1)$ en el tiempo $t_1$ caracteriza por completo el pasado del sistema (hasta un tiempo $t_1$), de modo que podemos calcular la respuesta de salida para t $\geq t_1$ si conocemos $x(t_1)$ y la entrada $v(t)$ para $t \geq t_1$. Algunas de las variables de estado no se pueden calcular o determinar directamente a partir de las salidas del sistema, ésta es la razón por la cual a las variables de estado se les conoce como "variables internas" (es decir, son señales "dentro" del sistema). Las ecuaciones de estado especifican las relaciones entre el estado y las entradas y las salidas del sistema en el dominio del tiempo. Dado que el modelo de estado está dado en términos de variables de estado, es muy diferente a los demás modelos de dominio de tiempo (el modelo de la ecuación diferencial de entrada y salida y el modelo de convolución) que explicamos en el capítulo 2. Como pudimos ver a partir de los resultados de este capítulo, en el caso de una sola entrada y una sola salida, es fácil ir de un modelo de ecuación diferencial de entrada y salida a un modelo de estado, y viceversa.

En la literatura de sistemas, podemos ver que la representación de la ecuación de estado es muy útil en muchos tipos de aplicaciones, especialmente en el caso de los sistemas con múltiples entradas y múltiples salidas, debido en parte a la forma diferencial de primer orden para la dinámica de estado. Sin embargo, las ecuaciones de estado son, por lo general, ecuaciones matriciales, y por lo tanto requerimos el álgebra de matrices para poder trabajar con el modelo de estado. Como observamos en el capítulo, podemos manejar esto con facilidad mediante el software MATLAB, ya que el software está "adaptado" para el formato de ecuaciones matriciales.

El modelo de estado se desarrolló básicamente durante la década de los años 50, y luego, alrededor de 1960, se demostró que este formato proporciona un marco de trabajo muy efectivo para la solución de "problemas de control óptimo de sistemas lineales y cuadráticos" y "problemas de estimación" de señales. Lo anterior dio como resultado el filtro de Kalman, el cual se empleó con éxito en una gran cantidad de aplicaciones prácticas, tales como la determinación de estimaciones precisas de posiciones y velocidades en sistemas aeroespaciales (consulte Kamen y Su [1999] para ver los detalles de la estimación de estados). En las últimas dos décadas se descubrió que las técnicas basadas en las funciones de transferencia ofrecen ventajas sobre los métodos de aproximaciones con variables de estado para la solución de problemas de control óptimo (tales como el control H-infinito), pero el método de estado aún se emplea en aplicaciones de control y ciertamente es más utilizado en problemas de estimación.

## PROBLEMAS

**11.1.** Para el circuito de la figura P11.1, encuentre el modelo de estado con las variables de estado definidas como $x_1(t) = i_L(t)$, $x_2(t) = v_C(t)$, y con la salida definida como $y(t) = i_L(t) + v_C(t)$.

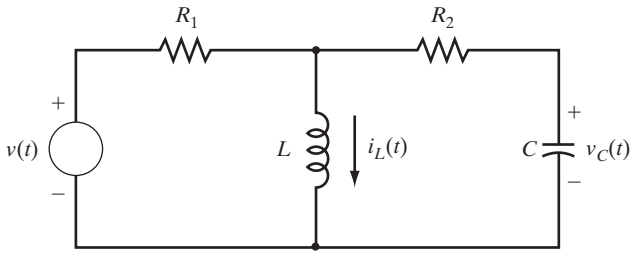



FIGURA P11.1

**11.2.** Para los circuitos de la figura P11.2, encuentre el modelo de estado con las variables de estado definidas en los diagramas de los circuitos.

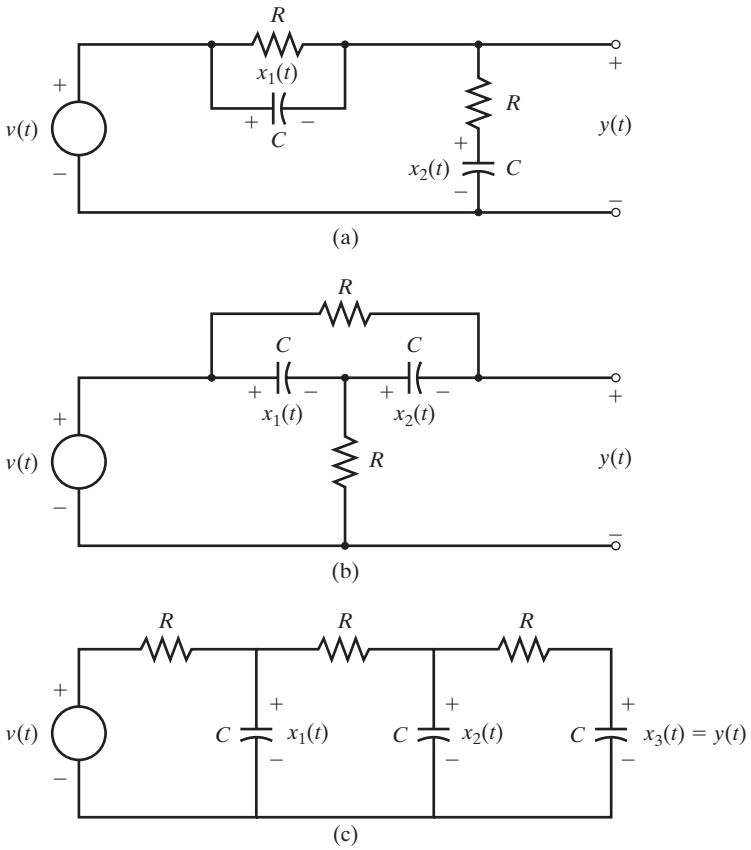



FIGURA P11.2

**11.3.** A continuación describimos un sistema mediante la ecuación diferencial de entrada y salida

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = b_1\dot{v} + b_0 v$$

El siguiente modelo de estado para este sistema aparece en la sección 11.2:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_0 & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}v$$

$$y = [b_0 \quad b_1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Encuentre las expresiones para $x_1$ y $x_2$ en términos de $v, y,$ y $\dot{y}$.

**11.4.** Cuando aplicamos la entrada $v(t) = \cos t, t \geq 0$ a un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo, la respuesta de salida que resulta (sin energía inicial en el sistema) es

$$y(t) = 2 - e^{-5t} + 3\cos t, \quad t \geq 0$$

Encuentre el modelo de estado del sistema con el número más pequeño posible de variables de estado. Verifique el modelo mediante la simulación de la respuesta a $v(t) = \cos t$.

**11.5.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo tiene la siguiente función de transferencia

$$H(s) = \frac{s^2 - 2s + 2}{s^2 + 3s + 1}$$

Encuentre el modelo de estado del sistema con el número más pequeño posible de variables de estado.

**11.6.** Considere el sistema lineal e invariante en el tiempo continuo de dos entradas y dos salidas que aparece en la figura P11.6.

**(a)** Encuentre el modelo de estado del sistema con las variables de estado definidas como $x_1(t) = w(t), x_2(t) = y_1(t) - w(t) - v_2(t),$ y $x_3(t) = y_2(t)$.

**(b)** Encuentre el modelo de estado del sistema con las variables de estado definidas como $x_1(t) = y_1(t) - v_2(t), x_2(t) = y_2(t),$ y $x_3(t) = y_1(t) - w(t) - v_2(t)$.

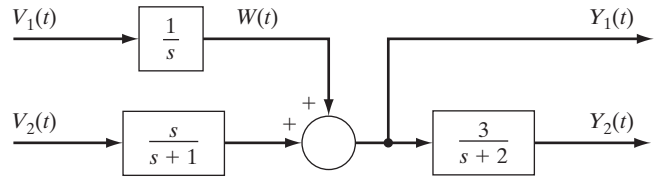



**FIGURA P11.6**

**11.7.** Encuentre el modelo de estado para el sistema de la figura P11.7, con un número de variables de estado igual a 2.

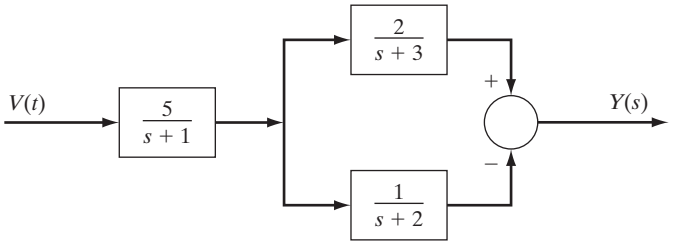



**FIGURA P11.7**

**11.8.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo tiene la siguiente función de transferencia

$$H(s) = \frac{bs}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

Encuentre el modelo de estado del sistema con las variables de estado definidas como

$$x_1(t) = y(t) \quad \text{y} \quad x_2(t) = \int_{-\infty}^{t} y(\lambda)\, d\lambda$$

**11.9.** Considere el sistema lineal de dos entradas y dos salidas que aparece en la figura P11.9, encuentre el modelo de estado con el menor número posible de variables de estado.

**11.10.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo tiene el siguiente modelo de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 2] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Derive una expresión para $x_1(t)$ y $x_2(t)$ en términos de $v(t)$, $y(t)$, y (si es necesario) las derivadas de $v(t)$ y $y(t)$.

**11.11.** Considere un sistema que consta de dos masas y tres resortes, tal como aparece en la figura P11.11. Las masas se encuentran sobre ruedas, las cuales asumimos sin fricción. La entrada $v(t)$ del sistema es la fuerza $v(t)$ aplicada a la primera masa. La posición de la primera masa es $w(t)$, y la posición de la segunda masa es la salida $y(t)$, donde tanto $w(t)$ como $y(t)$ están definidas respecto a alguna posición de equilibrio. Con las variables de estado definidas como $x_1(t) = w(t), x_2(t) = \dot{w}(t), x_3(t) = y(t)$, y $x_4(t) = \dot{y}(t)$, encuentre el modelo de estado del sistema.

**11.12.** Considere los siguientes "péndulos acoplados" que aparecen en la figura P11.12. Cada péndulo tiene una masa $M$ y una longitud $L$. La posición angular del péndulo de la izquierda es la salida $y(t)$, y la posición angular del de la derecha es $\theta(t)$. $Mg$ es la fuerza en cada péndulo debida a la gravedad, donde $g$ es la constante gravitacional. La distancia entre los dos péndulos es $d(t)$, la cual asumimos como no negativa para toda $t$. Como mostramos, un resorte está ubicado entre los dos péndulos. La fuerza en cada masa debido al resorte depende de la cantidad que se estire el resorte. La entrada al sistema de dos péndulos es una fuerza $f(t)$ aplicada a la masa por la derecha, con una fuerza aplica-

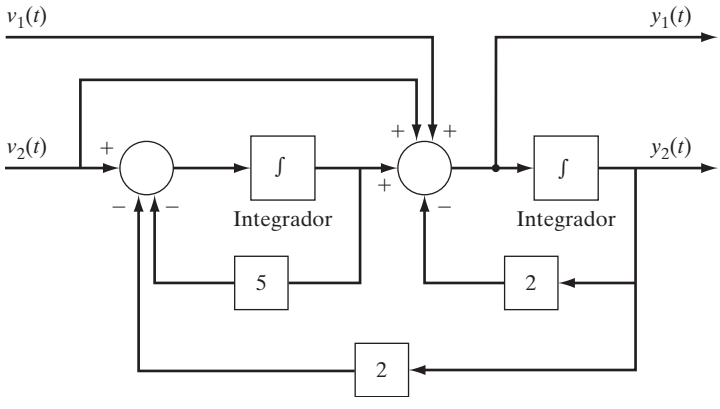



FIGURA P11.9

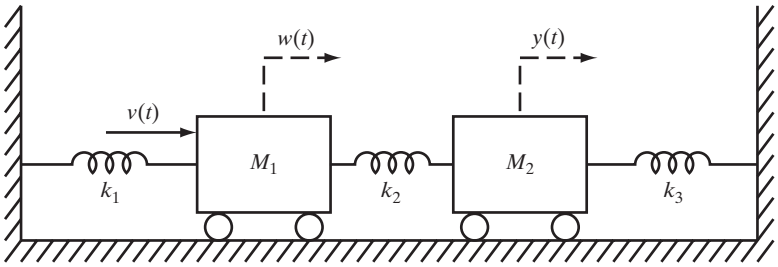



FIGURA P11.11

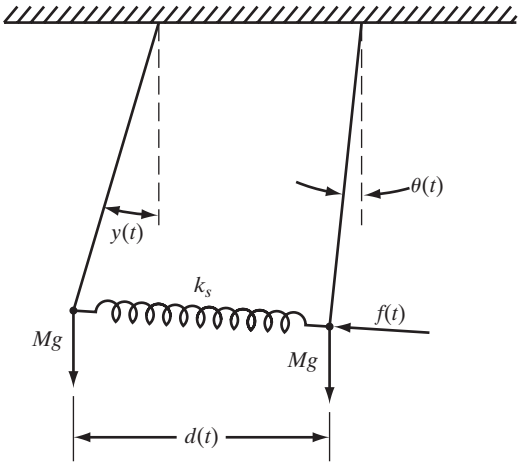



FIGURA P11.12

da tangencialmente al movimiento de la masa. *Si asumimos que los ángulos θ(t) y y(t) son pequeños para toda t*, determine el modelo de estado para el sistema con las variables de estado definidas por $x_1(t) = \theta(t), x_2(t) = \dot{\theta}(t), x_3(t) = y(t), x_4(t) = \dot{y}(t)$, y $x_5(t) = d(t) - d_0$, donde $d_0$ es la distancia entre los péndulos cuando se encuentran en la posición de descanso vertical.

**11.13.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo con dos entradas y dos salidas tiene la siguiente matriz de transferencia

$$H(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 \\ \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

Encuentre el modelo de estado del sistema con las variables de estado definidas como $x_1(t) = y_1(t), x_2(t) = y_2(t)$, donde $y_1(t)$ es la salida del primer sistema y $y_2(t)$ es la salida del segundo sistema.

**11.14.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo está dado por el modelo de estado $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t), y(t) = Cx(t)$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 3]$$

**(a)** Calcule la matriz de transición de estado $e^{At}$.
**(b)** Calcule la matriz de transferencia $H(s)$.
**(c)** Calcule la matriz de respuesta al impulso $H(t)$.
**(d)** Calcule la respuesta de estado $x(t)$ para $t > 0$ que resulta a partir del estado inicial $x(0) = [-1\ 1]'$ (la prima denota transposición) y la entrada $v(t) = [u(t)\ u(t)]'$.
**(e)** Si es posible, encuentre una respuesta no impulsiva $v(t)$ con $v(t) = 0$ para $t < 0$, tal que la respuesta de estado $x(t)$ que resulta de un estado inicial $x(0) = [1\ -1]'$ y la entrada $v(t)$ esté dada por $x(t) = [u(t) - u(t)]'$.

**11.15.** Considere un solo carro que se mueve sobre una superficie, dada la ecuación diferencial de entrada y salida

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{k_f}{M}\frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{M}v(t)$$

donde $y(t)$ es la posición del carro en un tiempo $t$. Con las variables de estado $x_1(t) = y(t), x_2(t) = \dot{y}(t)$, el carro tiene un modelo de estado $\dot{x}(t) = Ax(t) + bv(t), y(t) = cx(t)$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{-k_f}{M} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix}, \quad c = [1 \quad 0]$$

En los siguientes incisos independientes, tome $M = 1$, y $k_f = 0.1$:
**(a)** Mediante el uso del modelo de estado, determine una expresión para la respuesta de estado $x(t)$ que resulta de las condiciones iniciales $y(0) = y_0, \dot{y}(0) = v_0$, con $v(t) = 0$, para toda $t$.
**(b)** Con $v(t) = 0$ para $0 \le t \le 10$, sabemos que $y(10) = 0, \dot{y}(10) = 55$. Calcule $y(0)$ y $\dot{y}(0)$.
**(c)** Aplicamos una fuerza $v(t) = 1$ al carro para $0 \le t \le 10$. Sabemos que el estado $x(5)$ en el tiempo $t = 5$ es $x(5) = [50\ \ 20]'$. Calcule el estado inicial $x(0)$ en el tiempo $t = 0$.
**(d)** Suponga ahora que $v(t) = 0$ para $10 \le t \le 20$, y $y(10) = 5, y(20) = 50$. Calcule el estado $x(10)$ en el tiempo $t = 10$.
**(e)** Verifique las respuestas para los incisos (b) y (d) mediante la simulación de la respuesta del modelo de estado.

**11.16.** Considere el sistema de dos carros del ejemplo 11.5, con $k_f = 10$ y $M = 1000$. Con $x(0) = [60\ \ 60\ \ 100]'$, calcule las fuerzas $f_1(t)$ y $f_2(t)$ que deben aplicarse a los carros de manera que $x(t) = [60\ \ 60\ \ 100]'$ para toda $t \ge 0$.

**11.17.** Para el sistema de dos carros en el ejemplo 11.5, con $k_f = 10$ y $M = 1000$, utilice MATLAB para determinar las velocidades de los dos carros y la separación entre los carros para $t = 0, 1, 2, \ldots, 9$, cuando $x(0) = [60\ \ 60\ \ 100]'$ y $v(t) = [600 - 2000]'$ para $t = 0, 1, 2, \ldots 9$.
**(a)** Escriba el código en MATLAB para determinar las respuestas para $t = 0, 1, 2, \ldots 9$.
**(b)** Genere una gráfica en MATLAB para las velocidades y separación para $t = 0, 1, 2 \ldots 9$.
**(c)** A partir de su resultado en el inciso (b), ¿qué es lo que usted concluye?, explique.

**11.18.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo de dos entradas y dos salidas está dado por el modelo de estado $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t), y(t) = Cx(t)$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

**(a)** La respuesta de salida $y(t)$ que resulta a partir del estado inicial $x(0)$ con $v(t) = 0$ para toda $t \geq 0$ dado por

$$y(t) = \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0$$

Calcule $x(0)$.

**(b)** La respuesta de salida $y(t)$ que resulta del estado inicial $x(0)$ y la entrada $v(t) = [u(t) \; u(t)]'$ está dada por

$$y(t) = \begin{bmatrix} 4e^{t} - 2e^{2t} - 2 \\ 4e^{t} - 2e^{2t} - 2 \end{bmatrix}, \quad t \geq 0$$

Calcule $x(0)$.

**11.19.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo tiene el modelo de estado $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t), y(t) = Cx(t)$, donde

$$A = \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad -2]$$

Los siguientes incisos son independientes:

**(a)** Suponga que $y(2) = 3$ y $\dot{y}(2) = 5$. Calcule $x(2)$.

**(b)** Suponga que $v(t) = 0$ para $0 \leq t \leq 1$ y que $x(1) = [1 \; 1]'$. Calcule $x(0)$.

**(c)** Suponga que $x(0) = [1 \; 1]'$. Si es posible, encuentre una entrada $v(t)$ tal que la respuesta de salida que resulta de $x(0)$ y $v(t)$ sea cero; esto es, $y(t) = 0$, para $t > 0$.

**11.20.** Como pudimos observar en el problema 6.19, mediante las siguientes ecuaciones tenemos el modelo de ingestión y metabolismo de una droga

$$\frac{dw(t)}{dt} = -k_1 w(t) + v(t)$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = k_1 w(t) - k_2 y(t)$$

donde la entrada $v(t)$ es el grado de ingestión de la droga, la salida $y(t)$ es la masa de la droga en el flujo sanguíneo, y $w(t)$ es la masa de la droga en el tracto gastrointestinal. En los siguientes incisos, asuma que $k_1 \neq k_2$:

**(a)** Con las variables de estado definidas como $x_1(t) = w(t)$ y $x_2(t) = y(t)$, encuentre el modelo de estado del sistema.

**(b)** Con $A$ igual a la matriz del sistema encontrado en el inciso (a), calcule la matriz de transición de estado $e^{At}$.

**(c)** Calcule la inversa de $e^{At}$.

**(d)** Utilice la respuesta del inciso (c), y calcule el estado $x(t)$ para toda $t > 0$, cuando $v(t) = 0$ para $t \geq 0$ y cuyo estado inicial es $x(0) = [M_1 \; M_2]'$.

**(e)** Utilice el modelo de estado encontrado en el inciso (a), calcule la respuesta de estado $x(t)$ para toda $t > 0$, cuando $v(t) = e^{at}$, para $t \geq 0$, y $x(0) = [M_1 \; M_2]'$. Asuma que $a \neq k_1 \neq k_2$.

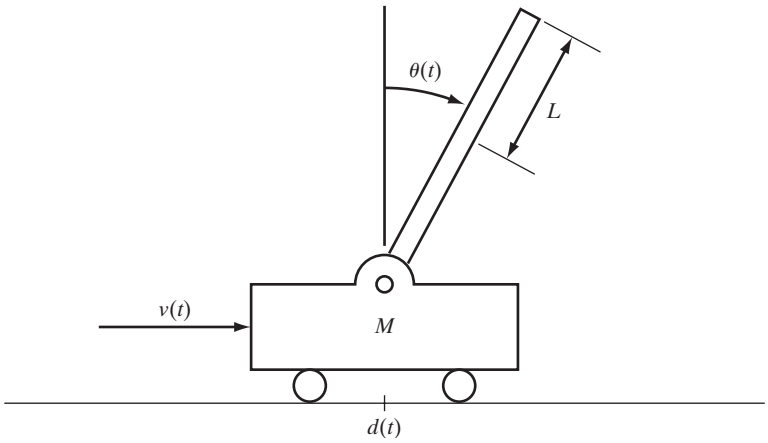



FIGURA P11.21

**11.21.** Considere un péndulo invertido sobre un carrito impulsado por un motor, como podemos ver en la figura P11.21. Aquí, $\theta(t)$ es el ángulo del péndulo desde la posición vertical, $d(t)$ es la posición del carrito a un tiempo $t$, $v(t)$ es la fuerza de impulso o frenado aplicada al carrito, y $M$ es la masa del carrito. La masa del péndulo es $m$. A partir de las leyes de la mecánica (vea la sección 2.2), describiremos el proceso mediante ecuaciones diferenciales

$$(J + mL^2)\ddot{\theta}(t) - mgL \operatorname{sen} \theta(t) + mL\ddot{d}(t) \cos \theta(t) = 0$$

$$(M + m)\ddot{d}(t) + mL\ddot{\theta}(t) = v(t)$$

donde $J$ es el momento de inercia del péndulo invertido respecto al centro de masa, $g$ es la constante de gravedad, y $L$ es una mitad de la longitud del péndulo. Asumiremos que el ángulo $\theta(t)$ es pequeño, y por lo tanto $\cos \theta(t) \approx 1$ y $\operatorname{sen} \theta(t) \approx \theta(t)$. En los siguientes incisos, tome $J = 1, L = 1, g = 9.8, M = 1$, y $m = 0.1$:

- **(a)** Con las variables de estado definidas como: $x_1 = \theta(t), x_2 = \dot{\theta}(t), x_3 = d(t)$, y $x_4 = \dot{d}(t)$, y la salida definida como $\theta(t)$, encuentre el modelo de estado para el péndulo invertido.
- **(b)** Con $A$ igual a la matriz del sistema encontrado en el inciso (a), calcule la matriz de transición de estado $e^{At}$.
- **(c)** Calcule la inversa $(e^{At})^{-1}$ de la matriz de transición de estado.
- **(d)** Utilice la respuesta del inciso (c), calcule el estado $x(5)$ en el tiempo $t = 5$, asuma que $x(10) = [10^\circ \;\; 0 \;\; 5 \;\; 2]'$ y $v(t) = 0$ para $5 \leq t \leq 10$.
- **(e)** Utilizando el modelo de estado, calcule la respuesta de estado $x(t)$ para toda $t > 0$, cuando $\theta(0) = 10^\circ, d(0) = 0, \dot{\theta}(0) = 0, \dot{d}(0)=0$, y $v(t) = 0$ para t $\geq 0$.
- **(f)** Repita el inciso (e) con $\theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = 1, d(0) = 0, \dot{d}(0) = 0$, y $v(t) = 0$ para $t \geq 0$.
- **(g)** Repita el inciso (e) con $\theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = 0, d(0) = 0, \dot{d}(0) = 1$, y $v(t) = 0$ para $t \geq 0$.
- **(h)** Verifique los resultados de los incisos (d)-(g) mediante la simulación de la respuesta del modelo de estado.

**11.22.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo discreto está dado por el modelo de estado $x[n + 1] = Ax[n] + Bv[n], y[n] = Cx[n]$, donde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ -1 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

- **(a)** Calcule $x[1], x[2]$, y $x[3]$ cuando $x[0] = [1 \;\; 1]'$ y $v[n] = [n \;\; n]'$.
- **(b)** Calcule la matriz de transferencia $H(z)$.

**(c)** Suponga que $x[0] = [0\ \ 0]'$. Encuentre una entrada $v[n]$ que establezca el estado $x[2] = [-1\ \ 2]'$; es decir, el estado $x[2]$ del sistema en el tiempo $n = 2$ que resulta de una entrada $v[n]$ igual a $[-1\ \ 2]'$.

**(d)** Ahora suponga que $x[0] = [1\ \ -2]'$. Encuentre una entrada $v[n]$ que conduzca al sistema a un estado cero en el tiempo $n = 2$; esto es $x[2] = [0\ \ 0]'$.

**(e)** Verifique los resultados de los incisos (a)-(d) mediante la simulación de la respuesta del modelo de estado.

**11.23.** La entrada $x[n] = -2 + 2^n, n = 0, 1, 2,\ldots$, se aplica a un sistema lineal e invariante en el tiempo discreto. La respuesta que resulta es $y[n] = 3^n - 4(2^n), n = 0, 1, 2,\ldots$, sin energía inicial dentro del sistema. Encuentre el modelo de estado del sistema con el menor número posible de variables de estado. Verifique el modelo mediante la simulación de su respuesta a $x[n] = -2 + 2^n, n \geq 0$.

**11.24.** Considere el sistema de tiempo discreto con el modelo de estado $x[n + 1] = Ax[n] + Bv[n], y[n] = Cx[n]$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Los siguientes incisos son independientes:

**(a)** Calcule $y[0], y[1]$, y $y[2]$ cuando $x[0] = [-1\ \ 2]'$ y la entrada es $v[n] = \text{sen}(\pi/2)n$.

**(b)** Suponga que $x[3] = [1\ \ -1]'$. Calcule $x[0]$, asuma que $v[n] = 0$ para $n = 0, 1, 2,\ldots$

**(c)** Suponga que $y[3] = [1\ \ 2\ -1]'$. Calcule $x[3]$.

**(d)** Verifique los resultados de los incisos (a)-(c) mediante la simulación de la respuesta del modelo de estado.

**11.25.** Un sistema de tiempo discreto tiene el modelo de estado $x[n + 1] = Ax[n] + Bv[n], y[n] = Cx[n]$, donde

$$CB = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad CAB = \begin{bmatrix} 22 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Cuando $x[0] = 0$, sabemos que $y[1] = [6\ 3]'$ y $y[2] = [4\ 2]'$. Calcule $v[0]$ y $v[1]$.

**11.26.** Para el sistema de préstamo/ahorro del ejemplo 11.7 haga lo siguiente:

**(a)** Determine el número de meses que toma pagar \$300,000.00 de hipoteca.

**(b)** Determine el monto en la cuenta de ahorro cuando se paga el total del préstamo.

**11.27.** Para el sistema de préstamo/ahorro del ejemplo 11.7 haga lo siguiente:

**(a)** Determine la constante $c$ de modo que cuando los pagos mensuales sean de $p[n] = c, n = 1, 2,\ldots$, el saldo del préstamo permanezca en \$300,000.00. A esto se le conoce como préstamo de "sólo intereses".

**(b)** Para su solución del inciso (a), determine la constante $q$ más pequeña de manera que, cuando $d[n] = q, n = 1, 2,\ldots$, el monto en la cuenta de ahorros permanezca en \$20,000.00.

**11.28.** Un sistema de tiempo continuo tiene el siguiente modelo de estado $\dot{x}(t) = Ax(t) + bv(t)$, $y(t) = Cx(t)$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

**(a)** Determine si existe una transformación de coordenadas $\bar{x}(t) = Px(t)$ tal que $\bar{A}$ esté en forma diagonal. Si dicha transformación existe, dé $P$ y $\bar{A}$.

**(b)** Verifique los resultados en el inciso (a) mediante el uso de MATLAB para calcular $\bar{A}$ y $\bar{b}$.

**11.29.** Tenemos dos sistemas de tiempo continuo con los siguientes modelos de estado:

$$\dot{x}(t) = A_1x(t) + b_1v(t),\ y(t) = C_1x(t)$$
$$\dot{\bar{x}}(t) = A_2\bar{x}(t) + b_2v(t),\ y(t) = C_2\bar{x}(t)$$

donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$b_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine si existe una transformación de coordenadas $\overline{x}(t) = Px(t)$ entre los dos sistemas. Si existe, determine $P$.

**11.30.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo tiene el modelo de estado $\dot{x}(t) = Ax(t) + bv(t), y(t) = cx(t)$. Sabemos que existe una transformación de coordenadas $\overline{x}(t) = P_1x(t)$ tal que

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \overline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \overline{c} = [-1 \quad 1 \quad 1]$$

También sabemos que existe una segunda transformación $\overline{\overline{x}}(t) = P_2x(t)$ tal que

$$\overline{\overline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}, \quad \overline{\overline{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**(a)** Determine $a_0, a_1$ y $a_2$.
**(b)** Calcule la función de transferencia $H(s)$ del sistema.
**(c)** Calcule $\overline{\overline{c}}$.

**11.31.** Un sistema lineal e invariante en el tiempo continuo está dado por las ecuaciones de estado

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) + 2v(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = 2x_2(t) + v(t)$$

**(a)** Calcule una entrada de control $v(t)$ que guíe al sistema desde su estado inicial $x(0) = [1 \ -1]'$ a $x(2) = [0 \ 0]'$.
**(b)** Verifique los resultados del inciso (a) mediante la simulación del modelo de estado.

**11.32.** Considere el carro sobre una superficie con masa $M = 1$ y coeficiente de fricción $k_f = 0.1$. Calcule una entrada $v(t)$ que guíe al carro desde su posición inicial $y(0) = 10$ y velocidad inicial $\dot{y}(0) = 2$ a $y(10) = 0$ y $\dot{y}(10) = 0$. Grafique $v(t)$.

**11.33.** Un sistema de tiempo continuo discretizado está definido por el modelo de estado $x(nT + T) = A_dx(nT) + B_dv(nT), y(nT) = Cx(nT)$, donde

$$A_d = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 1]$$

**(a)** Sabemos que $y(0) = 1, y(T) = -2$ cuando $v(0) = 2, v(T) = 4$. Calcule $x(0)$.
**(b)** Sabemos que $x(0) = [2 \ -3]', y(T) = -1$. Calcule $v(0)$.

**11.34.** Determine la simulación en el tiempo discreto (con $T = 1$) para el sistema de tiempo continuo $\dot{x}(t) = Ax(t) + bv(t)$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**11.35.** Repita el problema 11.34 para el sistema con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**11.36.** El modelo de estado que relaciona $\theta(t)$ y $v(t)$ en el péndulo invertido (vea el problema 11.21) está dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} v(t)$$

donde

$$a = \frac{(M + m)mgL}{(M + m)J + Mm(L^2)} \quad \text{y} \quad b = \frac{-mL}{(M + m)J + Mm(L^2)}$$

Si tomamos $g = 9.8, L = 1, J = 1, M = 1, m = 0.1$, y $T = 0.1$, calcule el modelo de estado discreto.

**11.37.** Considere el sistema de dos carros dado por

$$\begin{aligned} \dot{v}_1(t) + \frac{k_f}{M} v_1(t) &= \frac{1}{M} f_1(t) \\ \dot{v}_2(t) + \frac{k_f}{M} v_2(t) &= \frac{1}{M} f_2(t) \\ \dot{w}(t) &= v_2(t) - v_1(t) \end{aligned}$$

Con las variables de estado $x_1(t) = v_1(t), x_2(t) = v_2(t), x_3(t) = w(t)$ y las salidas $y_1(t) = x_1(t), y_2(t) = x_2(t), y_3(t) = x_3(t)$, y con $M = 1000, k_f = 10$, y $T = 1$, calcule el modelo de estado discreto.

**11.38.** Considere los péndulos acoplados con el modelo de estado construido en el problema 11.12. Tome $M = L = 1, g = 9.8$, y $k_s = d_0 = 0.5$.

**(a)** Calcule el modelo de estado discreto con $T = 0.1$.

**(b)** Utilizando sus resultados en el inciso (a), escriba un programa que calcule el estado $x(0.1n)$, empezando con el estado inicial $x(0)$ con $f(t) = 0$ para toda $t \geq 0$.

**(c)** Utilice su programa, calcule $x(0.1n)$ para $0 \leq n \leq 800$ cuando $x(0) = [10^\circ \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.174]^T$. Grafique $\theta(0.1n)$ y $y(0.1n)$ para $0 \leq n \leq 800$.

**(d)** Explique el comportamiento de los péndulos en respuesta al estado inicial $x(0)$ dada en el inciso (c).

APÉNDICE

A

# Repaso breve de la variable compleja

En este apéndice presentamos un breve y básico repaso sobre la variable compleja. Para una explicación detallada sobre este tema, consulte a Churchill y Brown [2003].

Sea $s$ un número complejo. La forma rectangular de $s$ está dada por

$$s = a + jb \tag{A.1}$$

donde $a$ y $b$ son números reales y donde $j = \sqrt{-1}$. El número real $a$ es la parte real de $s$ y se denota como $a = \text{Re}\, s$. El número real $b$ es la parte imaginaria de $s$ y se denota como $b = \text{Im}\, s$.

La forma polar de un número complejo está dada por

$$s = \rho e^{j\theta} \tag{A.2}$$

donde $\rho$ es un número real no negativo y $\theta$ es un número real. El número $\rho$ es la magnitud de $s$ y se denota como $\rho = |s|$. El número real $\theta$ es el ángulo de $s$ y se denota como $\theta = \angle s$.

Como muestra la figura A.1, los números complejos pueden representarse como puntos en el plano complejo. El eje horizontal del plano complejo es el *eje real*, y el eje vertical es el *eje imaginario*. El número complejo $s = a + jb$, con $a$ y $b$ positivos, es el punto en el plano complejo que aparece en la figura A.1. La *representación vectorial* de $s$ es el vector que comienza en el origen del plano complejo y finaliza en el punto $s = a + jb$. La dirección de la representación vectorial se indica mediante la flecha que muestra la figura A.1. Observe que la magnitud $|s|$ de $s$, es la longitud de la representación vectorial de $s$, y el ángulo $\angle s$ de $s$ es el ángulo entre la representación vectorial de $s$ y el eje real positivo del plano complejo.

Dos números complejos $s_1$ y $s_2$ son iguales si y sólo si sus partes reales son iguales, y sus partes imaginarias son iguales; es decir,

$$\text{Re}\, s_1 = \text{Re}\, s_2 \text{ e } \text{Im}\, s_1 = \text{Im}\, s_2$$

Respecto a la representación polar, dos números complejos $s_1$ y $s_2$ son iguales si y sólo si sus magnitudes son iguales y sus ángulos son iguales; es decir,

$$|s_1| = |s_2| \text{ y } \angle s_1 = \angle s_2$$

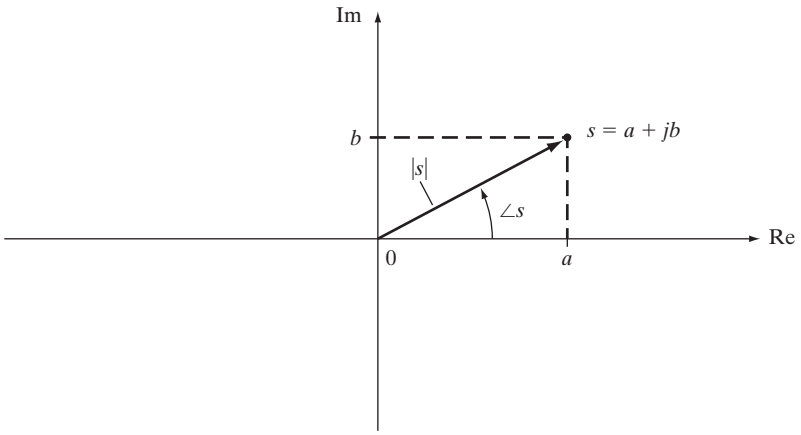



**FIGURA A.1**
Punto *s* en el plano complejo.

Con frecuencia resulta necesario convertir de la forma rectangular de *s* a la forma polar de *s*, y viceversa. Esto puede hacerse de la siguiente forma. Suponga que un número complejo *s* está dado en la forma rectangular (A.1) y la forma polar (A.2). La *fórmula de Euler* establece que

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j \operatorname{sen}\theta \tag{A.3}$$

Al sustituir (A.3) en la representación polar (A.2), tenemos

$$s = \rho(\cos\theta + j \operatorname{sen}\theta) \tag{A.4}$$

Si igualamos la expresión (A.1) para la forma rectangular de *s*, con la expresión (A.4) obtenemos

$$a = \rho\cos\theta \text{ y } b = \rho \operatorname{sen}\theta \tag{A.5}$$

Si utilizamos (A.5) podemos calcular la forma rectangular de *s* a partir de la forma polar de *s*.

Ahora de (A.5), vemos que

$$a^2 + b^2 = \rho^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = \rho^2 \tag{A.6}$$

y

$$\frac{b}{a} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta \tag{A.7}$$

Al resolver (A.6) para $\rho$, y (A.7) para $\theta$, tenemos

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{A.8}$$

y la definición del ángulo en el cuarto cuadrante es

$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right) & \text{cuando } a \geq 0 \\ 180^\circ + \tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right) & \text{cuando } a < 0 \end{cases} \tag{A.9}$$

Si utilizamos (A.8) y (A.9), la forma polar de $s$ puede calcularse a partir de la forma rectangular de $s$.

El *complejo conjugado* de $s = a + jb$, denotado por $\bar{s}$, está dado por

$$\bar{s} = a - jb$$

Así, la conjugación cambia el signo de la parte imaginaria de un número complejo. Si $s$ está dado en la forma polar (A.2), el complejo conjugado $\bar{s}$ está definido por

$$\bar{s} = \rho e^{-j\theta}$$

Entonces, la conjugación cambia el signo del ángulo de un número complejo.

Dados dos números complejos $s_1 = a_1 + jb_1$, y $s_2 = a_2 + jb_2$, la suma $s_1 + s_2$ se define como

$$s_1 + s_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2) \tag{A.10}$$

De (A.10) vemos que la parte real de la suma de dos números complejos es igual a la suma de las partes reales de los dos números, y la parte imaginaria de la suma es igual a la suma de las partes imaginaria.

El producto $s_1 s_2$ se define como

$$s_1 s_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

La división $s_1/s_2$ está dada por

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2}$$

$$\frac{s_1 \bar{s}_2}{s_2 \bar{s}_2} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)}$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + j(-a_1 b_2 + b_1 a_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

Si $s_1$ y $s_2$ se escriben en forma polar,

$$s_1 = \rho_1 e^{j\theta_1} \quad \text{y} \quad s_2 = \rho_2 e^{j\theta_2}$$

entonces el producto $s_1 s_2$ está dado por

$$s_1 s_2 = (\rho_1 \rho_2) \exp[j(\theta_1 + \theta_2)] \tag{A.11}$$

y la división $s_1/s_2$ está dada por

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \exp[j(\theta_1 - \theta_2)] \tag{A.12}$$

De (A.11) vemos que la magnitud $|s_1 s_2|$ del producto $s_1 s_2$ es igual al producto de la magnitud $|s_1|$ de $s_1$ y la magnitud $|s_2|$ de $s_2$, y el ángulo $\angle(s_1 s_2)$ del producto es la suma $\theta_1 + \theta_2$ de los ángulos de $s_1$ y $s_2$; es decir,

$$|s_1 s_2| = |s_1||s_2| \quad \text{y} \quad \angle(s_1 s_2) = \theta_1 + \theta_2$$

De (A.12), la magnitud $|s_1/s_2|$ de la división $s_1/s_2$ es igual a la magnitud $|s_1|$ de $s_1$, dividida entre la magnitud $|s_2|$ de $s_2$, y el ángulo $\angle(s_1/s_2)$ es igual al ángulo de $\theta_1$ de $s_1$, menos el ángulo $\theta_2$ de $s_2$; es decir

$$\left|\frac{s_1}{s_2}\right| = \frac{|s_1|}{|s_2|} \quad \text{y} \quad \angle(s_1/s_2) = \theta_1 - \theta_2$$

Estos resultados muestran que, para multiplicar o dividir números complejos, es más sencillo utilizar la forma polar (en lugar de la rectangular). Por otra parte, para sumar o restar números complejos, es más sencillo utilizar la forma rectangular.

## A.1 SUMA DE SINUSOIDES

Un caso en el que la notación compleja puede simplificar un cálculo es cuando sumamos dos señales sinusoidales que tienen la misma frecuencia, pero diferente fase. Por ejemplo, suponga que $x(t)$ está dada por la suma

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t + \theta_1) + A_2 \cos(\omega t + \theta_2) \tag{A.13}$$

Podemos combinar las dos sinusoides incluidas en $x(t)$ si utilizamos identidades trigonométricas para obtener una expresión de la forma

$$x(t) = A_3 \cos(\omega t + \theta_3) \tag{A.14}$$

Sin embargo, este procedimiento puede resultar muy tedioso. Como alternativa, la forma (A.14) puede obtenerse mediante la notación compleja, de la siguiente manera. Primero, escribimos (A.13) como

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 \operatorname{Re}\{e^{j(\omega t + \theta_1)}\} + A_2 \operatorname{Re}\{e^{j(\omega t + \theta_2)}\} \\ &= \operatorname{Re}\{A_1 e^{j(\omega t + \theta_1)} + A_2 e^{j(\omega t + \theta_2)}\} \\ x(t) &= \operatorname{Re}(e^{j\omega t}[A_1 e^{j\theta_1} + A_2 e^{j\theta_2}]) \end{aligned} \tag{A.15}$$

La expresión interna de (A.15) simplemente representa una amplitud compleja, y en general se conoce como *fasor*. El problema de generar la forma (A.14) se reduce a la suma de dos números complejos para simplificar la expresión para el fasor; es decir,

$$A_1 e^{j\theta_1} + A_2 e^{j\theta_2} = A_3 e^{j\theta_3} \tag{A.16}$$

Una vez que encontramos $A_3$ y $\theta_3$ a partir de (A.16), (A.15) se vuelve

$$x(t) = A_3 \operatorname{Re}\{e^{j(\omega t + \theta_3)}\}$$

la cual es igual a la forma deseada dada por (A.14). Como ejemplo, sea $A_1 = 2, \theta_1 = -\pi/4$, $A_2 = 4$, y $\theta_2 = \pi/2$, en (A.1). Si sustituimos lo anterior en (A.16), y utilizamos la fórmula de Euler [vea (A.3)], obtenemos

$$\begin{aligned} 2e^{-j\frac{\pi}{4}} + 4e^{j\frac{\pi}{2}} &= 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2j\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4j\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sqrt{2} + j\left(4 - \sqrt{2}\right) \\ &= 2.94e^{j1.07} \end{aligned}$$

Entonces, $A_3 = 2.94$ y $\theta_3 = 1.07$ en (A.14).

APÉNDICE

B

# Repaso breve de matrices

Este apéndice contiene un breve y básico repaso del álgebra de matrices. Para una explicación completa sobre este tema, consulte a Hill y Kolman [2001].

Sea $n$ un entero positivo. Un *vector fila* $x$ de $n$ elementos es una fila de elementos definida como

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]$$

Un *vector columna* $x$ de $n$ elementos es una columna de elementos definida como

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Los elementos o componentes del vector (fila o columna) $x$ son las cantidades $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Estas componentes pueden ser números reales o complejos; también pueden ser funciones del tiempo, o funciones de una variable compleja $s$.

Dados dos enteros positivos $m$ y $n$, una *matriz* $A$ de $m \times n$ ($m$ por $n$) es un arreglo de elementos dado por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Esta matriz tiene $m$ filas y $n$ columnas. Para $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$, el elemento $a_{ij}$ de $A$ es la entrada o componente $i, j$ de la matriz $A$. Como en el caso de los vectores, las componentes de una matriz pueden ser números o funciones.

Para simplificar la notación, algunas veces una matriz se escribirá como $A = (a_{ij})$, donde $a_{ij}$ es la entrada $i, j$ de $A$.

Las *componentes diagonales* de la matriz $A = (a_{ij})$ son los elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{qq}$, donde $q = m$ si $m \leq n$, $q = n$ si $n \leq m$. Se dice que una matriz es una matriz diagonal si todas las componentes no diagonales son cero.

Observe que, si $n = 1$, una matriz de $m \times 1$ es un vector columna de $m$ elementos, y si $m = 1$, una matriz de $1 \times n$ es un vector fila de $n$ elementos. Así, los vectores fila y columna se consideran casos especiales de matrices.

Si $n = m$, se dice que la matriz $A$ de $m \times n$ es una *matriz cuadrada*. En otras palabras, una matriz es cuadrada si tiene el mismo número de filas y columnas. Un ejemplo de una matriz cuadrada es la *matriz identidad* $I$, la cual se define como

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces, la matriz identidad, $I$, es una matriz diagonal con unos en la diagonal.

Dada la matriz $A = (a_{ij})$ de $m \times n$, la *transpuesta* de $A$ es la matriz $A'$ de $n \times m$, definida como

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Al utilizar notación abreviada, vemos que $A' = (a_{ji})$.

De la definición de $A'$ vemos que las filas de la transpuesta son las mismas que las columnas de $A$. En particular, la transpuesta de un vector fila es igual a un vector columna, y la transpuesta de un vector columna es igual a un vector fila.

## B.1 OPERACIONES CON MATRICES

Dos matrices pueden sumarse si y sólo si tienen el mismo tamaño, es decir, si tienen el mismo número de filas y el mismo número de columnas. En particular, suponga que $A$ y $B$ son dos matrices de $m \times n$, dadas por $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$. Entonces la suma $A + B$ se define como

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

Así, la entrada $i, j$ de la suma $A + B$ es igual a la suma de las entradas $i, j$ de $A$ y $B$. Observe que, si $m = 1$, entonces $A$ y $B$ son vectores fila y, por lo tanto, $A + B$ es la suma de dos vectores fila. Si $n = 1$, entonces $A$ y $B$ son vectores columna, y $A + B$ es la suma de dos vectores columna.

Dada una matriz $A$ de $m \times n$, y una matriz $B$ de $p \times r$, el producto $AB$ puede definirse si y sólo si $n = p$; es decir, el número de columnas de $A$ debe ser igual al número de filas de $B$. Si éste es el caso, el producto $AB$ se define como

$$AB = (c_{ij}), \quad \text{donde } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

**Ejemplo B.1**

Suponga que

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces, si escribimos $AB$ en la forma $AB = (c_{ij})$, tenemos

$$\begin{aligned} c_{11} &= (-1)(-3) + (2)(2) = 7 \\ c_{12} &= (-1)(2) + (2)(1) = 0 \\ c_{21} &= (3)(-3) + (1)(2) = -7 \\ c_{22} &= (3)(2) + (1)(1) = 7 \\ c_{31} &= (2)(-3) + (4)(2) = 2 \\ c_{32} &= (2)(2) + (4)(1) = 8 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$AB = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -7 & 7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Es importante observar que, en general, la multiplicación de matrices *no* es conmutativa. En otras palabras $AB \neq BA$. En el ejemplo anterior, el producto $BA$ no puede definirse, ya que el número de columnas de $B$ no es igual al número de filas de $A$. Incluso si $A$ y $B$ son matrices cuadradas del mismo tamaño, en general $AB \neq BA$. Por ejemplo, suponga que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A \quad \text{y} \quad BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = B$$

Por lo tanto, $AB \neq BA$.

Dada cualquier matriz $A$ de $n \times n$, podemos mostrar que

$$A(I) = IA = A$$

donde $I$ es la matriz identidad de $n \times n$. Entonces, la multiplicación de una matriz cuadrada por la matriz identidad reproduce la matriz. Esta propiedad implica que $I$ es el elemento identidad de la multiplicación de matrices.

Dada la matriz $A = (a_{ij})$ de $m \times n$ y el escalar $b$, la multiplicación escalar $bA$ se define como

$$bA = (ba_{ij})$$

En otras palabras, definimos la multiplicación de una matriz por un escalar como la multiplicación de cada componente de la matriz por el escalar.

## B.2 DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de tamaño $n$. El *determinante* de $A$ es un escalar que se denota como $|A|$. El lector debe observar que el símbolo para el determinante es el mismo que el símbolo para la magnitud de un número complejo. Siempre resultará claro del contexto, si la notación se refiere al determinante de una matriz cuadrada, o a la magnitud de un número complejo. Entonces, este uso doble del símbolo || no debe generar confusión.

Cuando $n = 1$, tal que $A$ es un escalar, el determinante de $A$ es igual a $A$. Ahora suponga que $n = 2$, tal que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

En este caso, el determinante de $A$ es

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{B.1}$$

Ahora, sea $n = 3$, tal que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

El determinante de $A$ está dado por

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) \\ &\quad + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \end{aligned} \tag{B.2}$$

Calculamos la expresión (B.2) para el determinante, realizando una expansión respecto a la primera columna de $A$. Podemos calcular el determinante realizando la expansión respecto a cualquier fila o columna de $A$. Por ejemplo, si expandimos respecto a la primera fila de $A$, tenemos

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{B.3}$$

A partir del patrón en (B.2) y (B.3), debe ser claro cómo expandir respecto a cualquier fila o columna de $A$. Para disminuir al mínimo el número de cálculos, es mejor expandir respecto a la fila o columna que contenga la mayoría de ceros. En particular, observe que, si $A$ tiene una fila o columna que sólo consta de ceros, entonces $|A| = 0$.

Cuando $n = 4$, expandimos respecto a la primera columna de $A$ y obtenemos

$$\begin{aligned}|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}\end{aligned} \tag{B.4}$$

El patrón en (B.2) y (B.4) se extiende al cálculo de $|A|$ cuando $n > 4$. Aquí omitimos el desarrollo detallado del caso general.

Vale la pena observar que, si $A$ es una matriz diagonal con valores $a_{ii}$ sobre la diagonal, el determinante de $A$ es

$$|A| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

## B.3 INVERSIÓN DE MATRICES

Sea $A$ una matriz de $n \times n$. La matriz $A$ tiene una *inversa* que se denota como $A^{-1}$ si y sólo si

$$A(A^{-1}) = A^{-1}A = I$$

La inversa $A^{-1}$ (si ésta existe) también es una matriz de $n \times n$.

Es un resultado fundamental en el álgebra de matrices que $A$ tenga una inversa $A^{-1}$ si y sólo si el determinante $|A|$ es diferente de cero. Si $|A| \neq 0$, la inversa está dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{cof}(A)'$$

donde $\text{cof}(A)'$ es la transpuesta de la *matriz cofactor* $\text{cof}(A)$. Cuando $n = 2$, $\text{cof}(A)$ está dado por

$$\text{cof}(A) = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Cuando $n = 3$,

$$\text{cof}(A) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

donde

$$b_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad b_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad b_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$b_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad b_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad b_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$b_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad b_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad b_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

De nuevo, existe un patrón en el cálculo de cof($A$) que se extiende a $n > 3$.

Es fácil ver que, si $A$ es una matriz diagonal con valores $a_{ii}$ diferentes de cero sobre la diagonal, la inversa $A^{-1}$ existe y es también diagonal con los valores $1/a_{ii}$ sobre la diagonal. Para verificar esto, observe que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

# Bibliografía


BRIGHAM, E. O., *The Fast Fourier Transform and Its Applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.

BROGAN, W. L., *Modern Control Theory*, 3a. ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.

CHURCHILL, R. V. y BROWN, J. W., *Complex Variables and Applications*, 7a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 2003.

FRANKLIN, G. F., POWELL, J. D., y WORKMAN, M. L., *Digital Control of Dynamic Systems*, 3a. ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1997.

HAYT, Jr., W. H., KEMMERLY, J. E., y DURBIN, S. M., *Engineering Circuit Analysis*, 3a. ed., McGraw-Hill, 2002.

HECK, B. S., CLEMENTS, N. S., y FERRI, A. A., A LEGO Experiment for Embedded Control Systems Design, *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 24, núm. 5, oct., 2004, pp. 61-64.

HILL, D. R. y KOLMAN, B., *Modern Matrix Algebra*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2001.

KAILATH, T., *Linear Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.

KAMEN, E. W. y SU, J., *Introduction to Optimal Estimation*, Springer-Verlag, Londres, 1999.

LUDEMAN, L. C., *Fundamentals of Digital Signal Processing*, Harper & Row, Nueva York, 1986.

McCLAMROCH, N. H., *State Models of Dynamic Systems*, Springer-Verlag, Nueva York, 1980.

NILSSON, J. W. y RIEDEL, S. A., *Electric Circuits*, 7a. ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2004.

OPPENHEIM, A. V. y SCHAFER, R.W., *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.

PHILIPS, C. L. y HARBOR, R. D., *Feedback Control Systems*, 4a. ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2000.

PROAKIS, J., *Digital Communications*, 4a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 2000.

RABINER, L. R. y GOLD, B., *Theory and Application of Digital Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1975.

RUGH, W. J., *Linear System Theory*, 2a. ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.

# Índice


## A

Algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT), 166, 195-205
  aplicaciones del, 199-205
    cálculo de la transformada de Fourier, vía, 199-203
    convolución mediante el uso de, 203-205
  método de conversión del tiempo al sistema decimal, 196
  versiones, 196
Algoritmo Parks-McClellan, 568
Aliasing, 247-248
  filtrado de voz (ejemplo), 248
Amplificador
  con ganancia en variación de tiempo, 36, 37
  ejemplo, 34-35
Amplificador/atenuador ideal, 32
Amplitud modulada (AM), 145-148
  banda lateral
    baja, 146
    superior, 146
  definición, 145
  ejemplo, 145
  espectro de amplitud, 99-100, 173
  forma alterna de, 147-148
  propiedad clave, 146-147
  sensibilidad de amplitud, 147
  señal
    convertida hacia arriba, 146-147
    de banda base, 147
    de paso de banda, 147
  transmisión de doble banda lateral (DSB), 148
    con portadora suprimida (DSB-SC), 148
Amplitud modulada de un pulso (PAM), 149, 152
Análisis de Fourier aplicado a sistemas, 222-278
  a sistemas de tiempo continuo, 222-228
  a sistemas de tiempo discreto, 249-253
    entrada sinusoidal, respuesta a, 250-253
  entradas periódicas y no periódicas, respuesta a, 228-236, 228-237
  filtrado digital pasa bajas, aplicación a, 254-262
  filtros ideales, análisis, 237-242
  muestreo, 242-248
Análisis de Fourier de señales de tiempo discreto, 166-221
Ancho de banda, 227, 446
  infinito, 121
Aproximación
  de Euler, 70-71, 75
  Runge-Kutta, 75
Archivos M (M files), 550
  butter, 550
  chebyl, 550
  hybrid, 573, 583
Arreglo de Routh, 415-417
  cálculo, 416
Asíntotas
  construcción de gráficas de Bode vía: 454-463
    ceros o polos complejos, 460-462
    factores constantes, 455-457
    factores $j\omega$, 457-458
    graficación de diagramas de Bode, 458-459
    término cuadrático en el denominador (ejemplo), 462-463

## B

Banda
  de paso, 446
    filtros ideales, 238
  de rechazo, 238, 446
    en un filtro causal, 464
Bilineal, definición, 543
Bolsa de Valores Nasdaq, 19

## C

Caso de un polo complejo, 450-454
Causalidad, 31-32, 37
  sistemas, 31-32, 37
Ceros del sistema, 325
Ciclo cerrado, 492-493
Circuito
  de muestreo y retención, 568
  en serie *RC* (ejemplo) 65-66
  *RC*, 24-26, 36
  respuesta a un pulso, 234-237
Círculo unitario, 390
`comando`
  `abs(fft(x))`, 206
  `axis`, 10

bilinear, 550
bode, 444, 448, 459
buttap, 474, 549
c2d, 622
c2dm, 570-571
conv, 294, 311
csvread, 20-21, 209, 213
cheb1ap, 471-472, 550
deconv, 311
den, 311
dft, 194, 199
dlsim, 611
ezplot(*x*), 314
feedback, 519
fft, 180, 199, 278
filter, 552
fir1, 566
fourier, 122
idft, 199
ifft, 199
ifourier, 122
ilaplace(x), 314
int, 84, 110, 122, 269
laplace, 284
lp2bp, 474
lp2hp, 474
lp2lp, 474, 550
lsim, 328-329
num, 311, 312, 328
ode, 45, 74, 93
plot(t,x), 13
plot, 553
rand, 220
residue, 311, 344
rlocus, 512, 514
rootlocus, 512-514
roots, 299, 309, 414, 499
simplify, 84
spd, 211
stem, 21, 40
step, 420, 422, 495-496, 507
sum, 28
syms ck t, 110
syms t lambda y, 84
syms, 285, 314
tf (sys1), 615
tf, 328, 329
y = conv(x,v), 52
Combinación lineal, ponderaciones, 45
Compresión de frecuencia, 130
Computadoras incrustadas, 575-576
Con buen comportamiento, uso del término, 114
Condición
de estabilidad, 223
de igualación, en el dominio de frecuencia, 541
Conexión
de retroalimentación, 339-341
en serie, 339
Constante de tiempo, 422-423, 429
Contenido
de frecuencia, 2
espectral de señales comunes, 122-126
decaimiento sinusoidal (ejemplo), 124-126
pulso triangular (ejemplo), 123-124
Control, 489, 535
de ciclo abierto, 489-490
ejemplo, 490-492
de ciclo cerrado, 492-493
de retroalimentación, 492-493
de salida, 493
entrada de control, 489
error de rastreo, 492
de estado estable, 494-495
*H* infinito, 622
lugar geométrico de las raíces, 508-516
no ideal, 490
planta, 489
problema de rastreo, 489
proporcional, 494-496
punto de ajuste, 489
definición, 489
rastreo asintótico, 493
retroalimentación, 492-493
control de retroalimentación de salida, 493
señal de referencia, 489
sistema de ciclo cerrado, 492
simulación MATLAB de, 496-497
Control de rastreo, 489, 497-508
controlador proporcional más derivada, 504
ejemplo, 504-507
controlador proporcional más integral (PI), 501
ejemplo, 502-503
función de transferencia de ciclo cerrado, cálculo de (ejemplo), 498-499
perfecto, 494
referencia escalón, rastreo, 500-508
Control System Toolbox, MATLAB, 328, 420, 429, 435, 496-497, 512
Controlador
principal, 533
proporcional más derivada, 504
ejemplo, 504-507
proporcional más integral (PI), 501
más derivada (PID), 523
Controladores digitales
control digital de un motor cd (ejemplo), 572-574
definición, 568
diseño, 568-577

diferencias con el diseño de filtros digitales y, 571
emulación analógica, 568
igualación de respuestas, 569-570
implementación de un control o un filtro digital (ejemplo), 574-575
proyecto de control digital, 575-577
transformación bilineal, 568
Controles incrustados, 575
Convertidor analógico a digital (A/D), 537
Convolución
definición, 49
en el dominio de tiempo, 138, 141
integral, 76
modelos de dominio de tiempo:
definición, 49
señales de tiempo discreto, 49-55
transformada de Laplace, 293-294
Coseno, de una transformada de Laplace (ejemplo), 289
Criterio
de magnitud, 509
del ángulo, 509

## D

Datos de series de tiempo, descarga en una hoja de cálculo, 18-19
Decaimiento sinusoidal (ejemplo), 124-126
Decibeles (dB), 444
Deformación, 545-547
predeformación, 546-547
Derivación en el dominio de tiempo, 134-135
transformada de Laplace, 290-292, 341
Derivada
generalizada, 9-10
ordinaria, 9-10
Descripción del dominio *s*, 316
Desplazamiento en el tiempo por la izquierda o por la derecha, 127-128, 141
desplazamiento por la derecha de un pulso (ejemplo), 128
Detector envolvente, 149
DFT. *Vea* Transformada discreta de Fourier (DFT)
inversa, 182-183
cálculo (ejemplo), 183
Diagrama de cero polos, 325
Diagramas
de bloque, función de transferencia, 338-341
conexión de retroalimentación, 339-341
conexión en serie, 339
diagrama de bloque, definición, 338, 342
interconexión paralela, 338-339
de Bode:
definición, 444
graficación, 458-459
Diferenciador, 410
Dimensión del modelo de estado, 585
Diodo ideal, 32-34
ejemplo, 33-34
Disco unitario abierto, 389-390
Discretización, 536-543
operación de retención, 538
sistema, 540-543
Diseño
de un controlador
PD (ejemplo), 520-522, 526
PI (ejemplo), 523, 526
PID (ejemplo), 524-525
de un filtro
pasa altas (ejemplo), 475-476
pasa bajas (ejemplo), 474-475
de un sistema de control, 516-525
diseño de un controlador PD (ejemplo), 520-522
diseño de un controlador PI (ejemplo), 523
diseño de un controlador PID (ejemplo), 524-525
diseño de un controlador proporcional (ejemplo), 517-520
porcentaje de sobretiro (P.O.), 516
Dispositivo de ley de cuadrados, ejemplo, 34
Distribución Dirac, 3
DTFT. *Vea* Transformada de Fourier de tiempo discreto (DTFT)
generalizada, 175-176
inversa, 175
Dualidad, 140-141

## E

Ecuación
de salida, 586
diferencial, 24
de entrada y salida de orden *N*, 57-62
de entrada y salida, 24, 25
Ecuaciones de estado
definición, 586-587
solución de, 595-604
respuesta de salida, 597-598
solución a ecuaciones forzadas, 596-597
solución vía la transformada de Laplace, 598-604
Ecuaciones diferenciales
solución, 69-75
circuito en serie *RC* (ejemplo), 72-73
circuito *RC* resuelto con el solucionador MATLAB ODE, 74-75
circuito *RC* resuelto con el Symbolic Math Toolbox, 75
método de solución numérica, 70-75
solución matemática simbólica MATLAB, 75

Electrocardiograma (ECG), 1, 23,37
Electroencefalograma (EEG), 1
Elementos de retraso unitario, interconexiones, 386-388
Eliminación de ruido, aplicación de filtros IIR, 547
Emulación analógica, 568
Entrada de control, 489
Entradas no periódicas, respuesta a (ejemplo), 234-237
Error de rastreo, 492
  de estado estable, 494-495
Escalamiento en el tiempo, 128-130
Escalón unitario, definición, 3
Espectro
  de amplitud, 99-100, 173
  de fase, 99-100, 173
  de frecuencia, 2, 173
  de línea, 98, 100, 110-112
    de un tren de pulsos rectangulares (ejemplo), 112
  infinito, 121
Estabilidad
  BIBO, 414
  de entrada limitada, salida limitada (BIBO), 414
  relativa, 516
Estabilidad y la respuesta al impulso, sistemas de tiempo continuo, 411-414, 478-479
  sistema de tercer orden (ejemplo) 434-437
  sistemas de orden más alto, 434-437
  sistemas de primer orden, 420-424
    cómo determinar la ubicación de los polos a partir de la respuesta al escalón, 423-424
    ejemplo, 421-422
  sistemas de segundo orden, 424-434
    caso cuando ambos polos son reales, 424-426
    caso cuando los polos son reales y repetidos, 426-427
    caso cuando los polos son un par complejo, 427-429
    comparación de casos, 431-434
    frecuencia natural, 424
    razón de amortiguamiento, efecto en una respuesta al escalón (ejemplo), 430
    sistema masa-resorte-amortiguador, 433-434
Estado
  cero, 585
  diferente de cero, 585
Estrictamente propias de *s*, uso del término, 300
Expansión
  de frecuencia, 130
  en el tiempo, 130
  en fracciones parciales, inversión contra, 371-377
  en series de Taylor, 294
Expresiones de forma cerrada, 64

## F

Factor de amortiguamiento, 424
Fase modulada (PM), 148, 152
  ejemplo, 149
Fenómeno de Gibbs, 105-108
  definición, 106
Filtrado, 237
  digital pasa baja, 254-262
    causal, 256-262
    filtro ideal analógico pasa bajas, desarrollo del filtro digital, 255
    filtro ideal digital pasa bajas, análisis de, 254-255
Filtro
  anti-aliasing, 537
  combinado ideal, 239
  de interpolación, 245
  de promedio corriente, 28
  de promedio móvil (PM), 27-28
    e información sobre precios de acciones, 29-30
    ejemplo de, 32, 33, 36
    en el punto *N* (PM), 27-28, 44
    en el punto *N* ponderado exponencialmente, 45-47
    linealidad, 35
    respuesta al pulso unitario, 48
  de promedio móvil ponderado exponencialmente (PMPE), 45-47, 549
    filtrado de información sobre precios QQQQ (ejemplo), 46-47
    respuestas al pulso unitario, 48
  digital de recursividad, 59
  doble PMP, 259-261
  EMA, 30
  Kalman, 622
  pasa
    altas, 448,550
    bajas, 227, 550
    banda de dos polos (ejemplo), 452-453
    todo, 409
  rechaza banda, 550
  SMA, 30
Filtros:
  como ejemplo de procesadores de señales, 22
  definición, 237
  elípticos, 470-471
  respuesta al impulso infinito. Vea filtros IIR
Filtros Butterworth, 465-468, 543, 549-550, 578
  de dos polos, 465, 468
    ejemplo, 544-545
  de *N* polos, 466-468
  de tres polos, 466-467
    ejemplo, 473-474
  diseño
    de un filtro pasa altas (ejemplo), 475-476
    de un filtro pasa bajas (ejemplo), 474-475

MATLAB (ejemplo), 550
vía MATLAB (ejemplo), 476-477
frecuencia de corte, 465-466
Filtros causales, 242, 263, 463-478
banda de rechazo, 464
construcción a partir de componentes de circuitos, 464
digitales pasa bajas, 256-262
filtros de promedio móvil ponderado, 257-259
funciones magnitud y fase de, 256-257
información sobre el precio de acciones, aplicación, 261-262
diseño de un filtro rechaza banda (ejemplo), 477-478
distorsión en la salida, cómo evitarla, 464
filtros Chebyshev, 468-478, 543, 549-550, 578
de dos polos tipo 1, 470
de *N* polos tipo 1, 469
de tipo 1, 468, 470
de tipo 2, 468
de tres polos tipo 1, 470
diseño de un filtro pasa altas (ejemplo), 475-476
diseño de un filtro pasa bajas (ejemplo), 474-475
diseño de un filtro rechaza banda (ejemplo), 477-478
diseño vía MATLAB (ejemplo), 476-477
elípticos, 470-471
polinomios Chebyshev, 469
polinomio Chebyshev de orden *N*, 469
transformaciones de frecuencia, 472-478
región de transición, 464
Filtros digitales. *Vea también* Filtros FIR; Filtros IRR
clasificación de, 578
discretización, 536-543
diseño de, 536-583
modulación por código de pulsos, 537
operación de retención, 538-540
Filtros FIR, 578
diseño de, 556-568
filtro FIR pasa bajas, 559-563
procedimiento alterno de diseño, 559-563
ventanas, 563-568
filtrado pasa bajas mediante ventanas hanning y hamming (ejemplo), 566-568
Filtros ideales
análisis de, 237-242
banda de rechazo de, 238
causales, 242
combinado, 239
definición, 238
digitales pasa bajas, análisis de, 254-255
función fase, 239-240
pasa altas, 239
pasa bajas, 238-239
de fase lineal, 240-242
respuesta al pulso unitario de, 256
pasa banda, 238
de fase lineal, 242
Filtros IIR, 578
comercio de acciones, aplicación a, 549
diseño de, 543-549
cómo eliminar componentes de señales (ejemplo), 553-554
diseño alterno (ejemplo), 550-551
filtrado de frecuencias específicas (ejemplo), 552-553
filtrado de señales aleatorias (ejemplo), 554-556
filtro Chebyshev pasa altas de tipo 1 (ejemplo), 551
uso de MATLAB, 549-556
eliminación de ruido, aplicación a, 547-549
información sobre precios de acciones, aplicación a (ejemplo), 547-549
Forma
en fase de coseno, series trigonométricas de Fourier, 102
polar, transformada de Fourier, 116-118
rectangular, transformada de Fourier, 116-118
Fórmula de interpolación, 246-247
fourier(f) e ifourier(F), 75
Fourier, Jean Baptiste, 96
Frecuencia
central de un filtro, 451
de corte, filtros Butterworth, 465-466
de muestreo, 243
de muestreo Nyquist, 245-246
para voz (ejemplo), 246
de resonancia, 450
fundamental, 101
modulada (FM), 148, 152
ejemplo, 149
natural, 424
de amortiguamiento, 431
Fricción viscosa, 66
Función
de un sistema, 224
de respuesta de frecuencia, 224, 249
de transferencia
de ciclo abierto, 299
de la representación en bloque, análisis de sistemas de tiempo continuo mediante, 411-488
delta, 3
escalón unitario, 4
ejemplo, 354-355
señales de tiempo continuo, 2-3
señales de tiempo discreto, 14-15
fase, 224
magnitud, 224
pulso
rectangular, 7
triangular, 7-8

unitario, señales de tiempo discreto, 15-16
racional de *s*, 299
rampa unitaria, 4
señales de tiempo continuo, 2-3
señales de tiempo discreto, 14-15
valuada
en escalares, uso del término, 1
en reales, uso del término, 1
Función de respuesta de frecuencia, sistemas de tiempo continuo:
caso de primer orden, 448
sistemas de un solo polo con un cero, 447
construcción de gráficas de Bode vía asíntotas, 454-463
sistema masa-resorte-amortiguador (ejemplo), 442
sistemas de segundo orden, 449-454
caso de polos complejos, 450-454
filtro pasa banda de dos polos (ejemplo), 452-453
sistema masa-resorte-amortiguador (ejemplo), 453-454
Función de transferencia, 317
transformada de Laplace, cómo determinarla (ejemplo), 324
transformada *z*:
cálculo (ejemplo), 383-384, 387-388
cálculo de las curvas de respuesta de frecuencia, 393-394
de interconexiones, 386-388
Función de transferencia de diagramas de bloque, 338-341
conexión de retroalimentación, 339-341
transformada de Laplace, 338-341
conexión de retroalimentación, 339-341
conexión en serie, 339
interconexión paralela, 338-339
Funciones
de base ortogonal, 158
irracionales, 315
trascendentales, 315
Function Block Parameter Window, 573


## G


Ganancia del lugar geométrico de las raíces, 509
Gibbs, Josiah Willard, 106
Gráficas de Bode, 478, 568
construcción de, vía asíntotas, 454-463
ceros o polos complejos, 460-462
factores constantes, 455-457
factores $j\omega$, 457-458
graficación de diagramas de Bode, 458-459
término cuadrático en el denominador (ejemplo), 462-463
Gráficas de tallo, 12


## H


Hoja de cálculo, descarga de información sobre series de tiempo, 18-19


## I


Igualación de respuestas, 569-570
al escalón, 569-571
Impulso, 3-4
propiedad de desplazamiento, 7
unitario, 3
Información sobre el precio de acciones:
aplicación de filtros IIR (ejemplo), 547-549
y el filtro de promedio móvil (PM), 29-30
Integración
en el dominio del tiempo, 135-137, 141
transformada de un pulso triangular (ejemplo), 136-137
transformada de Laplace, 292
Interconexiones
básicas, función de transferencia de, 388
elementos de retraso unitario, 386-388
en paralelo, 338-339
función de transferencia, 386-388
Intervalo de muestreo, 13
Inversión
de bits, 198
de modelo, 490
en el tiempo, 130-131, 141
señal exponencial invertida en el tiempo (ejemplo), 131
vía expansión en fracciones parciales, 371-377


## K


Kit LEGO® MINDSTORMS®, 575-577


## L


Laplace, Pierre Simon, 279
Ley
de corriente de Kirchhoff, 65
de voltaje de Kirchhoff, 65-66
del control robusta, 492
Leyes de movimiento de Newton, 23
Linealidad, 32, 37, 126, 141
sistemas, 32, 37
suma de pulsos rectangulares (ejemplo), 127
Lóbulos laterales, 122
Longitud de registro, 188
Lugar geométrico de las raíces, 508-516, 525-526
construcción, 511-514
definición, 509
para sistemas de

primer orden (ejemplo), 510-511
segundo orden (ejemplo), 512-514
segundo orden con un cero (ejemplo), 514-516

## M

Manipulación simbólica, mediante la transformada de Laplace, 284-285
Manipulador robótico, como ejemplo de un sistema, 22, 37
MATLAB
archivo M `conv`, 53
comando
`sum`, 28
`syms ck t`, 110
cómo importar datos, 18-21
Control System Toolbox, 328, 496-497
manipulador simbólico, 25
programa recur, 60-61
Signal Processing Toolbox, 549-550, 566
Simulink, 329-330
Symbolic Math Toolbox, 109-110, 284-285, 328, 422
uso para señales de tiempo continuo, 10-11
Matriz
de transición de estado, 596
identidad $N \times N$, 595
Memoria, sistemas, 32, 37
Menú Math Operations, biblioteca Simulink, 497
Método
del residuo, 300
MACD, 396
Métodos de diseño directo, 568
Microsoft Excel, 19-20
Modelo
de convolución, 24,37
interno, 23
Modelo de estado, 23
construcción de, 587-595
desarrollos integradores, 590-592
sistemas multientradas, multisalidas, 592-595
definición, 584-585
desarrollo de, 584
dimensión de, 585
discretización de, 618-622
estructura en cascada, correspondiente a, 587
Modelos
canónicos (formas canónicas), 615
de dominio de frecuencia, 24-37
matemáticos, 23
Modelos de dominio de tiempo, 24, 36, 37, 44-95
clase general de sistemas, 48-49
convolución, definición, 49
de señales de tiempo discreto, 49-55
filtro de promedio móvil ponderado exponencialmente, 45-47
modelos de ecuaciones diferenciales, 64-69
representación
de convolución, definición, 49
de entrada y salida del sistema, 44-49
suma de convolución, 50
Modelos de ecuaciones diferenciales, 55-69
circuito en serie *RC* (ejemplo), 65-66
circuitos eléctricos, 64-66
ecuación diferencial de entrada y salida de orden *N*, 57-62
modelos de dominio de tiempo, 55-69
ecuación diferencial de entrada y salida de orden *N*, 57-62
nivel de inventario (ejemplo), 63-64
solución completa, 62-64
motor con carga (ejemplo) 69
nivel de inventario (ejemplo), 63-64
sistema
de segundo orden (ejemplo), 60
masa-resorte-amortiguador (ejemplo), 67-68
sistemas mecánicos, 66-69
rotacionales, 68-69
solución completa, 62-64
Modulación
de ángulo, 148-149
pulso-código (PM), 537
Monotonía, uso del término, 468
Movimiento traslacional, 66
Muestreo, 2, 12-14, 263, 537
aliasing, 247-248
filtrado de voz (ejemplo) 248
filtro de interpolación, 245
fórmula de interpolación, 246-247
frecuencia de muestreo de Nysquit, 245-246
para voz (ejemplo), 246
frecuencia de muestreo, 243
no uniforme, 13
teorema de, 245
uniforme, 13
y el análisis de Fourier aplicado a sistemas, 242-248
Multiplicación
en el dominio del tiempo, 138, 141
por una exponencial compleja, 133
por una potencia de *t*, 131-133, 141
producto de *t* y un pulso (ejemplo), 132
por una sinusoide, 133, 141
ráfaga sinusoidal (ejemplo), 133-134

## N

Nodo, 65

## O

Operación de retención, 538-540
  retención de orden cero, 538
Orden
  de un sistema, 324
  de una función racional, 299
Oscilaciones, 429-432, 479
Oscilador local, 145

## P

Parte
  de estado estable, respuesta de salida, 392
  errática, señal, 22
  ruidosa, señal, 22
  suave, señal, 22
  transitoria de una respuesta, 419
    salida, 392
Pendiente unitaria, definición, 3
Periodo
  definición, 16
  fundamental, 5, 101
Planta, 489
PM. *Vea* Fase modulada (PM)
Polinomio
  Chebyshev
    de orden *N*, 469
  denominador, 298
  numerador, 298
Polos
  de un sistema, 325
  de una función racional, 300
  dominantes, 425
Polos distintos, 300-316
  caso (ejemplo), 301-302
  con dos o más polos complejos, 302-307
    caso de polos complejos (ejemplo), 303-304
    completar el cuadrado (ejemplo), 305
  igualar coeficientes, 306-307
  polos repetidos, 307-312
    caso en que $M \geq N$, 310-312
    ejemplo, 308-309
    potencias de términos cuadráticos, 309-310
  ubicaciones de los polos y la forma de una señal, 312-313
    forma general de una señal (ejemplo), 312-313
    valor limitante, 313
Ponderaciones, combinaciones lineales, 45
Predeformación, 546-547
  ejemplo, 547
Predictor ideal, 31
Préstamo de sólo interés, 630
Principio de D'Alembert, 67, 69
Problema sobre el control óptimo lineal cuadrático, 622
Problemas de estimación de señales, 622
Procesadores de señales, 22
  aplicaciones, 22
Procesamiento de señales digitales (DSP), 393
Proceso de recursividad, 44
Prueba de estabilidad de Routh-Hurwitz, 414-419, 478, 515
  aplicación, 416
  caso de
    cuarto orden (ejemplo), 418-419
    orden más alto (ejemplo), 418
    segundo orden (ejemplo), 416-417
    tercer orden (ejemplo), 417
Pulso
  desplazado, transformada *z* (ejemplo), 354
  rectangular (ejemplo), 119-120
  triangular (ejemplo), 123-124
  unitario, transformada *z* de (ejemplo), 353-354
  transformada *z* (ejemplo), 358
Punto de ajuste, 489

## R

Rastreo, 489
  asintótico, 493
  perfecto, 494
Reconstructor y muestreador de señales, cascada de, 537
Recursividad
  de orden *N*, 59
Refinería petrolera, como ejemplo de un sistema, 22
Región
  de convergencia, 281-282
    transformada *z*, 353
  de transición, 464
Representación
  de convolución:
    definición, 49
    modelos de dominio de tiempo, definición, 49
  de dominio de frecuencia, 223
  de la transformada de Fourier, 24, 37
  del dominio *s*, 317, 319
  en el dominio *z*, 378
Representación de estado (variable de estado), 584-632
  sistema de tiempo discreto, 604-612
    combinación de un préstamo bancario y una cuenta de ahorros (ejemplo), 608-609
    construcción del modelo de estado, 605-606
    elementos de retraso unitario, desarrollo mediante, 606-607
    matriz de la función de transferencia, cálculo de, 610-612
    respuesta de salida, cálculo de, 609
    solución a ecuaciones de estado, 607-609
    solución vía la transformada *z*, 609-612

ecuaciones
de estado, 586-587
de salida, 586
modelo de estado, discretización de, 618-622
representaciones equivalentes de estado, 612-618
forma diagonal, ejemplo, 616-618
modelos equivalentes de estado (ejemplo), 614-615
transformación coordenada, 613
Representación de la función de transferencia, 24, 37, 317
transformada *z*, 377-388
análisis de sistemas, 388-400
caso de orden *N*, 381-382
caso de primer orden, 378-379
caso de segundo orden, 379-381
papel de, 401
respuesta al escalón (ejemplo), 379
Representaciones
de entrada y salida, 23-24
de un sistema, 44-49
definición, 44
tipos de, 24
de estado equivalentes, 612-618
forma diagonal, ejemplo, 616-618
modelos de estado equivalentes (ejemplo), 614-615
transformación coordenada, 613
Residuos, 300
Resonancia, 450
Respuesta
al escalón, 25, 319
análisis de, 419-437
cómo determinar la ubicación de los polos a partir de (ejemplo), 423-424
efecto de $\omega_n$ (ejemplo), 431
al impulso, 393
finito (FIR), 393-394
unitario, 48
de entrada cero, 597
de estado cero, 597
de frecuencia de ciclo cerrado, 571, 578
escalón oscilatorio, 428
Retenedor de orden cero, 538
Retraso de tiempo ideal, 32
Retroalimentación, 492-493
conexión, 339-341
control de retroalimentación de salida, 493
estado, 615

## S

Segunda ley de movimiento de Newton, 66-67
Semiplano abierto
derecho (ORHP), 415
izquierdo (OLHP), 415
Sensibilidad
de amplitud, 147
de fase, 148
de frecuencia, 149
Señal
analógica, definición, 1
binaria, 18
constante (ejemplo), 114-115
continua:
definición, 7
parcialmente 9
de amplitud binaria, construcción, 537
de banda
base, 147
de paso, 147
de referencia, 489
de voz:
ejemplo, 1
muestreo, 2
discontinua, 7-8
exponencial (ejemplo), 115-116
MACD, 85, 549
parcialmente continua, 9
Señales
contenido de frecuencia de, 96-97
de banda limitada, 120-122
ancho de banda infinito, 121
espectro de frecuencia (ejemplo), 121-122
espectro infinito, 121
lóbulos laterales, 122
de tiempo continuo, 1-11, 37
deducción de, 9-10
definición, 1
diferenciable, 9
impulso, 3-4
señales desplazadas en el tiempo, 6-7
señales periódicas, 5-6
uso de MATLAB, 10-11
desplazadas en el tiempo, 6-7
diferenciables de tiempo continuo, 9
digitales, 18
no periódicas, 114
periódicas, 5-6
de tiempo discreto, 16-17
suma de, 6
truncas, DFT de, 188-195
Señales de tiempo discreto, 11-21, 37
análisis de Fourier, 166-221
aplicaciones, 11
convolución de, 49-55
cálculo de la salida del sistema, 53-55
método de arreglo (ejemplo), 52
uso de la forma analítica (ejemplo), 50-51
definición, 11

función
escalón unitario, 14-15
pulso rectangular de tiempo discreto, 17-18
pulso unitario, 15-16
rampa unitaria, 14-15
gráfica de tallo, 12
información de tiempo discreto, descarga de la Web, 18-21
muestreo, 12-14
notación, 12
periódicas, 16-17
señales desplazadas en el tiempo, 18
señales digitales, 18
Series
de datos financieros, 19
de tiempo, 18
en ingeniería, 19
exponenciales complejas, 108-113
Series de Fourier, 96-165
complejas truncas de Fourier, 113
definición, 96
representación de una señal periódica, 102
series exponenciales complejas, 108-113
espectro de línea, 110-112
espectro de línea de un tren de pulsos rectangulares, 112
series complejas y truncas de Fourier, 113
teorema de Parseval, 113
tren de pulsos rectangulares (ejemplo), 109
trigonométricas, 101-108
definición, 102
fase en la forma de coseno, 102
fenómeno de Gibbs, 105-108
forma en fase coseno, 102
simetría par o impar, 104-105
tren de pulsos rectangulares (ejemplo), 103-104
Signal Processing Toolbox, MATLAB, 468, 549-550, 566
Simetría, 104-105
par o impar:
series trigonométricas de Fourier, 104-105
transformada de Fourier, 118-120
Simulación numérica, 328
Simulink, MATLAB, 329-330, 420, 422, 496-497
Sinusoides
suma (ejemplo), 97-98
transformada *z* (ejemplo), 363
Sistema
anticipatorio, 31-32
causal, 31-32, 37
críticamente amortiguado, 432
de ciclo abierto, 339
de ciclo cerrado, 340
Simulación con MATLAB, 496-497
de retroalimentación, 339
de segundo orden (ejemplo), definición, 326
de tipo 0, 501
de tipo 1, 500-501
estable de tiempo discreto, 389-390
inestable, 412
invariante en el tiempo, 36, 37
marginalmente estable, 412
masa-resorte-amortiguador, 26-27, 36, 67-68, 325-326, 433-434, 442, 453-454
no amortiguado, 431-432
no anticipatorio, 31-32
no causal, 31-32
no lineal, 32-33
recursivo de tiempo discreto, 59
sobreamortiguado, 432
variante en el tiempo, 36
Sistema de tiempo continuo
análisis de Fourier, 222-228
análisis de frecuencia de un circuito *RC*, 224-228
entrada sinusoidal, respuesta a, 223-225
sistema masa-resorte-amortiguador (ejemplo), 228
análisis mediante la representación de la función de transferencia, 411-486
control digital de, 568
definición, 21
entradas cualesquiera, respuesta a, 442-443
forma de la respuesta de salida (ejemplo), 443
estabilidad y la respuesta impulso, 411-414
caracterizaciones alternas de estabilidad, 414
circuito en serie *RLC* (ejemplo), 413-414
prueba de estabilidad Routh-Hurwitz, 414-419
sistema de tercer orden (ejemplo), 434-437
sistemas de orden más alto, 434-437
sistemas de primer orden, 420-424
sistemas de segundo orden, 424-434
filtros causales, 463-478
forma de la respuesta de salida, 443
función de respuesta de frecuencia, 443-463
caso de primer orden, 448
construcción de gráficas de Bode vía asíntotas, 454-463
sistemas de segundo orden, 449-454
representación de convolución, 75-84
convolución de pulsos (ejemplo), 79-81
convolución de segmentos exponenciales, 81-84
integral de convolución, 76
método gráfico de convolución, 78-79
respuesta de salida de un circuito *RC* (ejemplo), 77-78
sistemas no causales, 81-84
respuesta a sinusoides, 437-442
sistema de primer orden (ejemplo), 439-442
sistema masa-resorte-amortiguador (ejemplo), 442
Sistema de tiempo discreto
análisis de Fourier, 249-253

filtro PM (ejemplo), 251-253
respuesta a una entrada sinusoidal, 250-253
definición, 21
discretización, 540
representación de entrada y salida, 44-49
representación de estado (variable de estado), 540, 604-612
cálculo de la matriz de la función de transferencia, 610-612
cálculo de la respuesta de salida, 609
combinación de préstamo bancario y cuenta de ahorros (ejemplo), 608-609
construcción del modelo de estado, 605-606
desarrollo vía elementos de retraso unitario, 606-607
solución a ecuaciones de estado, 607-609
solución vía la transformada *z*, 609-612
y la transformada *z*, 352-410
Sistemas, 21, 24, 37
análisis de Fourier, 222-278
analógicos, definición, 21
biológicos, 22, 37
circuito *RC*, 24-26, 36
de comunicaciones, 22, 37
de manufactura, 22,37
de un solo polo con un cero, 447
definición, 21, 37
ejemplos, 22, 24-30, 37
filtro de promedio móvil (PM), 27-28
homogéneos, 32
linealidad, 32-37
mecánicos, 66-69
sistemas mecánicos rotacionales, 68-69
memoria, 32, 37
modelo matemático de, 23
multi entradas, multi salidas, 592-595
sistema de dos entradas, dos salidas (ejemplo), 594-595
sistema de una pareja de dos carros (ejemplo), 593-594
orden de, 324
propiedades básicas, 31-36
representación de entrada y salida, 44-49
sin memoria y con memoria, 32
sistema masa-resorte-amortiguador, 26-27
trayectoria de estado, 586
Sistemas dimensionalmente finitos, 324-330
cálculo de la respuesta de salida con MATLAB, 327
polos y ceros de un sistema, 325
respuesta de salida a partir de `lsim`, 328-329
sistema masa-resorte-amortiguador (ejemplo), 325-326
solución con el manipulador simbólico (ejemplo), 327-328
transformadas de Laplace, 324-330
cálculo de la respuesta de salida con MATLAB, 327
polos y ceros de un sistema, 325
respuesta de salida a partir de `lsim`, 328-329
sistema masa-resorte-amortiguador (ejemplo), 325-326
solución con el manipulador simbólico (ejemplo), 327-328
Software de hojas de cálculo, 18-19
Solución
con el manipulador simbólico (ejemplo), 327-328
de ecuaciones de estado, 595-598
respuesta de salida, 597-598
solución a ecuaciones forzadas, 596-597
solución vía la transformada de Laplace, 598-604
Suma
de convolución, 50
de pulsos rectangulares (ejemplo), 127
de sinusoides, 97-98
Symbolic Math Toolbox, 109-110, 284-285, 328, 420, 422, 429, 442
circuitos *RC* resueltos con, 75


## T


Teorema
de muestreo, 245
de Parseval, 113, 139, 141, 285
del valor
final, 295-296
inicial, 294-295
Teoremas de modulación, transformada de Fourier, 133
Término actualización, 394
Tiempo de establecimiento, 516
Transformación
bilineal, 543,568, 578
coordenadas, 613
Transformaciones de frecuencia
filtros Chebyshev 472-478
utilidad con MATLAB, 474
Transformada de Fourier, 2, 96, 114-122
aplicación a la modulación o desmodulación de señales, 144-152
contenido espectral de señales comunes, 122-126
forma rectangular y polar, 116-118
generalizada, 141-144
definición, 142
transformada de Fourier de una señal periódica, 143
transformada de la función escalón unitario, 143-144
inversa, 122
pares comunes, 144
propiedades
convolución en el dominio de tiempo, 138, 141

derivación en el dominio de tiempo, 134-135, 141
desplazamiento en el tiempo por la izquierda o por la derecha, 127-128, 141
dualidad, 140-141
escalamiento en el tiempo, 128-130, 141
integración en el dominio de tiempo, 135-137, 141
inversión en el tiempo, 130-131, 141
linealidad, 126, 141
multiplicación en el dominio de tiempo, 138, 141
multiplicación por una exponencial compleja, 133, 141
multiplicación por una potencia de *t*, 131-133, 141
multiplicación por una sinusoide, 133, 141
resumen, 141
teorema de Parseval, 139, 141
pulso rectangular (ejemplo), 119-120
señal
constante (ejemplo), 114-115
exponencial (ejemplo), 115-116
señales
de banda limitada, 120-122
no periódicas, 114
simetría par o impar, señales con, 118-120
teoremas de modulación, 133
Transformada de Fourier de tiempo discreto (DTFT), 166-179, 392-393
cálculo (ejemplo), 167
de señales constantes (ejemplo), 176
definición, 166
del pulso rectangular (ejemplo), 172-173
espectro de una señal de tiempo discreto, 173-174
señal con componentes de alta frecuencia (ejemplo), 174-175
señal con componentes de baja frecuencia (ejemplo), 174
formas rectangular y polar (ejemplo), 169-171
generalizada, 175-176
inversa, 175
pares
a partir de pares CTFT (ejemplo), 179
de transformadas, 176-177
propiedades de, 177-179
representación de dominio, 222
señales con simetría par o impar, 171-173
Transformada discreta de Fourier (DFT), 179-188
aplicación al análisis de información, 206-216
análisis de información sobre manchas solares, 208-212
análisis de precios de acciones, 212-216
extracción de una componente sinusoidal incrustada en ruido, 206-208
cálculo de (ejemplo), 181-182
de señales truncas, 188-195
de sinusoides truncas (ejemplo), 191-195
definición, 166
en el punto *N* (ejemplo), 189-191
forma sinusoidal, 184-185
ejemplo, 185
inversa, 182-183
cálculo (ejemplo), 183
relación con la DTFT, 185-188
simetría, 182
Transformada inversa *z*
cálculo de, 367-377
expansión por división larga, 367-369
inversión vía expansión en fracciones parciales, 371-377
mediante MATLAB (ejemplo), 371
vía división larga (ejemplo), 369-370
Transformada *z*
de doble lado, 353
de un solo lado, 353
Transformadas de Laplace, 25, 279, 351
a partir de la transformada de Fourier (ejemplo), 283-284
cálculo mediante la manipulación simbólica, 284-285
con contenido exponencial, 315-316
ejemplo, 316
construcción directa de la función de transferencia, 330-338
cálculo de la función de transferencia (ejemplo), 334-335
circuito en serie *RLC* (ejemplo), 333-334
circuitos *RLC*, 330-338
interconexión de integradores, 335-338
de doble lado, 279, 282
de la ecuación diferencial de entrada y salida, 316-322
cálculo de la respuesta de salida, 321-322
caso de orden *N*, 320-321
caso de primer orden, 317-319
caso de segundo orden, 319-320
de la integral de convolución de entrada y salida, 323-330
de un coseno (ejemplo), 289
de un pulso (ejemplo), 286
de un solo lado, 279, 282
de una función exponencial (ejemplo), 282-283
de una señal, 279-285
región de convergencia, 281-282
transformada de Laplace de doble lado (o bilateral), 281
transformada de Laplace de un solo lado (unilateral), 281-282
definición, 282

función de transferencia de diagramas de bloque, 338-341
conexión de retroalimentación, 339-341
conexión en serie, 339
interconexión en paralelo, 338-339
función de transferencia, cómo determinarla (ejemplo), 324
función rampa unitaria (ejemplo), 287
inversa, 326
cálculo, 296-316
cálculo mediante manipulación simbólica, 314-315
ejemplo, 296-316
multiplicación de una exponencial por coseno y seno (ejemplo), 290
multiplicación por seno (ejemplo), 290
par de transformadas, 323
pares comunes, 298
propiedades, 285-296
convolución, 293-294
derivación en el dominio de tiempo, 290-292, 341
desplazamiento en el tiempo por la derecha, 285-286
escalamiento en el tiempo, 286-287
integración, 292
linealidad, 285
multiplicación por una exponencial, 288
multiplicación por una potencia de *t*, 287-288
multiplicación por una sinusoide, 289
tabla, 297
teorema del valor final, 295-296
teorema del valor inicial, 294-295
racional, 297-300
polos distintos, 300-316
relación entre la transformada de Fourier y, 283-284
sistema de tercer orden (ejemplo), 326-327
sistemas dimensionalmente finitos, 324-330
cálculo de la respuesta de salida con MATLAB, 327
polos y ceros de un sistema, 325
respuesta de salida a partir de `lsim`, 328-329
sistema masa-resorte-amortiguador (ejemplo), 325-326
solución con el manipulador simbólico (ejemplo), 327-328
solución de ecuaciones de estado vía, 598-604
aplicación al sistema de dos carros, 600-604
Transformador Hilbert, 273
Transmisión de doble banda lateral (DSB), 148
con portadora suprimida (DSB-SC), 148
desmodulación de señales DSB, 149-152
Trayectoria de estado del sistema, 586
Tren de pulsos
rectangulares (ejemplo), 103-104
respuesta a (ejemplo), 229-234

## U

Umbral, 41

## V

Valor de estado estable de la respuesta al escalón, 419
Variable frecuencia, 98
Variables:
de estado, 584-585, 622
definición, en términos de la salida y las derivadas de la salida, 586
de tiempo continuo, 1-3
ejemplos de, 1
función escalón unitario/función rampa unitaria, 2-3
de tiempo discreto, 11
internas, 622
Ventanas, 556, 563-568
función ventana, 565
Hamming, 564-565, 578
filtrado pasa bajas mediante el uso de (ejemplo), 566
Hanning, 564-565, 578
filtrado pasa bajas mediante el uso de (ejemplo), 566
no rectangulares, 565
rectangulares, 564-565
ventana Kaiser, 565
Versión muestreada, 13
Voz, frecuencia de muestreo de Nyquist (ejemplo), 246

## Y

Yahoo!, 19-20

## Z

*z*, transformada
$a^n$ veces una sinusoide, 363
de $(n + 1)u[n]$, 364
de $a^n p[n]$ (ejemplo), 362
de doble lado, 353
de $n^2 a n^u[n]$, 361
de $na^n u[n]$, 361
de sinusoides (ejemplo), 363
de un pulso
(ejemplo), 358
desplazado (ejemplo), 354
unitario (ejemplo), 353-354
de un solo lado, 353
definición, 352
filtrado de señales con ruido, 393-400
aplicación al mercado de acciones, 396-400

función de transferencia:
cálculo de (ejemplo), 383-384, 387-388
cálculo de las curvas de respuesta de frecuencia, 393-394
de interconexiones, 386-388
función escalón unitario (ejemplo), 354-355
inversa, cálculo, 367-377
multiplicación
por $a^n$, 361-362
por cos $\Omega n$ y sen $\Omega n$, 362-363
propiedades de, 357-367
convolución, 364-365
desplazamiento en el tiempo por la izquierda, 359-360
desplazamiento por la derecha de $x[n]$, 358-359
desplazamiento por la derecha de $x[n]u[n]$, 357-358
desplazamiento por la izquierda de una función escalón unitario (ejemplo), 360
linealidad, 357
multiplicación por $n$ y $n^2$, 360-361
sumatoria, 363-364
teorema del valor final, 366-367
teorema del valor inicial, 365-366
valor limitante (ejemplo) 367
región de convergencia, 353
relación entre la DTFT y, 356
representación de la función de transferencia, 377-388
análisis de sistemas, 388-400
caso de orden $N$, 381-382
caso de primer orden, 378-379
caso de segundo orden, 379-381
papel de, 401
respuesta al escalón (ejemplo), 379
respuesta al escalón, cálculo (ejemplo), 384-386
suma de convolución de entrada y salida, transformada de, 382-386
y sistemas de tiempo discreto, 352-410
Zona muerta, 41

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

| Propiedad | Par de transformadas/Propiedad |
|---|---|
| Linealidad | $ax(t) + bv(t) \leftrightarrow aX(s) + bV(s)$ |
| Desplazamiento por la derecha en el tiempo | $x(t-c)u(t-c) \leftrightarrow e^{-cs}X(s), \quad c > 0$ |
| Escalamiento de tiempo | $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0$ |
| Multiplicación por una potencia de $t$ | $t^N x(t) \leftrightarrow (-1)^N \frac{d^N}{ds^N}X(s), \quad N = 1, 2, \ldots$ |
| Multiplicación por una exponencial | $e^{at}x(t) \leftrightarrow X(s-a), \quad a$ real o complejo |
| Multiplicación por sen $\omega t$ | $x(t) \operatorname{sen} \omega t \leftrightarrow \frac{j}{2}[X(s+j\omega) - X(s-j\omega)]$ |
| Multiplicación por cos $\omega t$ | $x(t) \cos \omega t \leftrightarrow \frac{1}{2}[X(s+j\omega) + X(s-j\omega)]$ |
| Derivación en el dominio del tiempo | $\dot{x}(t) \leftrightarrow sX(s) - x(0)$ |
| Segunda derivada | $\ddot{x}(t) \leftrightarrow s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$ |
| enésima derivada | $x^{(N)}(t) \leftrightarrow s^N X(s) - s^{N-1}x(0) - s^{N-2}\dot{x}(0) - \ldots - sx^{(N-2)}(0) - x^{(N-1)}(0)$ |
| Integración | $\int_0^t x(\lambda)d\lambda \leftrightarrow \frac{1}{s}X(s)$ |
| Convolución | $x(t) * v(t) \leftrightarrow X(s)V(s)$ |
| Teorema del valor inicial | $x(0) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$ |
| | $\dot{x}(0) = \lim_{s\to\infty} [s^2X(s) - sx(0)]$ |
| | $x^{(N)}(0) = \lim_{s\to\infty} [s^{N+1}X(s) - s^N x(0) - s^{N-1}\dot{x}(0) - \ldots - sx^{(N-1)}(0)]$ |
| Teorema del valor final | Si $\lim_{t\to\infty} x(t)$ existe, entonces $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$ |